

Lycée Baimbridge, MP 2025-2026

8 novembre 2025

Physique Chimie

DS 5

Type X/ENS

Durée : 4 heures

*Calculatrice **interdite***

Le sujet est constitué de deux parties totalement indépendantes. Il n'est pas nécessaire de les aborder dans l'ordre.

Les réponses doivent systématiquement être justifiées (sauf mention explicite du contraire). La clarté de la rédaction et la justesse du raisonnement mené seront valorisées, même si la tentative de réponse n'est pas aboutie ou si la réponse obtenue à la fin de la question est incorrecte.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur de sujet, merci de l'indiquer clairement sur votre copie, et de poursuivre votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené.e à prendre.

Comme au concours, le sujet est long. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une bonne note.

1 Mesure de la constante de structure fine

Constantes fondamentales et autres valeurs numériques :

- célérité de la lumière dans le vide : $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 \simeq 9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- charge élémentaire : $e \simeq 1,5 \times 10^{-19} \text{ C}$
- constante de Planck : $h \simeq 7 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- constante de Planck réduite : $\hbar = h/2\pi \simeq 1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- constante de Boltzmann : $k_B \simeq 1,5 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- masse atomique d'un atome de Rubidium 87 : $m \simeq 1,5 \times 10^{-25} \text{ kg}$

1.1 Introduction

Ce sujet propose de s'intéresser à la mesure de la constante de structure fine α , dont Richard Feynman, célèbre physicien du XX^e siècle, disait qu'elle est "l'un des plus grands mystères de la physique : un nombre magique qui nous parvient sans que l'homme puisse le comprendre."

Cette constante, sans dimension, est directement reliée à l'interaction électromagnétique. Elle est donnée par la relation :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad (1)$$

Une valeur approchée de α est $1/137$. La mesure la plus précise à ce jour donne :

$$1/\alpha = 137,035\,999\,206 \pm 11 \times 10^{-9} \quad (2)$$

soit une incertitude relative de l'ordre de 8×10^{-11} . Ce sujet a pour but d'expliquer comment la constante de structure fine α a pu être mesurée avec une telle précision.

1.2 Question préliminaire

Une autre détermination précise de α a pu être effectuée de manière indépendante. Cette autre détermination fait en particulier intervenir des calculs issus du “Modèle standard”, qui est le cadre théorique de notre compréhension actuelle des forces forte, faible et électromagnétique. La valeur obtenue est :

$$1/\alpha = 137,035\,999\,15 \pm 3 \times 10^{-8} \quad (3)$$

□ **1** – Comparer les deux valeurs de $1/\alpha$ données par les Éq. (2) et Éq. (3) en calculant leur écart normalisé (que l’on comparera à 2). La théorie du Modèle Standard semble-t-elle valide au regard de ces deux valeurs ?

Dans ce sujet, nous nous intéresserons au lien entre α et une autre constante fondamentale connue avec précision : la constante de Rydberg R_∞ . Nous étudierons dans toute la suite du sujet le principe de la mesure de la masse m de l’atome de Rubidium 87, qui permet de remonter à α .

1.3 Lien entre la constante de structure fine α et la constante de Rydberg R_∞

En 1888, Johannes Rydberg trouve une formule empirique qui permet d’exprimer les longueurs d’onde des raies d’émission de l’hydrogène :

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (4)$$

avec n_1 et n_2 deux entiers ($n_1 < n_2$), et R_∞ une constante alors appelée constante de Rydberg. Cette observation marque les débuts de l’avènement de la physique quantique.

Niels Bohr propose en 1913 un modèle “semi-classique” permettant d’expliquer ces observations. Il développe un “modèle planétaire” de l’atome d’hydrogène, alors modélisé par un proton de charge $+e$ supposé fixe, et un électron de charge $-e$ et de masse m_e , non relativiste, soumis à la force électrostatique du proton et en orbite circulaire autour de lui. Niels Bohr fait également l’hypothèse de la quantification du moment cinétique orbital L de l’électron en écrivant $L = n\hbar$ où n est un entier naturel non nul. À chaque valeur de n correspond une orbite différente.

□ **2** – Pourquoi un tel modèle est-il qualifié de semi-classique ? Exprimer les vitesses v_n associées à chaque orbite. Sur quelle orbite la vitesse maximale est-elle atteinte ? Exprimer sa valeur en fonction de c et de α . Est-il alors légitime de considérer que l’électron est non relativiste dans le modèle de Bohr de l’atome d’hydrogène ?

□ **3** – Calculer l’énergie mécanique E_n de l’électron en fonction de n . Retrouver la formule de Rydberg (Éq. (4)) et en déduire l’expression de R_∞ en fonction de m_e, e, \hbar, c et ϵ_0 .

Si un tel modèle a ses limites, la constante de Rydberg continue d'intervenir dans les modèles théoriques les plus perfectionnés pour décrire les raies d'émission de l'atome d'hydrogène. La mesure précise de ces raies a permis de déterminer R_∞ avec une précision relative de 2×10^{-12} .

□ 4 – Montrer

$$\alpha = \sqrt{\frac{2R_\infty}{c} \times \frac{m}{m_e} \times \frac{h}{m}} \quad (5)$$

avec m la masse d'un atome de Rubidium.

On fait ici intervenir le rapport m_e/m car il est expérimentalement plus aisé de mesurer indépendamment la masse m de l'atome de Rubidium 87 (beaucoup plus grande que celle d'un électron) et la masse relative de l'électron par rapport à cet atome. Le rapport m/m_e a pu être mesuré avec une précision relative de 7×10^{-11} .

□ 5 – On note $u(\alpha)$ l'incertitude-type sur α . Donner la formule reliant l'incertitude relative $u(\alpha)/\alpha$ sur la mesure de α à celle des autres grandeurs $R_\infty, m/m_e$ et m qui interviennent dans son expression d'après l'Éq. (5). Pourquoi aucune incertitude ne doit être associée à la valeur de c et de h ? Vérifier que l'on a :

$$\frac{u(m)}{m} \simeq 1,5 \times 10^{-10} \quad (6)$$

Mesurer précisément α revient donc à mesurer précisément m . Dans la suite, nous nous intéressons à la mesure de m par interférométrie atomique.

