

# Correction - DS5 Type CCINP

## A - Physique quantique au laboratoire

1. Par la loi de Planck - Einstein l'énergie d'un photon est  $E = \frac{hc}{\lambda}$ .

La quantité de mouvement se trouve par la relation de De Broglie  $\lambda = \frac{h}{p} \Leftrightarrow p = \frac{h}{\lambda}$ . Les photons se propagent selon  $\vec{e}_z$  donc  $\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{e}_z$ .

2.  $E = \frac{hc}{\lambda} \times \frac{1}{e}$  (en eV)

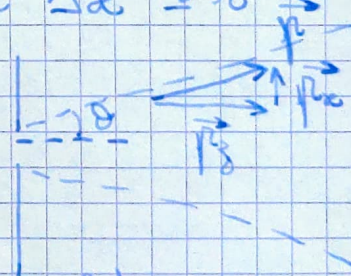
$$= \frac{7 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx \frac{7 \cdot 3}{8} \approx \boxed{3 \text{ eV}}$$

3. D'après l'inégalité de Heisenberg :  $\Delta x \times \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

Soit  $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \approx \frac{\hbar}{2r_0}$  avec  $\Delta x \approx r_0$

L'ouverture angulaire  $\theta$  vérifie alors :

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{\Delta p_x}{p_z}$$



On remplace les résultats de Q1 et l'inégalité de Heisenberg :

$$\theta \geq \frac{\hbar}{2r_0} \times \frac{r_0}{\hbar} = \boxed{\frac{r_0}{4\hbar r_0}}$$

Autrement dit  $\theta$  est de l'ordre de  $\frac{\lambda}{r_0}$  : ceci correspond au phénomène de diffraction.

4. On peut citer l'effet photoélectrique.

5. Pour avoir un effet photoélectrique, le photon doit avoir une énergie suffisante pour extraire l'électron, ainsi il faut que  $E \geq W_e$ . Or,  $E \approx 3 \text{ eV}$ .  
 Donc on peut observer l'effet photoélectrique pour le césium, le sodium et le potassium (Cs, Na et K).

la conservation de l'énergie s'écrit :

$$E_{\text{photon}} = W_e + \frac{1}{2} m_e v^2 \quad \leftarrow \text{vitesse des électrons}$$

la vitesse maximale est atteinte pour le Césium :

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{m_e} (E_{\text{photon}} - W_e)} = \sqrt{\frac{2}{1,6 \cdot 10^{-30}} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times (3 - 1,5)}$$

$$\approx \sqrt{6 \cdot 10^{-11}} \approx \boxed{8 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

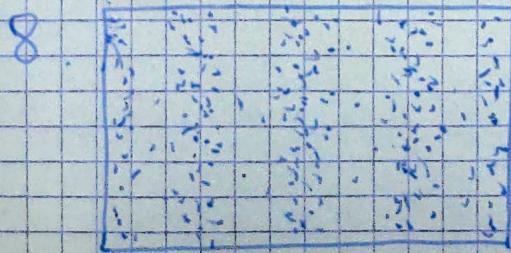
6.  $1 \text{ mW} = 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$  donc le nombre de photons émis en une seconde est :

$$N = \frac{10^{-3} \text{ J}}{E} = \frac{10^{-3}}{3 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx \frac{10^{16}}{5} = \boxed{2 \cdot 10^{15} \text{ photons} \cdot \text{s}^{-1}}$$

7. Il faudrait  $N' = 1 \text{ photon} \cdot \text{ps}^{-1} = 10^{12} \text{ photons} \cdot \text{s}^{-1}$

Soit  $\frac{N'}{N} = \frac{10^{12}}{2 \cdot 10^{15}} = 5 \cdot 10^{-4}$  ainsi on a besoin d'une puissance  $5 \cdot 10^{-4}$  fois plus faible :

$$P' = 5 \cdot 10^{-4} P = \boxed{0,5 \text{ } \mu\text{W}}$$



8. Chaque photon crée un point sur l'écran et la densité de points dessine petit à petit des franges correspondant à des interférences d'ondes de matière, si on augmente le temps d'observation.

