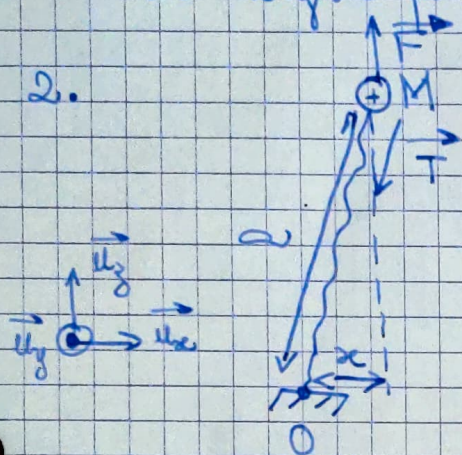


Corrigé - DM 11

1. On peut rapprocher les aimants pour augmenter la force, et les éloigner pour diminuer la force.

2.



La bille aimantée est soumise à la tension de la molécule et la force du champ magnétique.

Par le théorème du moment cinétique appliqué à la bille :

$$\frac{dL_0}{dt} = \mathcal{M}_0(\vec{F}) = x F \vec{u}_y$$

$$\text{Or } \vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = -m l x \vec{u}_y$$

$$\text{D'où : } m \ddot{x} = -F \cdot \frac{x}{l} = - \underbrace{F \frac{l}{x}}_{\text{force de rappel équivalente}} \cdot x$$

On a une force de rappel équivalente :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -k x \vec{u}_x \quad \text{où } k = \frac{F}{l}$$

Elle correspond à une énergie potentielle

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{F x^2}{2l}}$$

3. À l'équilibre, on a par le théorème d'équipartition (en supposant l'approximation continue vérifiée) :

$$\left\langle \frac{1}{2} k x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T \Rightarrow \frac{1}{2} k_B T = \frac{F \langle x^2 \rangle}{2l}$$

Sait :

$$\boxed{F = \frac{k_B T}{\langle x^2 \rangle} \cdot l}$$

On peut alors mesurer la position verticale l de la bille et la variance de sa position horizontale $\langle x^2 \rangle$ et faire une régression linéaire.

4. On aura $F_{\max} \sim \frac{k_B T}{(10 \text{ nm})^2} \times 15 \mu\text{m} \sim \frac{10^{-23} \cdot 300 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{(10 \cdot 10^{-9})^2} \sim 450 \text{ pN}$

5. On observe des fluctuations statistiques de la position de la bife selon x (que l'on a expliquées) mais aussi selon z , (probablement liées à l'élasticité de la molécule d'ADN).

On voit que plus l est importante (i.e. plus z est élevé), moins ces fluctuations sont fortes ce qui est cohérent avec l'idée d'une force plus importante quand l est grande donc quand la molécule est étirée.

6. Il y a une erreur ce sont des μm^2 (on le voit bien sur la figure)

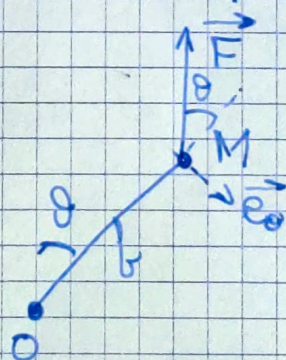
# Expérience	1	2	3	4	5
$\langle x^2 \rangle [\mu\text{m}^2]$	0,63	0,3	0,11	0,025	0,008
$l [\mu\text{m}]$	5	3,5	2,5	1,5	1,5
$F [\text{pN}]$	0,05	0,44	4,3	96	1003

la voir la fig. 3

avec $F = k_B T \frac{l}{\langle x^2 \rangle}$

7. Le travail de la force est :

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \vec{F} \cdot (l d\theta \vec{e}_\theta) \\ &= \vec{F} \cdot \vec{e}_\theta l d\theta \\ &= -F \sin \theta l d\theta \\ &= -d(l F \cos \theta) \end{aligned}$$

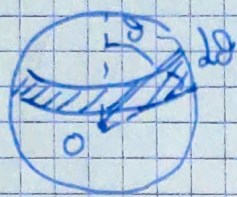


Ainsi le travail de la force s'écrit comme une différentielle

avec : $\delta W = -dE_p$ $E_p = -F l \cos \theta$

8. La probabilité d'avoir un angle entre θ et $\theta + d\theta$ en l'absence de force est proportionnelle à la probabilité de tomber

sur cet angle en tirant au hasard sur une sphère:



$$dp_{\text{sans force}} = \frac{A_{\text{surface}}}{A_{\text{sphère}}} = \frac{2\pi r \sin \theta \times r d\theta}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$$