1.4 Mesure de la masse de l'atome de Rubidium 87

En mécanique quantique, un atome peut être décrit par une fonction d'onde dont l'évolution est donnée par l'équation de Schrödinger. De même qu'en interférométrie optique un faisceau lumineux est séparé en plusieurs sous-faisceaux, qui sont ensuite recombinaés en sortie de l'interféromètre, l'interférométrie atomique consiste à “séparer spatialement” et à recombinaer la fonction d'onde associée à un atome. Cette séparation de la fonction d'onde peut être effectuée à l'aide de *séparatrices atomiques*, qui sont des impulsions laser qui tirent profit de *l'effet de recul* associé à l'absorption ou l'émission d'un photon.

1.4.1 Transitions à un ou à deux photons et effet de recul

On considère un atome de Rubidium 87, de masse m . L'énergie mécanique totale de l'atome, notée E , peut être décomposée en trois parties : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'atome, et l'énergie mécanique des électrons (ou énergie électronique). L'énergie mécanique des électrons peut valoir E_a, E_b ou E_c : on représente les états électroniques de l'atome sur la Fig. 1a. On prendra l'énergie potentielle E_p constante dans ce qui suit, excepté dans la partie 1.4.5. L'état a est l'état fondamental, de durée de vie infinie. La durée de vie de l'état b étant très grande devant celle de l'état c , on la considère également comme infinie.

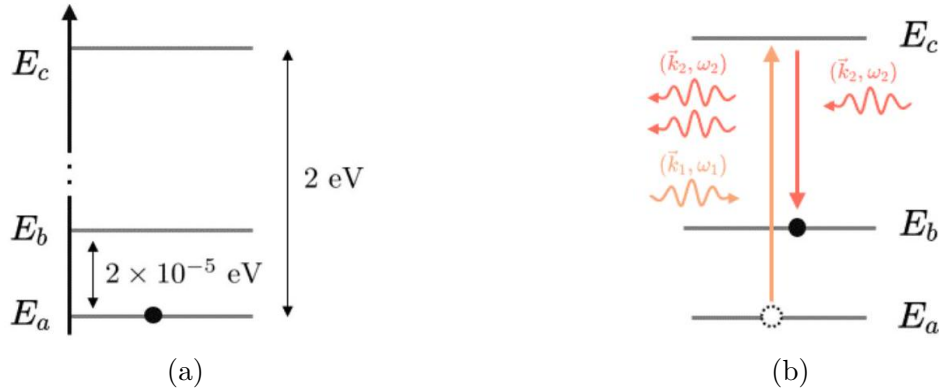


Figure 1: (a) : Niveaux d'énergie de l'atome de Rubidium 87 ; (b) : Principe de la transition à deux photons

Un atome, initialement au repos dans le référentiel d'étude et dans l'état a , absorbe un photon de quantité de mouvement $\hbar \vec{k}$ et d'énergie $\hbar \omega$ (avec $\omega = kc$ où $k = \|\vec{k}\|$), et effectue une transition vers l'état d'énergie E_i ($i = b$ ou $i = c$).

□ 6 – Usuellement, on néglige la variation de quantité de mouvement et la variation d'énergie cinétique lors de la transition (aussi appelée “énergie de recul”). Quelle est alors l'énergie du photon nécessaire pour effectuer la transition ?

□ 7 – On prend en compte l’“effet de recul”. Donner les relations de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement lors du processus d'absorption du photon, en notant \vec{v}_r la variation de vitesse de l'atome (appelée “vitesse de recul”).

□ 8 – À l'aide des deux relations précédentes, se ramener à une équation sur $k = |\vec{k}|$ et montrer que $k \simeq (E_i - E_a) / (\hbar c)$. En déduire la variation de vitesse $v_r = |\vec{v}_r|$ subie par l'atome lors de la transition. Effectuer l'application numérique pour v_r pour chacune des transitions $a \rightarrow b$ et $a \rightarrow c$.

□ 9 – Comme nous le verrons plus loin, on tire profit de l'effet de recul en interférométrie atomique pour séparer la fonction d'onde : plus cet effet est important, mieux on sépare la fonction d'onde et meilleure est la sensibilité sur la mesure. Quels sont l'avantage et l'inconvénient associés à chaque transition ($a \rightarrow b$ ou $a \rightarrow c$) pour transférer de la quantité de mouvement à un atome ?

Le “meilleur des deux mondes ” peut être obtenu en effectuant des **transitions à deux photons** (ou transitions “Raman ”). Le principe de telles transitions est présenté sur la Figure 1b : l'atome, initialement dans l'état a , est plongé deux faisceaux lasers se propageant en sens opposés. L'atome absorbe un photon du premier laser, et émet ensuite un photon sous l'action du deuxième laser (ce phénomène est appelé *émission stimulée*). On note \vec{k}_1 et \vec{k}_2 les vecteurs d'ondes respectifs des deux lasers.

□ **10** – On fait l'approximation $k \simeq |\vec{k}_1| \simeq |\vec{k}_2|$ et on note alors $\vec{k}_1 = \vec{k}$ et $\vec{k}_2 = -\vec{k}$ avec $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Justifier que la variation de vitesse de l'atome est alors $2\vec{v}_r$, où l'on précisera à quelle transition est associée la vitesse de recul \vec{v}_r . Donner la valeur numérique de k , valeur que l'on retiendra pour la suite du problème.

1.4.2 Séparatrices atomiques

On s'intéresse dans cette partie à un élément clé des interféromètres atomiques, les *séparatrices atomiques*. Elles permettent de séparer spatialement la fonction d'onde d'un atome en le plaçant dans une superposition de deux états d'énergie distincts.