9. La densité de points sur l'écran peut être considérée proportionnelle à la densité de probabilité de présence d'un photon. La

densité de probabilité  $|\Psi|^2 = p$  n'obéit pas au principe de superposition mais c'est le cas de l'amplitude de probabilité (ou fonction d'onde)  $\Psi$ .

10. Formule de De Broglie:  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

quantité de mouvement  $\rightarrow$ 
masse  $\uparrow$ 
vitesses  $\leftarrow$

Un faisceau accéléré par une différence de potentiel a une vitesse  $v$  telle que:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{énergie cinétique après accélération}} = \underbrace{e \times U}_{\text{énergie potentielle électrostatique avant accélération}}$$

Donc  $p = \sqrt{2 m e U}$

Et  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m e U}} \approx \frac{7 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 16 \cdot 10^{-19} \times 10^{-30} \times 10^2}} = \frac{7}{\sqrt{320}} \cdot 10^{-10}$

$\approx 3$

Soit  $\lambda \approx 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

11.  $\lambda_{\text{électron}} \approx 10^{-10} \text{ m}$  est bien plus petite que la longueur d'onde du visible donc on voit des objets plus petits avec (on n'est pas limité par la diffraction).

12. Le théorème d'équipartition de l'énergie stipule que dans un système classique à l'équilibre thermique, la contribution de chaque degré de liberté quadratique à l'énergie totale est  $\frac{1}{2} k_B T$ .

Dans un gaz il y a trois degrés de liberté correspondant à un terme quadratique d'énergie:  $E_c = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$

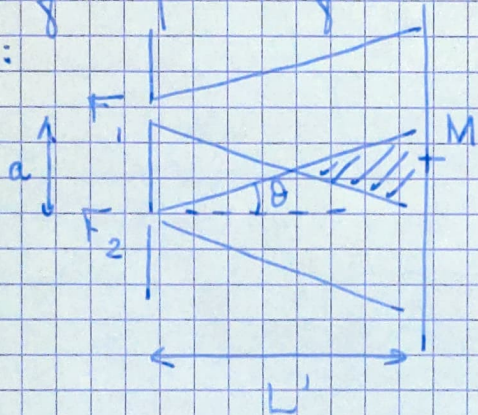
D'où:  $\frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow u = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$

On a ainsi  $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$  ← masse molaire

Sachant:  $u_{He} \approx \sqrt{\frac{3 \times 8 \times 3 \cdot 10^2}{4 \cdot 10^{-3}}} \sim \sqrt{2 \cdot 10^6} \sim \boxed{1400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

$u_{Ne} \approx \sqrt{\frac{3 \times 8 \times 2,5 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-3}}} \sim \sqrt{3} \sim \boxed{1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

13. Il faut vérifier que les faisceaux des deux fentes se recroisent :



Pour cela il faut que la zone hachurée existe donc que  $\tan \theta \geq \frac{a/2}{L'}$ .  
Or  $\tan \theta \approx \theta \approx \frac{\lambda}{\epsilon}$ .

On doit donc avoir  $\frac{\lambda}{\epsilon} \geq \frac{a}{2L'} \Leftrightarrow 2L'\lambda \geq a\epsilon$

Or:  $2L'\lambda \approx 2 \times L' \times \frac{h}{m u} \approx 2L' \cdot \frac{h v_0}{M u}$

Dans le cas le plus restrictif (Hélium à 295 K):  $u \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$2L'\lambda \approx 2 \times 0,64 \times \frac{7 \cdot 10^{-34} \cdot 6 \cdot 10^{23}}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,4 \cdot 10^3} \approx 12 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$

Et  $a\epsilon \approx 8 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \approx 8 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$

La condition est bien vérifiée et il existe des points de l'écran où deux chemins sont possibles pour les ondes de probabilité de présence.

