

# DS5 - Corrigé Type X/ENS

## B - Capacité Énergétique des gaz $\rightarrow$ cf corrigé Minier

### A - Mesure de la constante de structure fine

On a  $\left| \frac{1}{\alpha_{th}} - \frac{1}{\alpha_{mes}} \right| = 5,6 \cdot 10^{-8}$ . L'écart normalisé

$$\text{vaut } \chi = \frac{\left| \frac{1}{\alpha_{th}} - \frac{1}{\alpha_{mes}} \right|}{\sqrt{u\left(\frac{1}{\alpha_{th}}\right)^2 + u\left(\frac{1}{\alpha_{mes}}\right)^2}} = \frac{5,6 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{(10^{-8})^2 + (3 \cdot 10^{-8})^2}} = \frac{5,6}{3,3} \approx \boxed{1,7}$$

On a  $\chi \leq 2$  donc les mesures sont compatibles avec le modèle standard.

La description de l'électron est toujours classique (il est localisé et a une vitesse bien définie) mais son énergie est quantifiée.

Le moment cinétique de l'électron est fonction de  $v_n$  et du rayon  $r_n$  de l'orbite  $L = m_e r_n v_n = n \hbar$

Or (dans le cadre d'une modélisation classique) la 2<sup>e</sup> loi de Newton appliquée à l'électron dans le référentiel lié au noyau donne :  $-m_e \frac{v_n^2}{r_n} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$

$$\Rightarrow v_n^2 \times r_n = v_n \times \frac{n \hbar}{m_e} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \text{ d'où :}$$

$$\boxed{v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n \hbar}}$$

La vitesse maximale est atteinte sur l'orbite  $n=1$  (fondamentale)

On constate alors que  $v_1 = \frac{\alpha c}{n}$  d'où  $v_1 = \frac{c}{137}$

En première approximation  $v \ll c$  et on peut effectivement

considérer l'électron comme non relativiste.

$$3. \quad E_n = \frac{1}{2} m_e v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \quad r_n = \frac{n\hbar}{m_e v_n}$$

$$= \frac{1}{2} m_e \frac{\alpha^2 c^2}{n^2} - \frac{e^2 m_e}{4\pi\epsilon_0 n \hbar} \times \frac{\alpha c}{n}$$

$$E_n = - \frac{m_e \alpha^2 c^2}{2n^2}$$

On a alors émission de photons correspondant aux transitions entre niveaux d'énergie selon la loi de Planck - Einstein:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{m_e \alpha^2 c^2}{2} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

On retrouve la loi de Rydberg avec:

$$R_{\infty} = \frac{m_e \alpha^2 c^2}{2hc} = \frac{m_e e^4}{2 \times 4 \epsilon_0^2 h^3 c} = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c}$$

$$4. \quad \text{On a vu } R_{\infty} = \frac{m_e \alpha^2 c^2}{2h} \text{ donc } \alpha = \sqrt{\frac{2hcR_{\infty}}{m_e c}}$$

L'équation à démontrer est alors immédiate.

$$5. \quad \text{Par différentielle logarithmique et formule de propagation:}$$

$$\frac{u(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{u(R_{\infty})}{R_{\infty}} \right)^2 + \left( \frac{u(m_e)}{m_e} \right)^2 + \left( \frac{u\left(\frac{h}{m_e c}\right)}{\frac{h}{m_e c}} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  est une valeur exacte (définition du mètre à partir de la seconde)

$h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  est aussi une valeur exacte (définition du kilogramme à partir du mètre et de la seconde)

$$6. \quad \text{On a alors } E_{\text{photon}} = E_i - E_a$$

7. Désormais il faut prendre en compte l'énergie cinétique de l'électron après le choc, la conservation de l'énergie s'écrit alors:

$$E_{\text{photon}} = \hbar \omega = \frac{1}{2} m \vec{v}_a^2 + E_i - E_a$$

(la vitesse de l'atome est initialement nulle si on se place dans le référentiel lié à l'atome avant l'absorption, qui a un mouvement galiléen par rapport au laboratoire donc est galiléen)

De même pour la quantité de mouvement dans ce même référentiel :

$$\hbar \vec{k} = m \vec{v}_a$$

photon avant le choc

atome après le choc

8. On a donc, en utilisant  $\omega = kc$  :

$$\begin{aligned} \hbar k c &= \frac{1}{2} m \vec{v}_a^2 + E_i - E_a \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \left( \frac{\hbar k}{m} \right)^2 + E_i - E_a \end{aligned}$$

$$\boxed{\hbar k c = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_i - E_a}$$

Cette équation se simplifie en remarquant que  $\|\vec{v}_a\| \ll c$  (atome non relativiste) donc :

$$\frac{\hbar k}{2m} \ll c$$

d'où  $\hbar k c \approx E_i - E_a$

soit  $\boxed{k \approx \frac{E_i - E_a}{\hbar c}}$

et  $\boxed{v_a = \frac{\hbar k}{m} = \frac{E_i - E_a}{m c}}$

AN:  $v_{a \rightarrow b} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \times 1.6 \cdot 10^{-19}}{1.5 \cdot 10^{-25} \times 3 \cdot 10^8} \sim 7 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$v_{a \rightarrow c} = \frac{2 \times 1.6 \cdot 10^{-19}}{1.5 \cdot 10^{-25} \times 3 \cdot 10^8} \sim 7 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