Soit $\Psi(\vec{r}, t)$ la fonction d'onde associée à un atome. Dans l'état électronique a , l'atome a une impulsion $m\vec{v}_0$ et une énergie $E_1 = E_a + E_{p,a} + E_{c,a}$; dans l'état électronique b , l'atome a une impulsion $m(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)$ et une énergie $E_2 = E_b + E_{p,b} + E_{c,b}$, avec $E_{c,i}$ et $E_{p,i}$ les énergies cinétique et potentielle associées à chaque état $i = a$ ou $i = b$.

On donne l'expression de l'équation de Schrödinger à trois dimensions en l'absence de potentiel extérieur :

$$j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi \quad (7)$$

où l'opérateur laplacien Δ vérifie :

$$\Delta(e^{j\vec{u} \cdot \vec{r}}) = -\vec{u}^2 e^{j\vec{u} \cdot \vec{r}} \quad (8)$$

Un état stationnaire est associé à chaque état d'énergie. On note $a_1(t)$ et $a_2(t)$ les parties temporelles associées à ces états stationnaires. On note $\varphi_1(\vec{r})$ et $\varphi_2(\vec{r})$ les fonctions d'ondes spatiales associées à ces états stationnaires, dont on admet la forme explicite : $\varphi_1(\vec{r}) = \exp\left(j\frac{m}{\hbar}\vec{v}_0 \cdot \vec{r}\right)$ et $\varphi_2(\vec{r}) = \exp\left(j\frac{m}{\hbar}(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r) \cdot \vec{r}\right)$, avec $j^2 = -1$.

On peut ainsi écrire :

$$\Psi(\vec{r}, t) = a_1(t) \exp\left(j\frac{m}{\hbar}\vec{v}_0 \cdot \vec{r}\right) + a_2(t) \exp\left(j\frac{m}{\hbar}(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r) \cdot \vec{r}\right) \quad (9)$$

□ **11** – Donner les équations différentielles vérifiées par les coefficients $a_i(t)$ ($i = 1, 2$). Résoudre ces équations, et mettre les solutions sous la forme :

$$\vec{a}(t) = A(t)\vec{a}(0) \quad (10)$$

avec $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t))$ et $A(t)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux (que l'on explicitera) dépendent du temps.

□ **12** – Initialement on a $\vec{a}(t = 0) = (1, 0)$, autrement dit l'atome est dans l'état stationnaire d'énergie E_1 . Justifier que l'atome demeure dans cet état d'énergie E_1 à tous les instants ultérieurs.

Le principe des séparatrices atomiques consiste à placer un atome, initialement dans l'état 1, dans une superposition des états 1 et 2. Cela peut être effectué en utilisant les transitions à deux photons vues précédemment, qui peuvent être effectuées en utilisant deux faisceaux laser. L'atome est plongé dans le champ des deux faisceaux laser pendant une durée finie : on note τ la durée des impulsions laser.

Si un atome est soumis à ces impulsions laser à l'instant $t = 0$, et pendant une durée τ , la valeur de $\vec{a}(t)$ à l'instant $t = \tau$ est donnée par :

$$\vec{a}(\tau) = A(\tau)R(\Omega\tau)A^{-1}(0)\vec{a}(0) \quad (11)$$

où $A^{-1}(0)$ est la matrice inverse de la matrice $A(0)$, et où la matrice $R(\Omega\tau)$ est donnée par :

$$R(\Omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t/2) & -j \sin(\Omega t/2)e^{j\phi_{\text{laser}}} \\ -j \sin(\Omega t/2)e^{-j\phi_{\text{laser}}} & \cos(\Omega t/2) \end{pmatrix} \quad (12)$$

avec ϕ_{laser} une constante associée aux déphasages entre les deux faisceaux laser, et Ω une grandeur homogène à une pulsation qui dépend de l'intensité des faisceaux laser et du type d'atome étudié.

□ **13** – Exprimer $R(\Omega\tau)$ pour une “impulsion $\pi/2$ ”, c'est-à-dire à une impulsion laser de durée τ avec $\Omega\tau = \pi/2$. Donner également l'expression de cette matrice pour une “impulsion π ” (qui correspond à $\Omega\tau = \pi$).

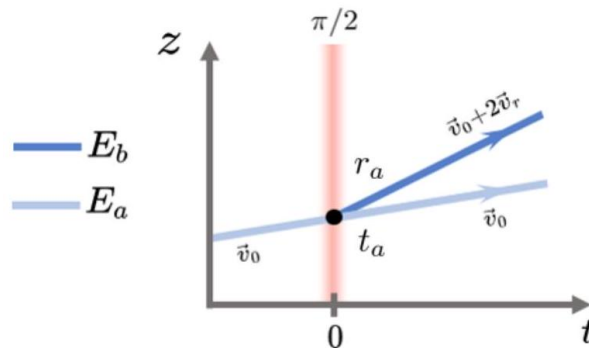


Figure 2: Trajectoire d'un atome, de vitesse initiale \vec{v}_0 , soumis à $t = 0$ à une impulsion $\pi/2$, qui sert de “séparatrice atomique”. Les coefficients r_a et t_a sont les coefficients de réflexion et de transmission de l'amplitude de probabilité associée à l'atome.

□ **14** – Initialement on a $\vec{a}(t = 0) = (1, 0)$. À $t = 0$ on soumet l'atome à une “impulsion $\pi/2$ ” de durée τ . Exprimer la fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ à l'instant $t = \tau$, et donner l'évolution de la fonction d'onde pour $t > \tau$. Montrer ainsi qu'une telle impulsion présente une analogie optique avec une lame séparatrice, comme suggéré sur la Fig. 2 où la trajectoire d'un atome est représentée. C'est pourquoi une impulsion $\pi/2$ est appelée “séparatrice atomique”.

□ **15** – Toujours dans le cas d'une “impulsion $\pi/2$ ”, exprimer $\vec{a}(\tau)$ dans le cas où on a initialement $\vec{a}(t = 0) = (0, 1)$.