14. Il s'agit d'interférences d'ondes de probabilité de présence associées aux atomes d'hélium.

15. L'interfrange est donné par:  $i = \frac{\lambda_{ds} \times L'}{a} = \frac{h L'}{m u a}$

À  $T = T_1$  on a vu que  $2L'\lambda \approx 12 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$

D'où:  $i \approx \frac{\frac{1}{2} 12 \cdot 10^{-11}}{8 \cdot 10^{-6}} \approx \boxed{7 \mu\text{m}}$

À  $T = T_2$  on a :

$$i = \frac{\lambda \cdot L'}{a} = \frac{h \lambda c N_A}{M u a} \sim \frac{6 \cdot 10^{-34} \cdot 0,64 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{4 \cdot 10^{-23} \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} \\ \sim \frac{6}{16} \cdot 10^{-4} \text{ m} \sim \boxed{40 \mu\text{m}}$$

16. On mesure  $i = \frac{h D c N_A}{M u a}$  d'où :

$$u = \frac{h D c N_A}{M a i} \sim \frac{7 \cdot 10^{-34} \cdot 0,85 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}} \sim \frac{7 \cdot 0,85}{2} \sim \boxed{3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

17. On étudie le système {un atome} soumis uniquement à son poids : son énergie mécanique est conservée.

D'où :  $\frac{1}{2} m v^2 = m g \cdot d$

Ainsi  $v = \sqrt{2 g d} = \sqrt{2 \times 10 \times 3,5 \cdot 10^{-2}} = \sqrt{\frac{7}{10}}$

$\boxed{v \approx 0,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$  au niveau des fentes.

Au niveau du détecteur :

$$u \approx \sqrt{2 g (d + D)} = \sqrt{2 \times 10 \times 0,85} = \sqrt{17} \approx \boxed{4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

On retrouve bien le résultat de Q16 (avec erreurs de calcul près).

18. Si on avait pris des atomes moins froids, la vitesse d'agitation thermique aurait largement dépassé celle acquise par le champ de pesanteurs, elle aurait été de l'ordre de  $10^2 - 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### B - Considérations sur une raie spectrale

19. Par conservation de l'énergie lors de la désexcitation :

$$\underbrace{E^*}_{\text{énergie avant}} = \underbrace{E + E_{\text{photon}}}_{\text{énergie après émission}}$$

Et  $E_{\text{photon}} = h\nu = \hbar\omega$  par la loi de Planck-Einstein

Donc: 
$$\boxed{\omega = \frac{E^* - E}{\hbar}}$$

## 1 - Oscillations au sein de l'atome de Thomson

20. On a une charge totale  $+e$  dans la boule, et son volume est  $\frac{4}{3}\pi a^3$  donc  $e = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$  soit:

$$\boxed{\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}}$$

21. La distribution de charges est invariante par rotation d'angle  $\theta$  et  $\varphi$ , donc les composantes de  $\vec{E}$  ne dépendent que de  $r$ .  
De plus tout plan contenant (OM) est plan de symétrie de la distribution de charges donc  $\vec{E}(M)$  est contenu dans tous ces plans et: 
$$\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r}$$

22. On applique le théorème de Gauss à la sphère de centre O et de rayon  $r$ , qui a une charge intérieure:

$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \left(\frac{r}{a}\right)^3 \times e$$

Et le flux de  $\vec{E}$  à travers la sphère est  $\Phi = 4\pi r^2 E_r(r)$ .

D'où:  $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  soit:

$$E_r(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r}$$

23. L'électron ressent la force  $\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E}$  soit:

$$\vec{F} = -\frac{\rho e}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r \quad \text{soit} \quad \vec{F} = -m_e \omega_0^2 \vec{OM}$$

avec  $\vec{OM} = r \vec{e}_0$  et

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho e}{3m\epsilon_0}}}$$

Cette force correspond à la force de rappel d'un ressort.

24.  $\frac{1}{\epsilon}$  et  $\omega_0$  ont même unité donc  $\epsilon$  est un temps qui s'exprime en s.

25. On applique le PFD à l'électron dans le référentiel lié à la sphère chargée positivement, supposé galiléen. L'électron est soumis à :

\* La force de rappel électrostatique  $\vec{F} = - m_e \omega_0^2 \vec{r}$

\* La force de frottement fluide  $\vec{F}_f = - \frac{m_e}{\epsilon} \frac{d\vec{r}}{dt}$

Alors :

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{m_e}{\epsilon} \frac{d\vec{r}}{dt} - \omega_0^2 m_e \vec{r}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0}}$$

Il s'agit d'un système d'ordre 2, de facteur de qualité

$Q = \epsilon \times \omega_0 \gg 1$ , la solution s'écrit :

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q} t} \sin(\Omega t + \varphi)}$$

avec  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$

26. Cette instruction retourne un tableau `tab1` contenant les positions  $s(t)$  à 3 instants, estimées à l'aide de la méthode d'Euler.