9. Transition  $a \rightarrow b$  : on transfère une quantité de mouvement faible mais on a un long temps de vie  
 $a \rightarrow c$  : plus grande quantité de mv mais temps de vie très court

10. On a désormais  $\vec{v}_a = \frac{\hbar \vec{k}_1}{m} - \frac{\hbar \vec{k}_2}{m} = \frac{\hbar}{m} \times 2 \vec{k}$

Soit  $\Delta \vec{v} = 2 \vec{v}_a$  où  $\vec{v}_a$  correspond à la transition  $a \rightarrow c$  (l'atome est déplacé vers la droite sur la figure 1b).

Alors  $k = \frac{E_c - E_a}{\hbar c} \sim 2 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

11. On a:  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$

On réinjecte l'expression de  $\psi$ :  

$$i\hbar \left( \dot{a}_1 e^{i \frac{m}{\hbar} \vec{v}_0 \cdot \vec{r}} + \dot{a}_2 e^{i \frac{m}{\hbar} (\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r) \cdot \vec{r}} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{m^2}{\hbar^2} \vec{v}_0^2 a_1 e^{i \frac{m}{\hbar} \vec{v}_0 \cdot \vec{r}} + \frac{m^2}{\hbar^2} (\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)^2 a_2 e^{i \frac{m}{\hbar} (\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r) \cdot \vec{r}} \right]$$

Soit par identification:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -i \frac{\vec{v}_0^2}{2} \frac{1}{\hbar} a_1 m \\ \dot{a}_2 = -i \frac{(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)^2}{2} \frac{1}{\hbar} a_2 m \end{cases}$$

Soit:  $\vec{a}(t) = A(t) a(0)$  avec:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(-i \frac{m \vec{v}_0^2}{2 \hbar} t\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i \frac{m (\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)^2}{2 \hbar} t\right) \end{pmatrix}$$

(Rq: on retrouve  $a_1(t) = \exp\left(-i \frac{E_{st}}{\hbar} t\right)$  comme vu dans le cours)

12. La matrice étant diagonale:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_1(\vec{r}) \cdot e^{-i \frac{m \vec{v}_0^2}{2 \hbar} t} \quad \text{soit } |\Psi_1|^2 = |\Psi|^2 \quad \forall t$$

La fonction d'onde est seulement modifiée d'un facteur de phase donc cela ne change pas l'état.

13. Alors  $\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) = \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et:

$$R(\Omega t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -j e^{i\theta_{\text{Polar}}} \\ -j e^{-i\theta_{\text{Polar}}} & 1 \end{pmatrix}$$

Pour une "impulsion  $\pi$ "  $\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) = 0$  et  $\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) = 1$

D'où  $R(\Omega t) = \begin{pmatrix} 0 & -j e^{i\theta_{\text{Polar}}} \\ -j e^{-i\theta_{\text{Polar}}} & 0 \end{pmatrix}$

14. On remarque que  $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc  $\vec{a}(z) = A(z) R(2z) \vec{a}(0)$

avec  $R(2z) \vec{a}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -j e^{-j(\frac{\pi}{2} + \phi_{\text{max}})} \end{pmatrix}$

D'où:

$$\vec{a}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp\left(-j \frac{m \vec{v}_0^2}{2\hbar} z\right) \\ \exp\left(-j \left(\frac{m(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)^2}{2\hbar} z + \frac{\pi}{2} + \phi_{\text{max}}\right)\right) \end{pmatrix}$$

(où on a utilisé  $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ )

Ainsi:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[j \left( \frac{m}{\hbar} \vec{v}_0 \cdot \vec{r} - \frac{m \vec{v}_0^2}{2\hbar} z \right)\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[j \left( \frac{m}{\hbar} (\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r) \cdot \vec{r} - \frac{m(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)^2}{2\hbar} z - \frac{\pi}{2} - \phi_{\text{max}} \right)\right] \end{aligned}$$

On a par ailleurs une évolution régie par la matrice diagonale:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A(t-z) \Psi(\vec{r}, z)$$

Donc:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[j \left( \frac{m}{\hbar} \vec{v}_0 \cdot \vec{r} - \frac{m \vec{v}_0^2}{2\hbar} t \right)\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[j \left( \frac{m}{\hbar} (\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r) \cdot \vec{r} - \frac{m(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)^2}{2\hbar} t + \frac{\pi}{2} - \phi_{\text{max}} \right)\right] \end{aligned}$$

On en conclut qu'on passe de un état stationnaire de vitesse  $\vec{v}_0$  à un état superposé entre les états  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$ , la probabilité d'aller dans chacun de ces états étant  $p_1 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$  et  $p_2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j(\frac{\pi}{2} + \phi_{\text{max}})} \right|^2 = \frac{1}{2}$

Donc le dispositif est analogue à une séparatrice mais pour des atomes: comme la vitesse de l'atome n'est pas la même

dans les états  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , on sépare le faisceau initial en deux faisceaux.