□ 16 – Quel est l'élément optique analogue à une "impulsion π " ?

L'interférométrie atomique consiste à utiliser des impulsions $\pi/2$ et π pour séparer et recombiner la fonction d'onde.

1.4.3 A parte : étude d'un interféromètre optique

Nous effectuons un bref *a parte*, en étudiant un interféromètre optique. Un faisceau lumineux monochromatique (longueur d'onde λ_o , intensité I_0) est séparé en plusieurs sous-faisceaux, puis recombiné à l'aide de plusieurs lames séparatrices, comme représenté sur la Fig. 3. L'intensité lumineuse est mesurée en sortie de l'interféromètre. On supposera que les lames séparatrices réfléchissent et transmettent la moitié de l'intensité dans chaque faisceau. Pour les lames séparatrices B, C et D, il existe deux trajectoires de sortie. On ne s'intéresse qu'aux trajectoires représentées en trait plein (on ne s'intéressera pas aux trajectoires en trait pointillé).

L'indice de l'air est considéré comme égal à 1. Un des deux sous-faisceaux traverse un milieu d'indice n sur une distance l . Les longueurs AB et CD d'une part, et AC et BD d'autre part, sont identiques.

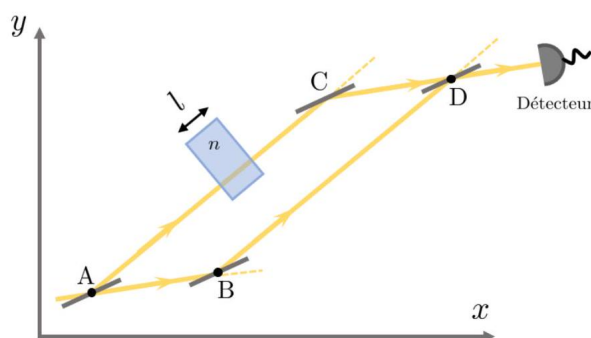


Figure 3: Schéma d'un interféromètre optique réalisé à partir de plusieurs lames séparatrices. Un des sous-faisceaux traverse un milieu d'indice n sur une distance l .

□ 17 – Exprimer l'intensité lumineuse en sortie de l'interféromètre en fonction de I_0, l, n et λ_o . Qu'observe-t-on en sortie de l'interféromètre si on change l'épaisseur l du milieu d'indice n ?

1.4.4 Principe de la mesure de m

L'interféromètre atomique de Ramsey-Bordé consiste en une série de quatre impulsions $\pi/2$ effectuées à des intervalles de temps réguliers T . Pour les deux premières impulsions, l'effet de recul est vers le haut (on transfère $+2\vec{v}_r$ à une fraction de la fonction d'onde), pour les deux dernières l'effet de recul est vers le bas (on transfère $-2\vec{v}_r$ à une fraction de la fonction d'onde). Chacune de ces impulsions joue le rôle de séparatrice atomique, comme vu précédemment. On représente sur la Fig. 4 la trajectoire d'un atome de Rubidium, de vitesse initiale \vec{v}_0 et d'état d'énergie électronique initial a , lors de leur traversée de l'interféromètre. On note $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 \exp(j(m\vec{v}_0 \cdot \vec{r} - E_1 t)/\hbar)$ la fonction d'onde initialement associée à l'atome ($t < 0$), avec E_1 est l'énergie totale de l'atome et

Ψ_0 est une constante complexe. Les trajectoires que nous considérons sont représentées en trait plein sur la figure, on ne s'intéressera pas aux trajectoires représentées en trait pointillé.

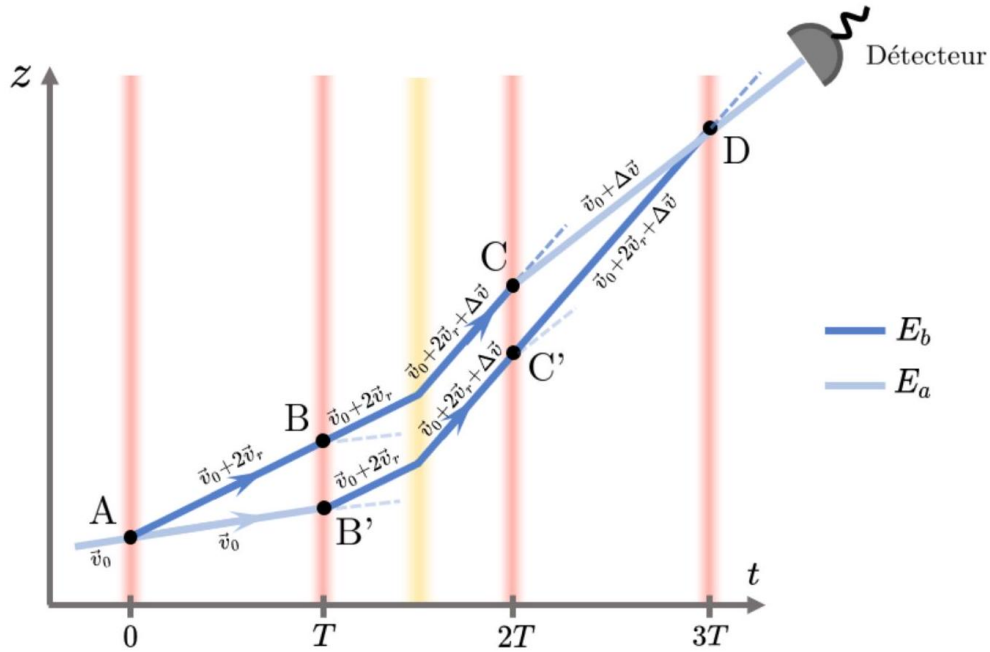


Figure 4: Interféromètre atomique de Ramsey-Bordé. Les quatre impulsions lasers Raman (à $t = 0, T, 2T$ et $3T$) servent de séparatrice atomique. Une cinquième impulsion ($T < t < 2T$), en orange, peut être utilisée pour communiquer une vitesse $\Delta\vec{v} = \Delta v \vec{e}_z$ à l'atome entre $t = T$ et $t = 2T$ (sur le schéma on a $\Delta v > 0$).