27.  $i = 0$   
while  $i < N$ :  
     $i += 1$

[lignes 14-19 inchangées]

28. On compte 19 oscillations en 40s soit  $T = \frac{40}{19} \sim 2s$ .  
 Et  $\omega = \frac{2\pi}{T} \sim \boxed{3 \text{ rad} \cdot s^{-1}}$   
 (en supposant que l'axe des abscisses est en unité SI)

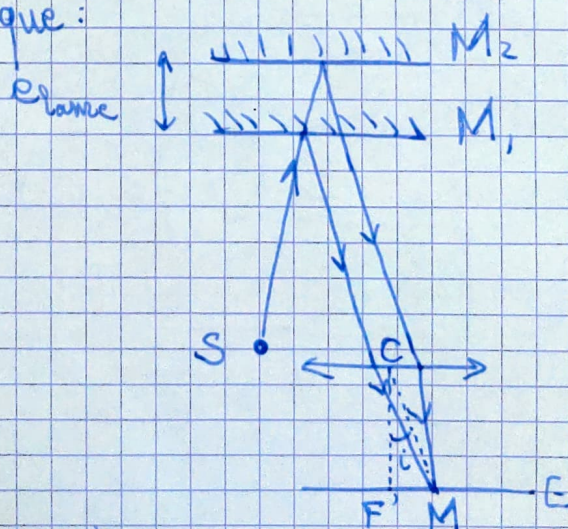
29. Dans la solution avec la méthode d'Euler:

- \* l'enveloppe n'a pas l'air d'être exponentielle;
- \* le temps de décroissance de l'enveloppe n'est pas le même que pour la solution réelle alors que  $\lambda$  n'a pas changé et que ce temps ne dépend que de  $\lambda$ .

Donc la méthode d'Euler n'est pas satisfaisante.

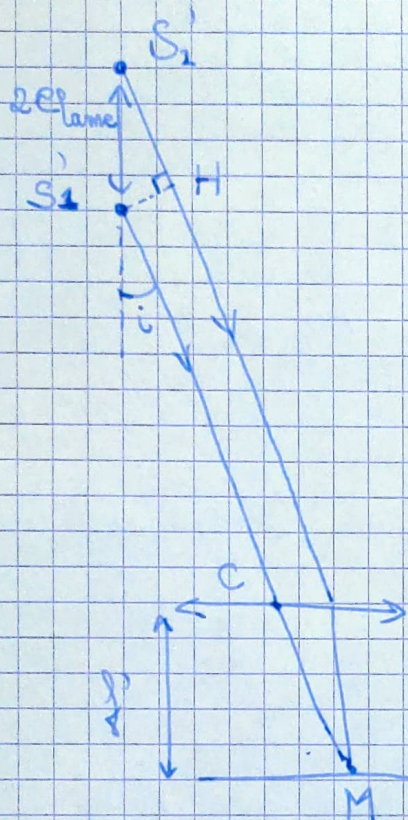
## 2 - Mesure interférométrique de la durée d'un train d'onde

30. On peut faire l'image de la source et du miroir  $M_2$  par la séparatrice pour obtenir un schéma équivalent sur un unique axe optique:



On constate que l'interféromètre est équivalent à deux rayons qui interfèrent à l'infini, ayant subi une réflexion sur une lame d'air.

31. On peut faire un schéma équivalent supplémentaire en faisant l'image de la source par chacun des miroirs, donnant deux sources secondaires:



On a une différence de marche:

$$\delta = (S_2'M) - (S_1'M)$$

Or par théorème de Malus:

$$(MS_1') = (MH)$$

Et par principe de retour inverse:

$$(S_1'M) = (HM)$$

D'où:

$$\delta = (S_2'H) \text{ soit } \boxed{\delta = 2e \cos(i)}$$

On utilise la formule de Fresnel pour deux ondes d'intensité  $I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}$

supposées cohérentes:  $I(M) = I_0 \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right)$  soit

$$\boxed{I(M) = I_0 \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi e \cos(i)}{\lambda}\right) \right)}$$

On observe des anneaux centrés en F.