15. Un calcul analogue fournit :  $\vec{a}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp(-j(\frac{m(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)^2}{2\hbar} + \frac{\pi}{2} + \phi_{\text{ave}})) \\ \exp(-j\frac{m(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)^2}{2\hbar}) \end{pmatrix}$

16. On considère l'effet d'une impulsion  $\pi$  sur l'état  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  :

$$\vec{a}(z) = A(z) R(\Omega L) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-j(\frac{m(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)^2}{2\hbar} + \frac{\pi}{2} + \phi_{\text{ave}})) \end{pmatrix}$$

Cette impulsion fait passer le système de l'état  $\psi_1$  à l'état  $\psi_2$  donc changer l'impulsion de l'atome : elle est analogue à un miroir.

17. Chacun des deux rayons subit le même nombre de transmissions et réflexions sur les séparatrices, avec une intensité moitié dans chaque direction. Ainsi les deux faisceaux qui se recombinaient sur le détecteur ont une intensité  $\frac{I_0}{2^3} = \frac{1}{8} I_0$ . (\*,\*)

La différence de marche entre les rayons est :

$$S = (ABD) - (ACD) = (AC) - (BD) \\ = nL - L = (n-1)L$$

Par la formule de Fresnel :  $I = \frac{I_0}{8} + \frac{I_0}{8} + 2\sqrt{\frac{I_0}{8} \cdot \frac{I_0}{8}} \cos\left(\frac{2\pi S}{\lambda}\right)$

Soit :  $I = \frac{I_0}{4} \left( 1 + \cos\left(2\pi(n-1)\frac{L}{\lambda}\right) \right)$  Si on change l'intensité lumineuse, ça varie.

18. On peut remarquer dans les expressions obtenues en Q14 et Q15 que l'effet des impulsions  $\frac{\pi}{2}$  est de :

\* séparer le faisceau en deux faisceaux, la probabilité pour un atome d'aller dans chaque faisceau est  $\frac{1}{2}$

\* ajouter un déphasage lorsque la vitesse de l'atome est modifiée

En particulier on voit que:

- \* on ajoute une phase  $\Delta\phi_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\pi}{2} - \phi_{\text{aver}}$  lors du passage de l'état 1 à l'état 2 (Q14)
- \* et  $\Delta\phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{\pi}{2} + \phi_{\text{aver}}$  inversement

On en déduit le déphasage sur chacun des chemins (retard de phase)

$$\phi_{ABCD} = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}(ABCD)}_{\text{phase accumulée} = \text{retard de phase} \rightarrow -\phi_I} - \underbrace{\frac{\pi}{2} - \phi_{\text{aver}}(0)}_{\text{en A}} + \Delta\phi_{\text{Bloch}} + \underbrace{\frac{\pi}{2} + \phi_{\text{aver}}(2T)}_{\text{en C}}$$

$$\phi_{A'B'C'D'} = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}(A'B'C'D')}_{-\phi_{II}} - \underbrace{\frac{\pi}{2} - \phi_{\text{aver}}(T)}_{\text{en B}} + \Delta\phi_{\text{Bloch}} + \underbrace{\frac{\pi}{2} + \phi_{\text{aver}}(3T)}_{\text{en D}}$$

où  $\Delta\phi_{\text{Bloch}}$  est un déphasage inconnu donné par l'impulsion Bloch.

On peut appliquer le résultat de Q17 transposé à la mécanique quantique \* en remplaçant l'intensité  $I$  par  $|\psi|^2$

\* en remarquant qu'il y a une séparatrice de plus donc le  $\frac{1}{2^3}$  dans le calcul de Q17 (eq (\*)) devient un  $\frac{1}{2^4}$

Alors:

$$|\psi|^2 = P = \frac{1}{8} |\psi_0|^2 \left( 1 + \cos(\phi_{ABCD} - \phi_{A'B'C'D'}) \right)$$

Où:

$$\phi_{ABCD} - \phi_{A'B'C'D'} = \phi_I - \phi_{II} + \Delta\phi_{\text{aver}} \quad \text{avec les notations de l'énoncé}$$

Soit:

$$P = \frac{1}{8} |\psi_0|^2 \left( 1 + \cos(\Delta\phi + \phi_{\text{aver}}) \right)$$

Rq: les conventions de signe (phase ou retard de phase) pour définir  $\phi_I$  et  $\phi_{II}$  dans l'énoncé ne sont pas claires.

19. On a  $\Delta(\Delta\phi_{\text{aver}}) = 2\pi = 2\pi(f_{\text{aver}})T$  pour  $\Delta(f_{\text{aver}}) = 50\text{Hz}$

Donc  $T = \frac{1}{50\text{Hz}} = \boxed{20\text{ms}}$

20. On regarde sur chacun des deux trajets dans quel état électronique se trouve l'atome:

|               | ABCD | A'B'C'D' |
|---------------|------|----------|
| $0 < t < T$   | b    | a        |
| $T < t < 2T$  | b    | b        |
| $2T < t < 3T$ | a    | b        |

Les atomes passent autant de temps dans chacun des états donc  $\int E dt$  est la même sur les deux trajets.