Une cinquième impulsion (pour t compris entre T et $2T$), appelée “impulsion Bloch”, a lieu à l'instant t' (avec $T < t' < 2T$) et permet d'effectuer N transitions à deux photons au cours desquelles l'état final reste le même que l'état initial (état b pour les trajectoires considérées ici). On retiendra que cette impulsion permet ainsi d'accroître la vitesse de l'atome de $\Delta\vec{v} = 2N\vec{v}_r$, où N est un nombre entier.

Comme indiqué sur la Fig. 4, on s'intéresse aux faisceaux suivant les deux trajets ABCD et AB'C'D, et recombinés en sortie de l'interféromètre. On note Φ_I , respectivement Φ_{II} , la phase cumulée par la fonction d'onde lors du trajet ABCD, respectivement AB'C'D. On mesure en sortie de l'interféromètre la probabilité de détection d'un atome. On note $\phi_{\text{laser}}(t)$ la phase des impulsions lasers $\pi/2$.

□ **18** – Exprimer l'amplitude de probabilité de présence d'un atome de Rubidium en sortie de l'interféromètre en fonction de $\Psi_0, \Phi_I, \Phi_{II}$ et des phases lasers $\phi_{\text{laser}}(t)$ à $t = 0, T, 2T$ ou $3T$. En déduire la probabilité P de détection, et montrer qu'elle est donnée par :

$$P = \frac{1}{8} |\Psi_0|^2 (1 + \gamma \cos(\Delta\Phi + \Delta\phi_{\text{laser}})) \quad (13)$$

avec $\gamma = 1, \Delta\Phi = \Phi_{II} - \Phi_I$ et $\Delta\phi_{\text{laser}} = -\phi_{\text{laser}}(0) + \phi_{\text{laser}}(T) + \phi_{\text{laser}}(2T) - \phi_{\text{laser}}(3T)$.

Il est possible de faire varier $\Delta\phi_{\text{laser}}$ en changeant la fréquence des lasers. On note $\Delta\phi_{\text{laser}} = 2\pi\delta_{\text{laser}}T$ avec δ_{laser} un paramètre pouvant être modifié expérimentalement. On présente en Fig. 5 un interférogramme expérimental typiquement obtenu en faisant varier δ_{laser} . L'Éq. (13) est valable pour décrire cet interférogramme expérimental, en prenant cependant $\gamma < 1$. La position de la frange centrale (qui correspond à $\Delta\Phi + \Delta\phi_{\text{laser}} = 0$) est repérée par le trait en pointillé gris. La valeur de δ_{laser} associée est $\delta_{\text{laser}}^* = -15\,907\,410,770 \pm 0,047$ Hz.

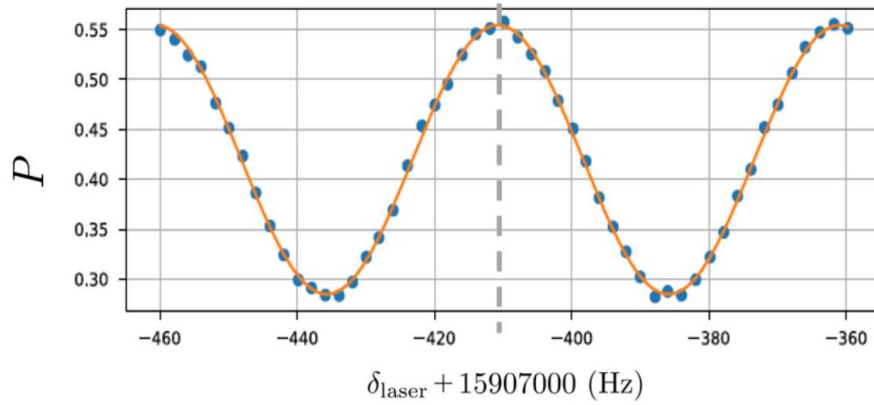


Figure 5: Interférogramme expérimental.

□ **19** – À partir de l'interférogramme expérimental présenté en Fig. 5, donner la valeur de T choisie dans l'expérience.

On cherche à relier la position de la frange centrale à la variation de vitesse $\Delta\vec{v}$ acquise par un atome.

La phase cumulée par la fonction d'onde le long de la trajectoire \mathcal{C} d'un atome est :

$$\Phi_{\mathcal{C}} = \frac{1}{\hbar} \left(\int_{\mathcal{C}} m\vec{v} \cdot d\vec{r} - \int_{\mathcal{C}} E dt \right) = \frac{1}{\hbar} \int_{\mathcal{C}} (mv^2 - E) dt \quad (14)$$

avec $v = |\vec{v}|$

□ **20** – Justifier que la phase cumulée due aux énergies potentielle E_p et électronique $E_i (i = a, b)$ est la même sur chacun des trajets ABCD et AB'C'D. En déduire que :

$$\Delta\Phi = \frac{m}{\hbar} \int_0^{3T} (\vec{v}_{II}(t) - \vec{v}_I(t)) \left(\frac{\vec{v}_I(t) + \vec{v}_{II}(t)}{2} \right) dt \quad (15)$$

où $\vec{v}_I(t)$ et $\vec{v}_{II}(t)$ sont les vitesses instantanées respectives des atomes sur les trajets ABCD et AB'C'D.

□ **21** – En exprimant dans un premier temps $\vec{v}_{II}(t) - \vec{v}_I(t)$ et $[\vec{v}_I(t) + \vec{v}_{II}(t)]/2$ sur les intervalles $[0, T]$, $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, montrer que :

$$\Delta\Phi = 2T\vec{k} \cdot \Delta\vec{v} \quad (16)$$

On se souviendra à cet effet de la relation entre \vec{v}_r et \vec{k} (Q7), et on rappelle que $\vec{k} = k\vec{e}_z$. L'interféromètre est donc sensible à la variation de vitesse selon la direction de propagation des lasers (axe (Oz) sur le schéma).