32. La différence de marche  $\delta$  ne dépend pas de  $\lambda$ , mais le déphasage  $\Delta\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$  dépend de  $\lambda$ . Si la source n'est pas monochromatique: les franges brillantes et sombres des anneaux pourraient être déplacées pour différentes longueurs d'onde ce qui brouille les interférences.

On a  $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta \nu}{c}$ . D'où:

$$\boxed{\Delta p = \frac{\delta}{c} \times \frac{\Delta \nu}{2}}$$

Si  $\Delta p \geq \frac{1}{2}$  on peut avoir brouillage des interférences.

33. Le critère de brouillage sera atteint si  $\frac{\delta}{c} \frac{\Delta \nu}{2} \geq \frac{1}{2}$

Soit, au centre de la figure d'interférences ( $i=0$ ):

$$2e \times \frac{\Delta \nu}{c} \geq 1 \text{ d'où: } \boxed{e \geq e_{\text{lim}} = \frac{c}{2\Delta \nu}}$$

34. On peut considérer cette petite bande spectrale comme monochromatique et appliquer la formule de Fresnel :

$$dI(F') = I_\nu(\nu) d\nu \times \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)\right)$$

$$\text{soit } dI(F') = I_\nu(\nu) d\nu \times \left(1 + \cos\left(2\pi \mathcal{C}(F') \nu\right)\right)$$

$$\text{avec } \mathcal{C}(F') = \frac{\delta}{c} \text{ et } \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$$

$\mathcal{C}(F')$  correspond à la différence de temps de parcours de la lumière dans chacun des deux bras.

$$\text{On a } p(F', \nu) = \frac{\delta(F')}{\lambda} = \frac{\delta(F') \nu}{c} = \boxed{\mathcal{C}(F') \times \nu}$$

35. Deux ondes de fréquence différente sont incohérentes entre elles donc leurs intensités s'ajoutent et :  $\nu_0 \pm \Delta\nu/2$

$$I = \int_{\nu_0 - \Delta\nu}^{\nu_0 + \Delta\nu} dI(F') = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} I_\nu(\nu) \left(1 + \cos(2\pi \mathcal{C}(F') \nu)\right) d\nu$$

$$\text{Or } I_\nu(\nu) = I_{\nu m} = c^{\text{ste}} \text{ et donc :}$$

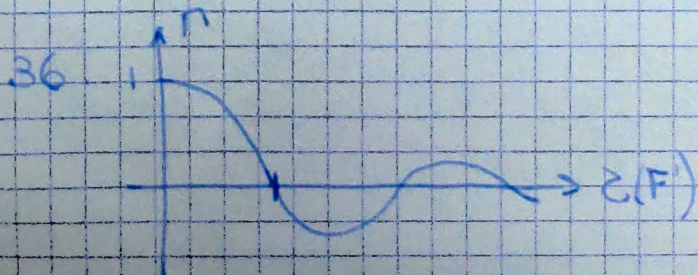
$$I = I_{\nu m} \left( \Delta\nu + \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} \cos(2\pi \mathcal{C}(F') \nu) d\nu \right)$$

$$= I_{\nu m} \left( \Delta\nu + \frac{1}{2\pi \mathcal{C}(F')} \left( \sin\left(2\pi \mathcal{C}(F') \left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}\right)\right) - \sin\left(2\pi \mathcal{C}(F') \left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}\right)\right) \right) \right)$$

$$= I_{\nu m} \Delta\nu \left[ 1 + \frac{1}{\pi \Delta\nu \mathcal{C}(F')} \sin(2\pi \mathcal{C}(F') \nu_0) \sin(\pi \mathcal{C}(F') \Delta\nu) \right]$$

$$\boxed{I = I_0 \left( 1 + \Gamma(\mathcal{C}(F')) \sin(2\pi \mathcal{C}(F') \nu_0) \right)}$$

$$\text{avec } \Gamma(\mathcal{C}(F')) = \text{sinc}(\pi \mathcal{C}(F') \Delta\nu) = \frac{\sin(\pi \mathcal{C}(F') \Delta\nu)}{\pi \mathcal{C}(F') \Delta\nu}$$