Alors:

$$\Delta\phi = \underbrace{\frac{1}{\hbar} \int_0^{3T} m_0 (\vec{v}_{II}^2 - \vec{v}_I^2) dt}_{\text{phase liée à la distance parcourue (d'énergie)}} - \underbrace{\frac{1}{\hbar} \int_0^{3T} \frac{1}{2} m_0 (\vec{v}_{II}^2 - \vec{v}_I^2) dt}_{\text{phase liée à l'énergie cinétique et aux oscillations}} \quad \text{RM: } E = i\hbar \frac{d}{dt}$$

avec  $E = E_{II} + E_p + E_c$   
 $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

D'où:

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{m}{2\hbar} \int_0^{3T} (\vec{v}_{II} - \vec{v}_I) \cdot (\vec{v}_{II} + \vec{v}_I) dt} \quad \text{par identité remarquable}$$

21. On a :

| t                   | $\vec{v}_{II} - \vec{v}_I$ | $\frac{\vec{v}_{II} + \vec{v}_I}{2}$     |
|---------------------|----------------------------|------------------------------------------|
| $0 \leq t \leq T$   | $-2\vec{v}_0$              | $\vec{v}_0 + \vec{v}_0$                  |
| $T \leq t \leq t'$  | $\vec{0}$                  | $\vec{v}_0 + 2\vec{v}_0$                 |
| $t' \leq t \leq 2T$ | $\vec{0}$                  | $\vec{v}_0 + 2\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}$ |
| $2T \leq t \leq 3T$ | $2\vec{v}_0$               | $\vec{v}_0 + \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}$  |

Donc

$$\Delta\phi = \frac{m}{\hbar} \left( -2\vec{v}_0 (\vec{v}_0 + \vec{v}_0) T + 2\vec{v}_0 (\vec{v}_0 + \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}) T \right)$$

$$\Delta\phi = \frac{2m}{\hbar} T \vec{v}_0 \cdot \Delta\vec{v} \quad \text{Or } \hbar \vec{k} = m \vec{v}_0 \quad (Q7)$$

Ainsi

$$\boxed{\Delta\phi = 2T \vec{k} \cdot \Delta\vec{v}}$$

22. La frange centrale est obtenue pour un déphasage nul,  
 ainsi :  $\Delta\Phi + \Delta\phi_{\text{laser}} = 0 \Leftrightarrow 2\pi \vec{k} \cdot \Delta\vec{v} + 2\pi S_{\text{laser}} T = 0$

Soit : 
$$S_{\text{laser}} = - \frac{\vec{k} \cdot \Delta\vec{v}}{\pi}$$

Or : 
$$\Delta\vec{v} = 2N \vec{v}_x = 2N \frac{h}{m} \vec{k}$$

Donc 
$$S_{\text{laser}}^* = - \frac{2N}{\pi} \cdot \frac{h k^2}{m}$$

23. On a 
$$N = - \frac{\pi m S_{\text{laser}}^*}{2h k^2} = - \frac{\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-25} \times 1,6 \cdot 10^{-7}}{2 \times 1 \cdot 10^{-34} \times (2 \cdot 10^{-7})^2}$$

$$\approx \frac{6}{8} \cdot \frac{10^{-18}}{10^{-20}} \approx \boxed{75}$$

24.  $N$  est a priori connue exactement et  $m = - \frac{2N h}{\pi} \cdot \frac{k^2}{S_{\text{laser}}^*}$   
 soit 
$$m = - \frac{8N \pi h}{c^2} \times \frac{k^2}{S_{\text{laser}}^*} \Rightarrow \frac{u(m)}{m} = \sqrt{\left(\frac{2u(f)}{f}\right)^2 + \left(\frac{u(S_{\text{laser}})}{S_{\text{laser}}}\right)^2}$$

ici 
$$\frac{u(S_{\text{laser}})}{S_{\text{laser}}^*} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^7} \sim 2 \cdot 10^{-9}$$

$$\frac{u(f)}{f} = \frac{u(\lambda)}{\frac{hc}{2\pi}} = \frac{210 \times 10^3}{2 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^8} \sim 10^{-12}$$

Donc l'incertitude sur  $S_{\text{laser}}^*$  est dominante et

$$\frac{u(m)}{m} \sim \frac{u(S_{\text{laser}}^*)}{S_{\text{laser}}^*}$$

25. Il faut, avec  $n$  le nombre d'expériences indépendantes :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{u(S_{\text{laser}}^*)}{S_{\text{laser}}^*} = \left(\frac{u(m)}{m}\right)_{\text{requis}} = 1,5 \cdot 10^{-10}$$

Soit  $n \approx \left(\frac{2 \cdot 10^{-9}}{1,5 \cdot 10^{-10}}\right)^2 \approx 200$  soit  $\Delta t = 200 \text{ ms}$

Il faut répéter l'expérience environ 3 heures, c'est faisable.

26. Si le champ de pesanteur est uniforme, les nouvelles vitesses sont :

$$\begin{cases} \vec{v}_I' = \vec{v}_I + \vec{g} t \\ \vec{v}_{II}' = \vec{v}_{II} + \vec{g} t \end{cases}$$

D'où :  $\vec{v}_{II}' - \vec{v}_I' = \vec{v}_{II} - \vec{v}_I$

De plus on a 
$$\begin{cases} z_{II}' = z_{II} + g \frac{t^2}{2} \\ z_I' = z_I - g \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Donc  $E' = E - m g \times g \frac{t^2}{2} = E - \frac{(gt)^2 m}{2}$

$\Phi_{II} - \Phi_I$  est ainsi toujours la même expression puisque les deux termes d'énergie potentielle se compensent.