□ **22** – En déduire δ_{laser}^* , la valeur de δ_{laser} associée la frange centrale. L'exprimer en fonction de k , m et N , et d'autres constantes fondamentales éventuelles.

□ **23** – Déduire, à partir de la valeur de δ_{laser}^* associée à l'interférogramme de la Fig. 5, la valeur de N choisie lors de la mesure.

□ **24** – La fréquence $\omega/2\pi = kc/2\pi$ est mesurée avec une incertitude de 1kHz. Justifier que la mesure de δ_{laser}^* permet de mesurer m , et que l'incertitude relative sur m est environ égale à l'incertitude relative sur δ_{laser}^* , soit $u(m)/m \simeq u(\delta_{\text{laser}}^*)/\delta_{\text{laser}}^*$.

□ **25** – Un interférogramme expérimental comme celui de la Fig. 5 est typiquement obtenu en une minute. Il est possible de faire des mesures les unes à la suite des autres. Pendant combien de temps doit-on répéter l'expérience pour atteindre la sensibilité requise sur la mesure de m (donnée en Éq. (6)) ?

1.4.5 Effet systématique dû à la gravité

Dans cette section, l'énergie potentielle d'un atome n'est plus considérée comme constante au cours de la trajectoire. On cherche à estimer l'effet de la gravité sur la mesure.

Il est essentiel, dans une mesure d'une telle exactitude, d'écarter toute source d'erreur possible. L'Éq. (14) montre que l'interféromètre est sensible à la variation de vitesse des atomes. L'accélération de la pesanteur induit une variation de vitesse au cours de la propagation des atomes, qui résulte en un décalage supplémentaire des franges. Nous allons estimer cet effet. L'accélération de la pesanteur \vec{g} est portée par l'axe (Oz) et est dirigée dans le sens des z décroissants.

□ **26** – L'énergie potentielle d'un atome n'est pas constante au cours de la trajectoire. Montrer néanmoins que l'Éq. (16) reste valable lorsque le champ de pesanteur est uniforme.

□ **27** – Exprimer les vitesses $\vec{v}_I(t)$ et $\vec{v}_{II}(t)$ le long des trajets ABCD et AB'C'D en prenant cette fois en compte l'effet de la pesanteur. En déduire le déphasage $\Delta\Phi'$, et l'exprimer sous la forme

$$\Delta\Phi' = \Delta\Phi + \Delta\Phi_g \quad (17)$$

où $\Delta\Phi = 2T\vec{k} \cdot \Delta\vec{v}$ et où $\Delta\Phi_g$ est un terme à expliciter. On prend $\Delta v = 600v_r$. Calculer $\Delta\Phi_g/\Delta\Phi$, l'effet relatif du décalage des franges dû uniquement à la pesanteur et dû uniquement à la variation de vitesse Δv . L'effet de la pesanteur est-il négligeable au vu de la sensibilité requise sur la mesure ?

□ **28** – On effectue une mesure en accélérant les atomes vers le haut ($+\Delta\vec{v} = \Delta v\vec{e}_z$), puis une autre en les accélérant vers le bas ($\Delta\vec{v} = -\Delta v\vec{e}_z$). Expliquer comment ces deux mesures permettent de compenser le décalage des franges dû à la gravité.

2 Mécanismes physiques de la perception auditive

Le sens de l'audition nécessite la transformation d'une onde sonore en signal électrique qui se propage ensuite le long de voies nerveuses jusqu'au cerveau. C'est le rôle des cellules ciliées dont une image obtenue en microscopie optique est présentée en figure 6a.

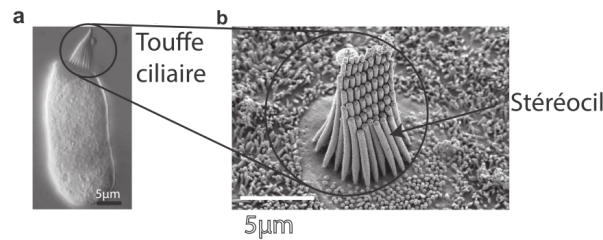


Figure 6: a : vue au microscope optique d'une cellule ciliée isolée. b : vue au microscope électronique à balayage d'une touffe ciliaire composée de stéréocils.

Plus particulièrement, cette fonction de transformation d'un signal mécanique en signal électrique est réalisée au niveau de la touffe ciliaire, qui émerge de la surface de chaque cellule ciliée pour plonger dans le fluide environnant (figure 6a). Une image de cette touffe avec un plus fort grossissement obtenue par microscopie électronique est donnée en figure 6b. On peut voir qu'elle est constituée des plusieurs "piliers" appelés stéréocils qui peuvent pivoter par rapport à leur base. Schématiquement, l'onde sonore arrivant dans l'oreille fait vibrer la membrane (dite basilaire) qui porte les cellules ciliées. Le déplacement relatif d'une cellule ciliée par rapport au fluide environnant entraîne alors une déflexion de sa touffe ciliaire qui baigne dans le fluide. Cette déflexion ouvre mécaniquement des canaux ioniques qui sont insérés dans la paroi des stéréocils (figure 7). L'onde sonore provoque donc des changements de conformations des canaux qui ne peuvent prendre que deux conformations : une conformation fermée ne laissant pas passer d'ions, ou une conformation ouverte permettant l'établissement d'un courant ionique. L'ouverture est provoquée par la déflexion des stéréocils. En s'inclinant, ceux-ci mettent sous tension un élément élastique, appelé lien de bout de cil (figure 7), qui relie le canal d'un stéréocil à un autre stéréocil.

L'objet de ce problème est la caractérisation de la réponse mécanique de ce système à un stimulus extérieur.