Première annulation

$$\text{pour } \pi \mathcal{C}(F') \Delta\nu = \pi$$

$$\text{soit pour } \boxed{\mathcal{C}(F') = \frac{1}{\Delta\nu}}$$

On a donc annulation de contraste lorsque  $\tau(F') = \tau_0$  est égal à la durée d'un train d'onde, ce qui est cohérent avec le critère de perte de cohérence dans le modèle des trains d'onde.

37. On a alors  $\Delta\nu_{\text{exp}} = \frac{c}{2x_{\text{lim}}}$  d'après le résultat de Q33 (équivalent au résultat de Q36).

D'où :  $\Delta\nu_{\text{exp}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 15 \cdot 10^{-3}} = 10^{10} \text{ Hz}$

Ainsi  $\tau_0 = \frac{1}{\Delta\nu_{\text{exp}}} = 10^{-10} \text{ s}$  Cette durée est trop courte pour être mesurée par un capteur usuel mais reste très grande devant la période de l'onde.

### 3 - Largeur Doppler d'une raie d'émission

38. Le signal va mettre un temps  $t_1 = \frac{d}{c}$  à se propager jusqu'au récepteur.

39. Le deuxième maximum est émis à l'instant  $t = T_0$  après une période. La distance qu'il doit parcourir est réduite car on a alors  $OO' = V_x \times T_0$  et :

$$t_2 = T_0 + \underbrace{\frac{d - OO'}{c}}_{\text{temps de parcours}} = T_0 + \frac{d - V_x T_0}{c}$$

↑  
instant d'émission

Soit  $t_2 = \frac{d}{c} + T_0 \left(1 - \frac{V_x}{c}\right)$

40. La période du signal reçu est alors  $T = \frac{1}{\nu} = t_2 - t_1 = T_0 \left(1 - \frac{V_x}{c}\right)$

D'où :  $\nu = \frac{1}{T_0 \left(1 - \frac{V_x}{c}\right)}$  soit  $\nu \approx \nu_0 \left(1 + \frac{V_x}{c}\right)$

où on a fait un développement limité d'ordre 1 en  $\frac{V_0}{c}$ .

41. Les énergies accessibles sont quantifiées donc le spectre est discret. Pour un atome de mercure on a

$$m^* = \frac{M_{\text{Hg}}}{N_A} \approx \frac{200 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23}} \approx \boxed{3 \cdot 10^{-25} \text{ kg}}$$

( $Z=80$  donc on s'attend à avoir 80-150 neutrons et donc  $\sim 200$  nucléons  $\Rightarrow M \sim 200 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

42.  $\Psi(x)$  vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + V(x) \Psi(x) = E \Psi(x)$$

Pour  $x \in ]0, L[$ , on a  $V(x) = 0$  et donc:

$$\boxed{\Psi''(x) + \frac{2m^* E}{\hbar^2} \Psi(x) = 0}$$

De plus  $\boxed{\Psi(x=0) = \Psi(x=L) = 0}$  par continuité de  $\Psi$ .

43. Les solutions s'écrivent sous la forme:

$$\Psi(x) = A \cos\left(\frac{\sqrt{2m^* E}}{\hbar} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{2m^* E}}{\hbar} x\right)$$

$\Psi(x=0) = 0$  donc  $A = 0$  et  $\Psi(x=L) = 0$  donc

les seules solutions non nulles sont telles que  $\sin\left(\frac{\sqrt{2m^* E}}{\hbar} x\right) = 0$

Ainsi l'énergie est quantifiée avec:  $\frac{\sqrt{2m^* E_n}}{\hbar} = \frac{n\pi}{L}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{D'où: } \boxed{E_n = n^2 E_1, \text{ avec } E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2}}$$

$$E_1 \approx \frac{(10^{-34})^2 \times 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-25} \cdot (10^{-1})^2} \approx \frac{10^{-68}}{10^{-27}} \approx \boxed{10^{-41} \text{ J}}$$

Cette énergie est très faible, même devant  $1 \text{ eV} \sim 10^{-19} \text{ J}$ .