En présence d'une force, cette probabilité doit être multipliée par le facteur de Boltzmann: $dp \propto dp_{\text{sans force}} \times e^{-\beta E_p}$

D'où: $dp \propto \exp(\beta F b \cos \theta) \sin \theta d\theta$

9. On applique la condition de normalisation:

$$1 = \int_0^\pi dp = A \int_0^\pi e^{\beta F b \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

$u = \cos \theta$
 $du = -\sin \theta d\theta$

$$= A \int_{-1}^1 e^{\beta F b u} du = \frac{A}{\beta F b} \times 2 \sinh(\beta F b)$$

D'où: $A = \frac{\beta F b}{2 \sinh(\beta F b)} \quad (*)$

De plus:

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \langle b \cos \theta \rangle \\ &= \int_0^\pi b \cos \theta dp = A b \int_0^\pi e^{\beta F b \cos \theta} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= A b \int_{-1}^1 u e^{\beta F b u} du \quad \text{IPP} \\ &= A b \left(\left[\frac{u}{\beta F b} e^{\beta F b u} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{e^{\beta F b u}}{\beta F b} du \right) \\ &= A b \left(\frac{2}{\beta F b} \cosh(\beta F b) - \frac{2}{(\beta F b)^2} \sinh(\beta F b) \right) \end{aligned}$$

En remplaçant A par (*) on trouve:

$$\langle z \rangle = b \left(\frac{1}{\text{th}(BFb)} - \frac{1}{BFb} \right)$$

10. Le problème est symétrique par rotation autour de (O_z)

donc $\langle x_i \rangle = \langle y_i \rangle = 0$

De plus $\langle z_i \rangle = \langle z \rangle$ si chaque battement est indépendant

11. On a: $l = \left\langle \sum_{i=1}^N z_i \right\rangle \Rightarrow l = N \times \langle z \rangle$

Soit: $l = Nb \left(\frac{1}{\text{th}(BFb)} - \frac{1}{BFb} \right)$

12. Pour les grandes forces $BFb \gg 1$ et donc $\text{th}(BFb) \approx 1$

Ainsi: $l = Nb \left(1 - \frac{k_B T}{Fb} \right)$ (avec $\frac{1}{b} = k_B T$)

On voit que la longueur est proche de la longueur max avec un petit écart lié à l'agitation thermique.

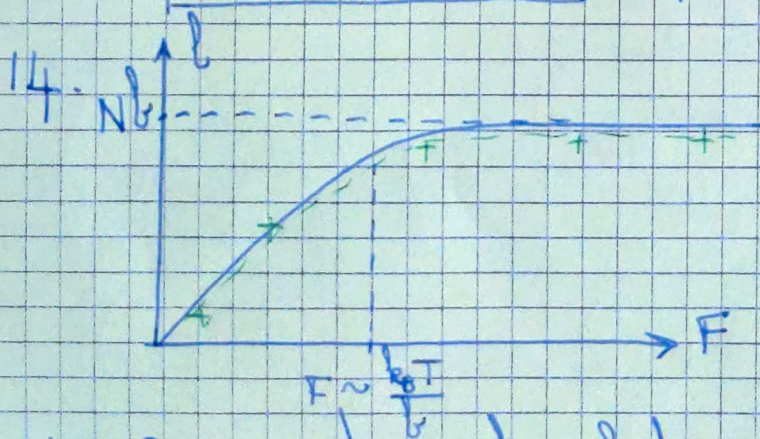
13. Pour les petites forces: $\text{th}(BFb) \approx BFb - \frac{(BFb)^3}{6}$

$$\frac{1}{\text{th}(BFb)} \approx \frac{1}{BFb} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(BFb)^2}{6}} \approx \frac{1}{BFb} \left(1 + \frac{(BFb)^2}{6} \right)$$

D'où: $l \approx Nb \times \frac{BFb}{6} \approx \frac{Fb^2 N}{6k_B T}$ soit:

$$F = \frac{6k_B T}{Nb^2} \times l$$

équivalent à un ressort de raideur $k = \frac{6k_B T}{Nb^2}$



15. Les fluctuations disparaissent avec grandes forces et alors

$$l_0 \approx l \approx 16 \mu\text{m}$$

Et les points de Q6 suggèrent $\frac{k_B T}{b} \sim 4 \text{ pN} \Rightarrow b \sim 1 \text{ nm}$

16. Si on augmente $\frac{1}{T}$ alors l diminue: ce n'est pas un effet de dilatation thermique mais de contraction par agitation thermique.