Dans tout le problème, on adopte la modélisation simplifiée suivante. Un canal est modélisé comme un système à 2 états : un état fermé d'énergie ϵ_F et un état ouvert et d'énergie ϵ_O . On notera $\epsilon = \epsilon_O - \epsilon_F$. La valeur absolue de l'extension spatiale selon \vec{e}_x d'un canal dans l'état ouvert sera considérée comme nulle et celle d'un canal dans l'état fermé sera notée d (voir figure 8).

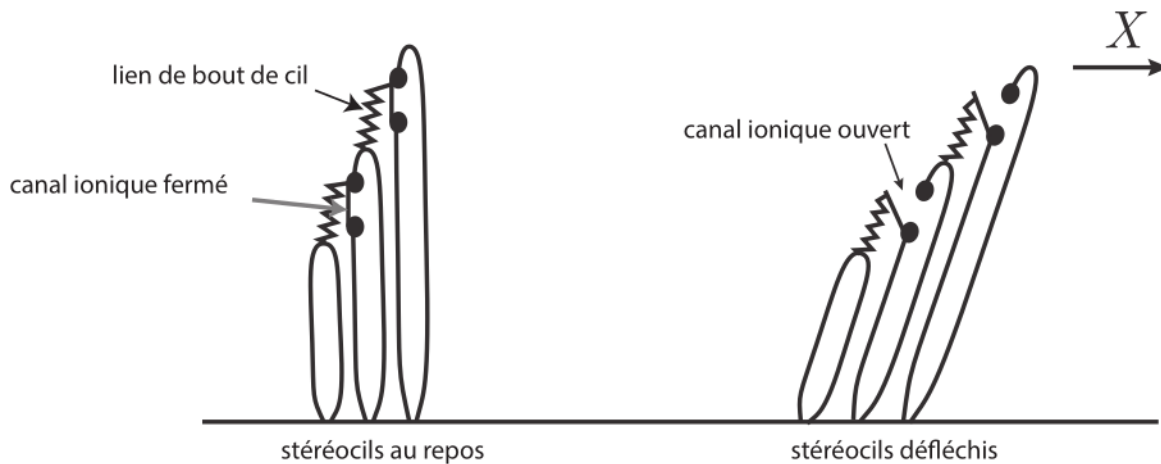


Figure 7: représentation schématique de la transduction mécano-électrique. Une déflexion de la touffe ciliaire, produite par une force extérieure dans la direction notée X , modifie la probabilité d'ouverture des canaux. Leur ouverture induit un signal nerveux par passage d'ions en solution.

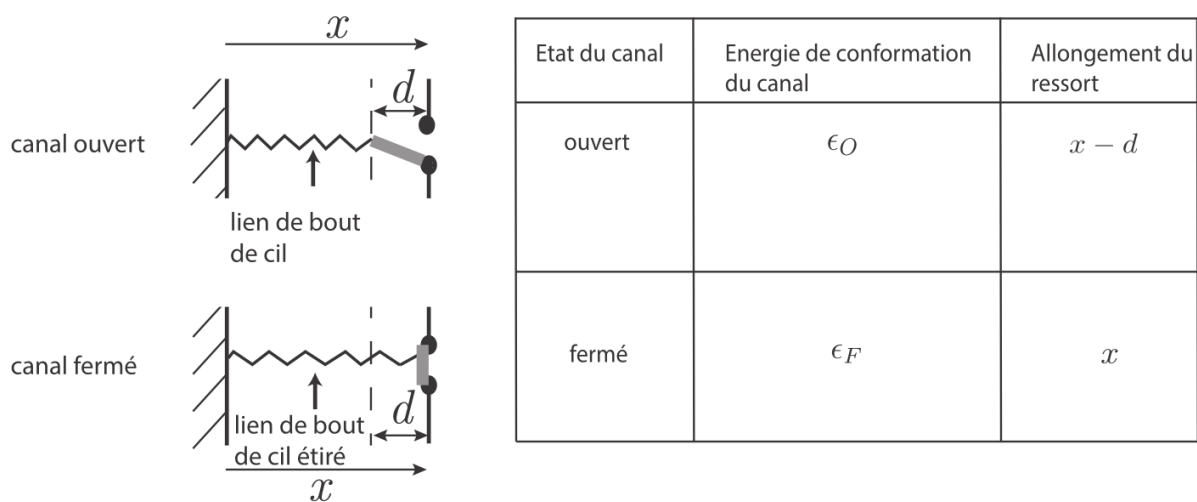


Figure 8: Modèle simplifié d'un élément constitué d'un canal (ouvert ou fermé) et du lien de bout de cil, modélisé par un ressort, qui lui est associé. Sous l'effet d'une déflexion de la touffe ciliaire les liens de bout de cil tirent sur les canaux qui peuvent être alors ouverts ou fermés (voir aussi figure 2). La variation d'allongement (en valeur absolue) d'un lien de bout de cil pour ouvrir un canal est notée d . La variable x paramétrise l'élongation totale d'un élément.

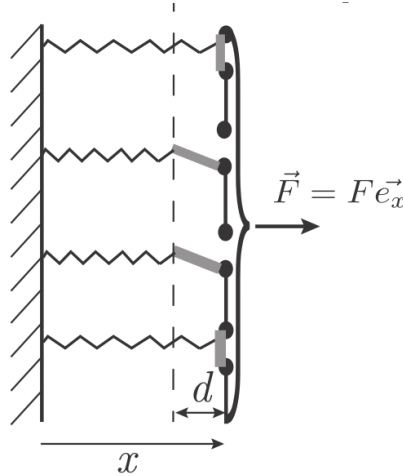


Figure 9: Modèle de Howard-Hudspeth (HH), à déplacement x imposé. Un composant rigide, auquel est appliqué une force \vec{F} , impose la même déformation x à tous les éléments. L'extension spatiale d'un canal ouvert est notée d .