27. On a vu que désormais il faut ajouter  $\vec{g}t$  à chaque vitesse :

|                                        | $[0, T]$                           | $[T, t]$                            | $[t, 2T]$                                       | $[2T, 3T]$                                     |
|----------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\vec{v}_{II}' - \vec{v}_I'$           | $-2\vec{v}_R$                      | $\vec{0}$                           | $\vec{0}$                                       | $2\vec{v}_R$                                   |
| $\frac{\vec{v}_{II}' + \vec{v}_I'}{2}$ | $\vec{v}_0 + \vec{v}_R + \vec{g}t$ | $\vec{v}_0 + 2\vec{v}_R + \vec{g}t$ | $\vec{v}_0 + 2\vec{v}_R + \vec{v}_0 + \vec{g}t$ | $\vec{v}_0 + \vec{v}_R + \vec{v}_0 + \vec{g}t$ |

Alors on a un terme supplémentaire lié au terme  $\vec{g}t$  :

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_g &= \frac{m}{\hbar} \times \left( \int_0^T \vec{g}t \cdot (-2\vec{v}_R) dt + \int_{2T}^{3T} \vec{g}t \cdot 2\vec{v}_R dt \right) \\ &= \frac{m}{\hbar} \times 2\vec{g} \cdot \vec{v}_R \left( -\frac{T^2}{2} + \frac{3T^2}{2} - \frac{4T^2}{2} \right) \\ &= -g \times v_R \quad \text{car } \vec{g} = -g \vec{e}_z \end{aligned}$$

$\Delta \Phi_g = - \frac{4gT^2 m v_R}{\hbar}$  On a vu  $\Delta \Phi = 2T \hbar \Delta v$

$$\Rightarrow \frac{|\Delta \Phi_g|}{\Delta \Phi} = \frac{4gT^2 m v_R}{2T \hbar \Delta v} \approx \frac{m g T}{300 \hbar} \approx \frac{1,5 \cdot 10^{-25} \cdot 10 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{300 \cdot 2 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{-34}}$$

$$\approx \frac{3 \cdot 10^{-26}}{6 \cdot 10^{-25}} \sim 0,05 \sim 5\%$$

Ce n'est pas du tout négligeable, puisqu'on veut une précision de l'ordre de  $10^{-9}$  sur  $S_{\text{class}}$ .

28. On a  $\Delta\Phi_g$  constant

mais  $\Delta\Phi = 2\pi k \Delta v$

Donc  $\Delta\Phi = \Delta\Phi_g + 2\pi k \Delta v$

En faisant la différence des déphasages obtenus par les 2 expériences on aura :

$$\Delta\Phi_+ - \Delta\Phi_- = \Delta\Phi_g + 2\pi k \Delta v - (\Delta\Phi_g - 2\pi k \Delta v)$$

$$= 2 \times \Delta\Phi$$

On peut donc retrouver  $\Delta\Phi = \frac{\Delta\Phi_+ - \Delta\Phi_-}{2}$

en s'affranchissant de la gravité.

## II - Mécanismes physiques de la perception auditive

29. L'énergie d'un ressort d'élongation  $d$  est  $\frac{1}{2} k d^2$ .

Ici  $E_p \sim \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 16 \cdot 10^{-18} \sim 48 \cdot 10^{-22} \text{ J}$

Soit  $\frac{E_p}{k_B T} \sim \frac{5 \cdot 10^{-21}}{300 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23}} \sim 1$

$E_p$  est de l'ordre de  $k_B T$  donc les fluctuations d'énergie vont être de l'ordre de l'énergie potentielle : on doit utiliser la physique statistique.

30. On a  $E_0(x) = \underbrace{E_0}_{\text{énergie du canal}} + \frac{1}{2} k (x-d)^2$

$$E_F(x) = E_F + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\begin{aligned} E(x) = E_0(x) - E_F(x) &= E_0 - E_F + \frac{1}{2} k (2x - d) \cdot (-d) \\ &= E - k d \left( x - \frac{d}{2} \right) \end{aligned}$$

Soit  $E(x) = -\Phi(x-x_0)$  où  $\Phi = kd$  et  $x_0 = \frac{d}{2} + \frac{E_f}{kd}$

31. Par la loi de Boltzmann, en considérant les éléments indépendants :

$p_0 = K e^{-\beta E_0(x)}$   $p_F = K e^{-\beta E_F(x)}$  où  $K$  est à déterminer.