44. On a alors :  $n_1^2 \times E_1 \approx k_B T_{\text{gaz}}$  soit

$$n_1 = \sqrt{\frac{k_B T_{\text{gaz}}}{E_1}} \approx \sqrt{\frac{10^{-23} \times 10^3}{10^{-41}}} \approx \sqrt{10^{21}} \approx \boxed{3 \cdot 10^{10}}$$

$$\frac{E_{n_1+1} - E_{n_1}}{E_{n_1}} = \frac{(n_1+1)^2 - n_1^2}{n_1^2} = \frac{2n_1+1}{n_1^2} \approx \frac{2}{n_1} \approx \boxed{7 \cdot 10^{-11}}$$

Autrement dit l'écart entre deux niveaux d'énergie est très faible devant  $k_B T$  et on peut supposer que le spectre en énergie est continu.

45. On a vu  $E = n^2 E_1$  donc  $n(E) = \sqrt{\frac{E}{E_1}}$

$$\begin{aligned} 46. \text{ On a } dn &= n(E+dE) - n(E) \\ &= dE \times \frac{dn}{dE} = \frac{dE}{2\sqrt{E E_1}} \end{aligned}$$

Soit  $dn = \rho(E) dE$  où  $\rho(E) = \frac{1}{2\sqrt{E E_1}}$

47. Cette probabilité est proportionnelle au facteur de Boltzmann, ainsi il existe une constante  $K$  telle que :

$$P(E) = K e^{-\frac{E}{k_B T}}$$

48. On a  $dn$  états d'énergie entre  $E$  et  $E+dE$  donc :

$$dP(E) = P(E) \times dn = P(E) \times \rho(E) dE = f(E) dE$$

avec :  $f(E) = \rho(E) P(E) = \frac{K}{2\sqrt{E E_1}} e^{-\frac{E}{k_B T}}$

49. La probabilité totale doit être de 1 car chaque atome est forcément dans un état d'énergie, ainsi  $\int_{E=0}^{\infty} dP = 1$

Donc  $1 = \int_0^{\infty} \frac{K}{2\sqrt{\beta E_1}} e^{-\beta E} dE$   $u = \beta E$   
 $du = \beta dE$

$= \frac{K}{2\sqrt{\beta E_1}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$  L'intégrale vaut  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  d'après l'énoncé.

$= \frac{K}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta E_1}}$  d'où  $K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\beta E_1}$

Et :  $f(E) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi E}} e^{-\beta E}$  avec  $\beta = \frac{1}{k_B T}$

50. On a :

$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E dP(E) = \int_0^{\infty} E f(E) dE$

$= \int_0^{\infty} \sqrt{\beta/\pi} \sqrt{E} e^{-\beta E} dE$   $u = \beta E$   
 $du = \beta dE$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \int_0^{\infty} \sqrt{u} e^{-u} du$  L'intégrale vaut  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  d'après l'énoncé

$\langle E \rangle = \frac{1}{2} k_B T_{\text{gaz}}$

On retrouve le théorème d'équipartition de l'énergie : dans un système classique, la contribution de chaque terme quadratique à l'énergie totale est  $\frac{1}{2} k_B T$  si le système est à l'équilibre à la température  $T$ .

On a alors  $\langle E \rangle = \frac{1}{2} m^* \langle V_x^2 \rangle$  soit :

$u = \sqrt{\langle V_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{m^*}} \approx \sqrt{\frac{10^{-23} \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-25}}} \approx 150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

51.  $V_{\pm} = V_0 \left(1 \pm \frac{u}{c}\right) \Rightarrow \Delta V_{\text{cop}} = \frac{2u}{c} \times V_0 \approx \frac{2 \cdot 150}{3 \cdot 10^8} \cdot 10^{14} \approx 10^8 \text{ Hz}$

$\Delta V_{\text{cop}} \ll \Delta V_{\text{cop}}$  de Q37 : ici ce sont probablement les collisions qui sont responsables de la largeur de raie.