On considère pour simplifier la géométrie du problème que la touffe ciliaire est constituée de N canaux en parallèle, chacun connecté à un ressort de raideur k et de longueur à vide considérée comme nulle modélisant le lien de bout de cil, et dont la déformation est selon l'axe \vec{e}_x uniquement (voir figure 9). On note x l'élongation algébrique totale d'un élément ressort + canal, appelé ci-après élément.

Dans tout le problème, les paramètres expérimentaux seront les suivants : $\epsilon = 10k_B T$, $k = 6 \cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $d = 4 \text{ nm}$ et $k_B = 1.4 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$. On se placera à température ambiante, et il pourra être utile d'utiliser la notation $\beta = 1/(k_B T)$.

2.1 Question préliminaire

□ **29** – Donner la variation d'énergie élastique d'un ressort de raideur k (supposé initialement au repos et de longueur à vide nulle) lorsqu'il subit une élongation d . Estimer sa valeur dans le cas du ressort d'un élément d'une cellule ciliée. En déduire que l'on ne peut pas se contenter d'une approche exclusivement mécanique pour décrire une touffe ciliaire, et qu'il faut prendre en compte la température.

Dans toute la suite, le système est en contact avec un thermostat imposant au système la température T , et on suppose que les N éléments en parallèle sont liés par un composant rigide qui impose la même déformation x à tous les éléments. C'est le modèle de Howard-Hudspeth (HH) (figure 9).

2.2 Statistique d'ouverture d'un canal et ordres de grandeur

□ **30** – Pour une valeur x fixée, montrer que la différence d'énergie totale $E(x) = E_O(x) - E_F(x)$ entre l'état ouvert et l'état fermé d'un élément (constitué, on le rappelle, d'un canal et du ressort associé) peut se mettre sous la forme $E(x) = -\phi(x - x_0)$, où ϕ et x_0 sont des constantes à déterminer en fonction de k , ϵ et d .

□ **31** – On suppose que l'état (ouvert ou fermé) d'un élément donné est indépendant de l'état des autres éléments. En considérant un élément unique en équilibre à la température T , déterminer la probabilité $p_O(x)$ qu'un canal donné soit ouvert. Montrer que l'on peut écrire :

$$p_O = \frac{1}{1 + e^{\Lambda(x-x_0)}} \quad (18)$$

où la constante Λ est à déterminer.

□ **32** – Représenter la fonction $p_O(x)$. Commenter les variations de cette fonction.

□ **33** – Application numérique. Quelle est l'extension x_r du ressort et la tension associée pour que $p_O = 0.5$? Calculer numériquement x_r et la tension associée à température ambiante. Pourquoi la cellule ciliée a-t-elle intérêt à imposer une tension au repos (c'est à dire en l'absence de tout stimulus sonore) proche de celle que l'on vient de calculer ?

□ **34** – Application numérique. Sachant que la géométrie du système impose qu'une déflexion X de la touffe ciliaire induit un changement d'extension $x \approx \gamma X$ dans les liens de bout de cil, donner l'ordre de grandeur des déflexions ciliaires X_0 qui induisent un changement de probabilité d'ouverture de l'ordre de 10 %. On prendra $\gamma = 0.1$.

□ **35** – On suppose qu'un canal individuel ouvert laisse passer un courant i . On applique à la touffe ciliaire une déflexion dépendant du temps sinusoïdalement, d'amplitude X_A et de moyenne x_r/γ . Tracer l'allure du courant total $I(t)$ transmis par la touffe ciliaire. On distinguera les régimes $X_A \ll X_0$ et $X_A \gg X_0$. Dans quel régime la perception du signal mécanique est-elle meilleure ?

2.3 Propriétés mécaniques de la touffe ciliaire

□ **36** – Justifier que la tension f appliquée à un ressort d'un élément donné est, à x fixé, une variable aléatoire pouvant prendre 2 valeurs. Exprimer la moyenne de f sur l'ensemble des éléments, notée $\langle f \rangle$.

□ **37** – En déduire que la force F à imposer à l'ensemble des N éléments pour maintenir une déflexion x donnée est une variable aléatoire. Exprimer sa moyenne $\langle F \rangle = \Phi(x)$. Justifier que pour $N \gg 1$, on peut négliger les fluctuations relatives de F et l'identifier à sa valeur moyenne. On supposera cela vérifié dans la suite.

□ **38** – Calculer la raideur de la touffe ciliaire, définie par $K_{HH} = d\Phi(x)/dx$, en fonction de x . On pourra remarquer que $dp_O/dx = Ap_O(1 - p_O)$, où A est une constante à déterminer.

□ **39** – Tracer la fonction $K_{HH}(x)$ et montrer qu'elle présente un minimum pour une valeur de l'extension x_{\min} que l'on précisera.

- **40** – Comparer au comportement d'un ressort de raideur constante et justifier le terme de "fenêtre d'amollissement". Expliquer en quoi une telle fenêtre d'amollissement peut être favorable pour détecter des stimuli de faible amplitude.
- **41** – Montrer que la raideur peut devenir négative pour $d \geq d_{\min}$, où d_{\min} est à déterminer. Tracer $\Phi(x)$ dans ce régime.
- **42** – On suppose $d > d_{\min}$. Si l'on considère maintenant que la force F est fixée, montrer graphiquement que pour certaines valeurs de F , le système est bistable. On justifiera graphiquement l'existence des positions d'équilibre et leur stabilité.
- **43** – On impose à la touffe ciliaire une force $F = F_0$ telle que $p_O = 0.01$. On augmente ensuite la force de manière quasi statique jusqu'à une valeur $F = F_1$ telle que $P_O = 0.99$; la force est ensuite réduite de manière quasi statique jusqu'à F_0 . Tracer le cycle réalisé par le système dans le plan (x, F) dans les cas $d > d_{\min}$ et $d < d_{\min}$. Commenter.
- **44** – On suppose la force F fixée. Justifier que l'ouverture du canal d'un élément donné induit une augmentation de la tension supportée par les éléments restant fermés. Comment varie alors leur probabilité d'ouverture ? Proposer sur cette base un mécanisme physique du phénomène de raideur négative.