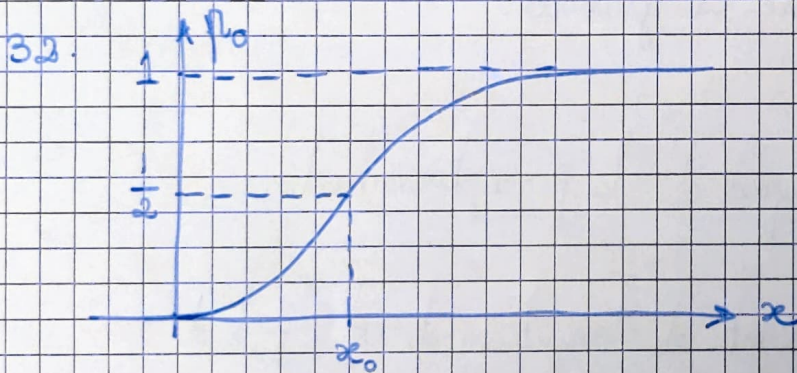
Or :  $p_0 + p_F = 1$  donc :

$$\frac{1}{K} = e^{-\beta E_0(x)} + e^{-\beta E_F(x)} = e^{-\beta E_0(x)} (1 + e^{-\beta(E_F - E_0)})$$

$$= e^{-\beta E_0(x)} (1 + e^{-\beta \Phi(x-x_0)})$$

Soit :  $p_0 = \frac{1}{1 + e^{\Lambda(x-x_0)}}$  où  $\Lambda = -\beta \Phi = -\beta kd$

$\Delta$  ici  $\Lambda < 0$  !



Si  $x$  est faible l'ouverture du canal ne libère pas d'énergie élastique et n'est pas possible car l'agitation thermique est insuffisante ( $E \sim 10 k_B T$ )

Si  $x$  est élevé, alors l'ouverture est favorisée car elle libère plus d'énergie élastique que l'énergie  $E$  nécessaire pour ouvrir le canal.

33. On a  $x_s = x_0 = \frac{d}{2} + \frac{E_f}{kd} \sim 20 \text{ nm}$

Alors  $T = kx_s \sim 10 \text{ pN}$

On voit que le maximum de sensibilité  $\frac{dp_0}{dx}$  est maximal pour  $x = x_0$ , donc c'est là que la sensibilité sera maximale : une petite perturbation sonore, en agissant sur  $x$ , va ouvrir et fermer un grand nombre de cis.

34. On a  $dp_0 = -\frac{\Lambda e^{\Lambda(x-x_0)}}{(1 + e^{\Lambda(x-x_0)})^2} dx$   $\Big|_{x=x_0} = -\frac{\Lambda dx}{4} = -\frac{\Lambda d}{4}$

Donc si  $\Delta p_0 = 0.1$  on doit avoir des perturbations de l'ordre de:  $X_0 = -\frac{0.1 \times 4}{\gamma \Lambda} = +\frac{4}{3 \text{ rad}} \approx \boxed{8 \text{ mm}}$

35. On a un nombre d'éléments ouverts  $N_0 = N p_0$

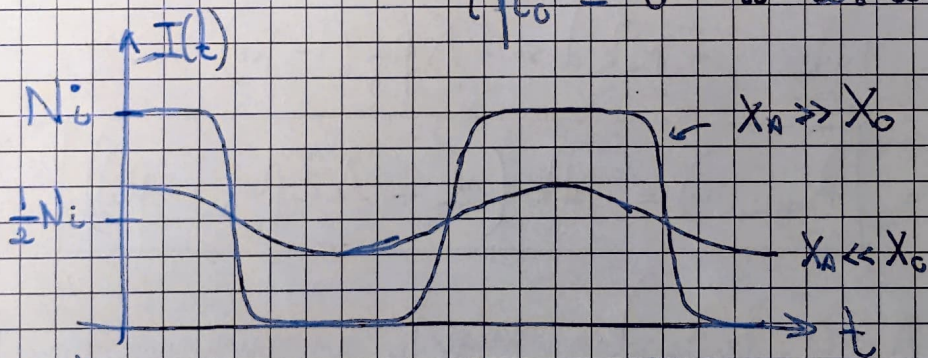
donc  $I(t) = iN \times p_0 = \frac{N i}{1 + e^{\Lambda(x-x_0)}}$

avec  $x(t) = \gamma \left( \frac{x_0}{\gamma} + X_A \cos \omega t \right) = x_0 + \gamma X_A \cos \omega t$

Soit:  $I(t) = \frac{N i}{1 + e^{\Lambda \gamma X_A \cos \omega t}}$

Si  $X_A \ll X_0$  l'expression se linéarise et on a une sinusoïde.

Si  $X_A \gg X_0$  on aura  $\begin{cases} p_0 \approx 1 & \text{si } \cos \omega t \geq 0 \\ p_0 \approx 0 & \text{si } \cos \omega t \leq 0 \end{cases}$



La situation  $X_A \ll X_0$  est linéaire et ne déforme pas le signal, dans le second cas on rajoute des harmoniques (signal carré) ce qui modifie le timbre du son perçu.

36. Le canal est soit ouvert, soit fermé donc  $f$  ne peut prendre que 2 valeurs à l'équilibre:  $\begin{cases} f_F = kx & \text{si le cil est fermé} \\ f_0 = k(x-d) & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi:

$$\langle f \rangle = p_0 f_0 + p_F f_F = (p_0 + p_F) kx - kd p_0$$

$$\langle f \rangle = kx - \frac{kd}{1 + e^{\Lambda(x-x_0)}}$$

37. On a  $F = \sum_{i=1}^N f_i$  la force du cil  $i$

C'est une somme de variables aléatoires indépendantes donc une variable aléatoire telle que:

$$\langle F \rangle = N \langle f \rangle \Rightarrow \Phi(x) = N k x - \frac{N k d}{1 + e^{\Lambda(x-x_0)}}$$

$$\text{Et } \text{Var}(F) = \Delta F^2 = N \Delta f^2 \Rightarrow \left[ \frac{\Delta F}{F} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \right] \text{ donc}$$

les variations relatives de  $F$  sont négligeables pour  $N$  grand.

38. On a vu en Q34:  $\frac{d p_0}{d x} = -\Lambda \times \frac{1}{1 + e^{\Lambda(x-x_0)}} \times \frac{e^{\Lambda(x-x_0)}}{1 + e^{\Lambda(x-x_0)}}$

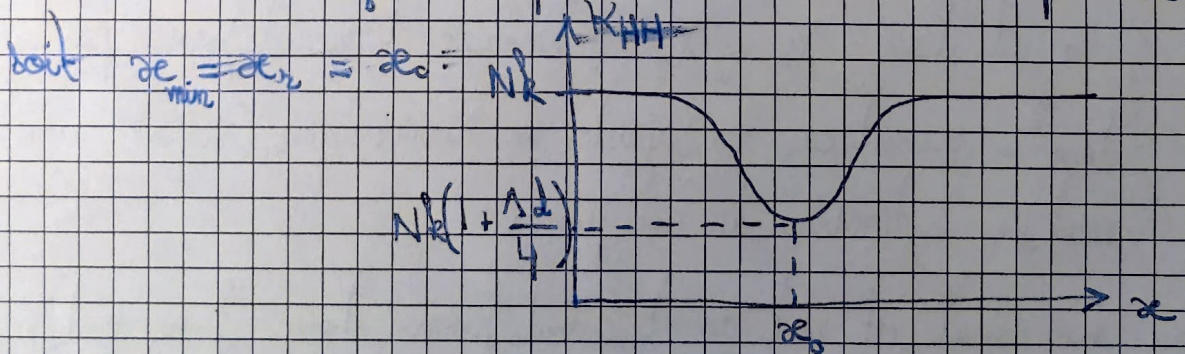
soit  $\frac{d p_0}{d x} = -\Lambda p_0 (1 - p_0)$ .

Alors:

$$\frac{d \Phi}{d x} = N k - N k d \times -\Lambda p_0 (1 - p_0)$$

$$\frac{d \Phi}{d x} = \left[ K_{HH}(x) = N k \left( 1 + \Lambda d p_0 (1 - p_0) \right) \right] \quad (\text{avec } \Lambda \leq 0)$$

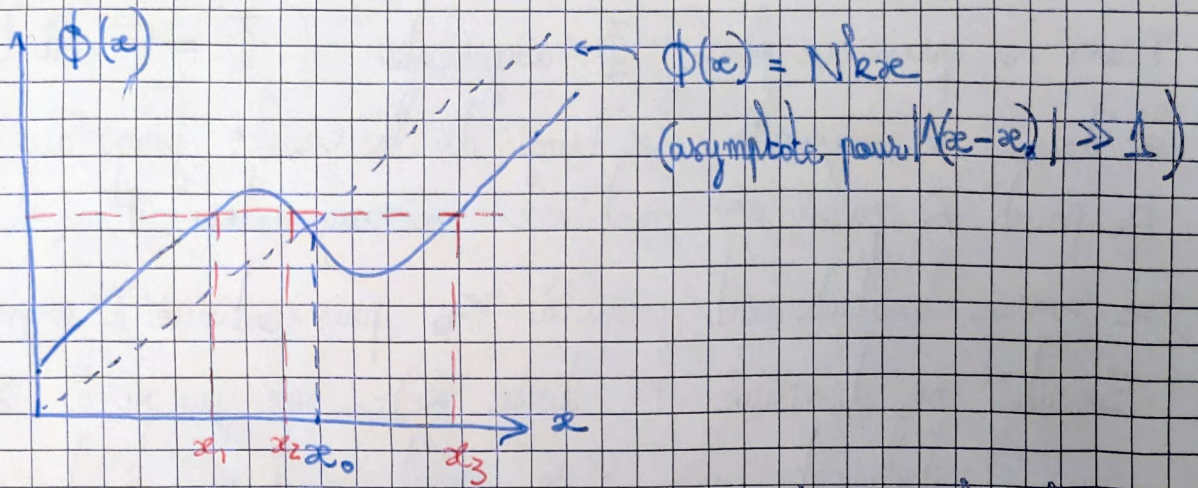
39. Comme  $\Lambda < 0$  la fonction présente un minimum en  $p_0 = \frac{1}{2}$



41. Dans ce cas on peut avoir une raideur négative si  $\frac{\Lambda d}{4} \leq -1$

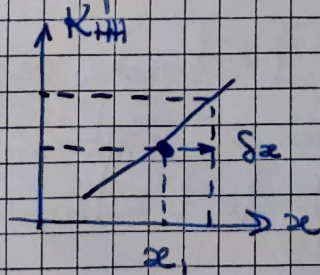
soit  $\frac{3 k d^2}{4} \geq 1 \Leftrightarrow d \geq d_{\min} = 2 \sqrt{\frac{k_B T}{k}}$

Dans ce cas  $\Phi(x)$  présente localement une pente négative:



4.2. Pour une valeur de force imposée, on a trois elongations solutions  $x_1, x_2$ , et  $x_3$  (cf partie en rouge du schéma).

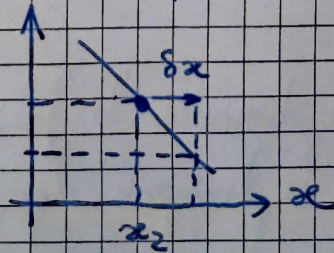
- Solution  $x_1$  : si on augmente un peu  $x$ , la force de rappel augmente (le ressort est plus raide) donc on va faire diminuer  $x$  à nouveau, c'est un équilibre stable.
- De même,  $x_3$  est stable.
- En revanche pour  $x_2$  c'est le contraire : c'est un équilibre instable.



Si  $\delta x \geq 0$  :

$$K_{HH}(x_1 + \delta x) > K_{HH}(x_1)$$

Donc le ressort va avoir tendance à faire diminuer  $\delta x$



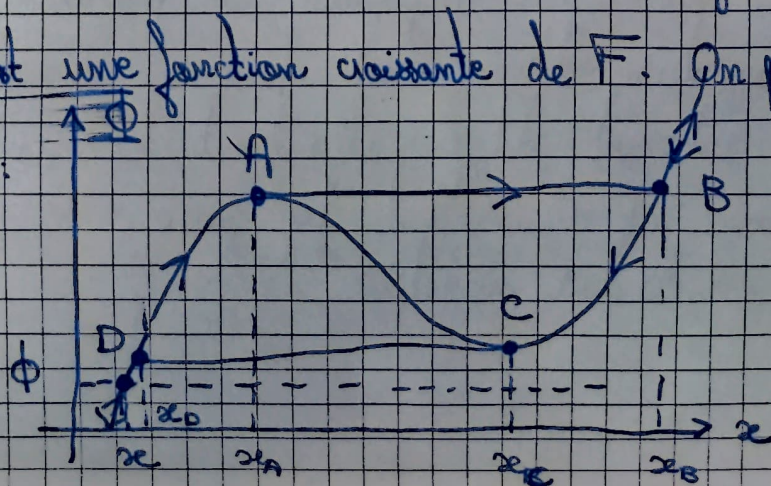
Si  $\delta x \geq 0$  :

$$K_{HH}(x_2 + \delta x) \leq K_{HH}(x_2)$$

Donc le ressort sera moins raide et  $\delta x$  va augmenter.

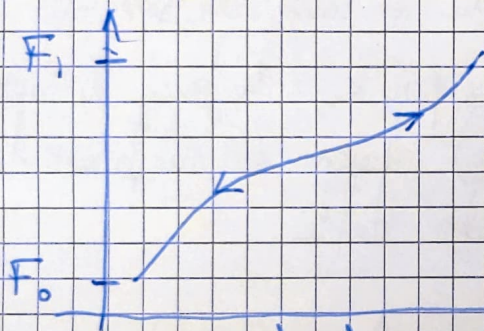
complètement hors programme

4.3.  $f_0$  est une fonction croissante de  $F$ . On peut remarquer que :  
Si  $d > d_{\min}$  :

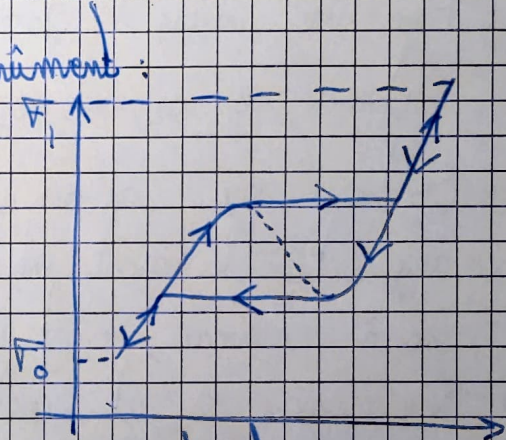


Dans une première phase  $\Phi$  augmente ( $\Phi = F$  à l'équilibre) et donc  $x$  augmente le long de la courbe jusqu'au point A. Au point A puisqu'on continue à augmenter  $F$  (et donc  $\Phi$ )  $x$  varie brutalement jusqu'à  $x_0$  puis continue à augmenter. Ensuite on diminue  $F$ , donc  $x$  diminue jusqu'à  $x_0$  puis varie brutalement jusqu'à  $x_0$  et continue à diminuer.

Cas  $d < d_{\min}$ :  $x$  varie continûment:



$d < d_{\min}$



$d > d_{\min}$

(la branche en pointillés est instable)

On a un phénomène dit d'hystérésis, c'est-à-dire que la valeur de  $x$  à un instant donnée dépend de l'histoire du système ( $F(t')$  pour  $t' < t$ ).

44. Si on ouvre un canal, on diminue la force totale brutalement. Un équilibre va se faire et la tension des autres câbles va alors augmenter. Ceci va augmenter leur probabilité d'ouverture. Donc l'ouverture d'un canal favorise l'ouverture d'autres canaux, autrement dit en allongeant les ressorts on ouvre des canaux et on réduit la force, ce qui correspond bien à une raideur négative.