

TD 13 - Corrigé

I - Loi de Fourier

1 - Sources d'énergie en Guadeloupe et en Hexagone

1. On constate qu'à Orléans la température dépend linéairement de la profondeur, on a $j_{th} = \lambda \frac{dT}{dz} = 2,5 \times \frac{100 \text{ K}}{3 \cdot 10^3 \text{ m}}$

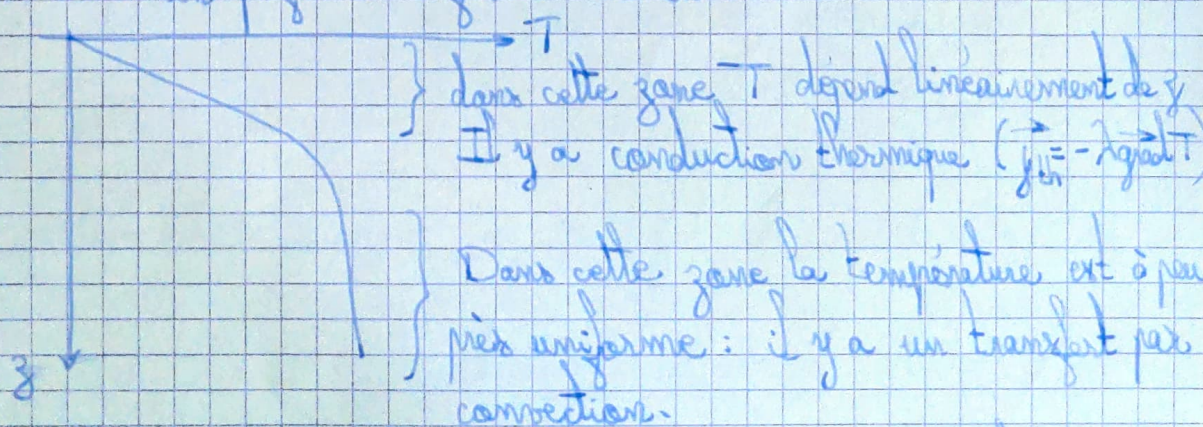
Soit $j_{th} \approx 80 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$

2. On utilise le flux thermique du soleil transmis à la surface de la Terre par rayonnement. D'après la fiche climatologique de Paris:

$$\phi = 4 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{ans}^{-1} = \frac{4 \cdot 10^5 \times 10^4}{365 \times 24 \times 3600} \approx 127 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Le flux solaire est en moyenne 1000 fois plus élevé que le flux géothermique, d'où l'intérêt d'utiliser des panneaux solaires.

3. On observe un profil de la forme suivante:



4. On se concentre sur la zone où on a de la conduction, nous "couper zone" sur le graphique de droite.

$$\text{On a } j_{th} = \lambda \frac{dT}{dz} = 2,5 \times \frac{100 \text{ K}}{200 \text{ m}} = 1,25 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

C'est plus de dix fois plus qu'à Orléans.

5. La puissance totale libérée sur une surface S et le flux de $\vec{j}_{th}$ à travers cette surface, ici $P = \vec{j}_{th} \cdot S$

D'où $S = \frac{P}{j_{th}} = \frac{95 \cdot 10^3 \times 3600}{1,25 \times 3600 \times 24 \times 365} = 8,7 \cdot 10^6 \text{ m}^2$

soit $\boxed{S \approx 8,7 \text{ km}^2}$

6. Le flux solaire à Baillante est $\Phi = 6,7 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{an}^{-1}$
soit $\Phi \approx 213 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et il faudrait une surface:

$$S' = \frac{P}{\eta \Phi} = \frac{95 \cdot 10^3 \times 3600}{0,5023 \times 3600 \times 24 \times 365} = 3,4 \cdot 10^5 \text{ m}^2$$

soit $\boxed{S' = 34 \text{ hectares}}$ (1 hectare = 100 m × 100 m).

Cela représente environ 10% de la surface de Pointe-à-Pitre.

7. En hexagone, le flux solaire en décembre est environ 10 fois plus faible qu'en juillet alors que c'est le moment du pic de consommation électrique. La géothermie offre une source d'énergie constante dans le temps. L'argument n'est pas pertinent en Guadeloupe où les variations du flux solaire sont de l'ordre de 30% seulement.

II - Équation de diffusion en régime stationnaire

2 - Ailette de refroidissement

1. La loi de Fourier indique

$$\vec{j}_{th} = - \lambda \frac{dT}{dx}$$

$\swarrow$ densité de courant thermique $\swarrow$ température
 $\nwarrow$ conductivité thermique

2. Soit une tranche de l'ailette entre x et $x + dx$, en régime permanent le flux thermique entrant par les sections

est $\delta \Phi_{\text{section}} = \pi a^2 (j_{\text{th}}(x) - j_{\text{th}}(x+dx)) = \pi a^2 \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} dx$

Et le flux sortant au contact de l'air est

$$\delta \Phi_{\text{air}} = 2\pi a dx \times h(T(x) - T_a)$$

Ainsi : $\delta \Phi_{\text{section}} = \delta \Phi_{\text{air}}$ soit :

$$\pi a^2 \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = 2\pi a h (T(x) - T_a)$$

ou encore : $\boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} (T(x) - T_a) = 0} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}}$

3. Les conditions aux limites sont $T(x=0) = T_d$

et $j_{\text{th}}(x=b) = h(T(b) - T_a)$. (*)

Si $b \gg \delta$ on peut supposer le barreau infiniment long devant la taille caractéristique δ . Les solutions sont de la forme :

$$T(x) = T_a + A e^{-\frac{x}{\delta}} + B e^{+\frac{x}{\delta}}$$

$B = 0$ dans ce cas car le barreau est infiniment long et T reste finie, de plus $T(x=0) = T_d$ donc :

$$\boxed{T(x) = T_a + (T_d - T_a) e^{-\frac{x}{\delta}}}$$

4. Dans le cas $b \ll \delta$ on a d'autres simplifications.

(*) devient $\frac{\lambda}{\delta} (A e^{-\frac{b}{\delta}} - B e^{\frac{b}{\delta}}) = h (A e^{-\frac{b}{\delta}} + B e^{\frac{b}{\delta}})$

Soit avec $b \ll \delta$: $\frac{\lambda}{\delta} (A - B) = h (A + B)$.

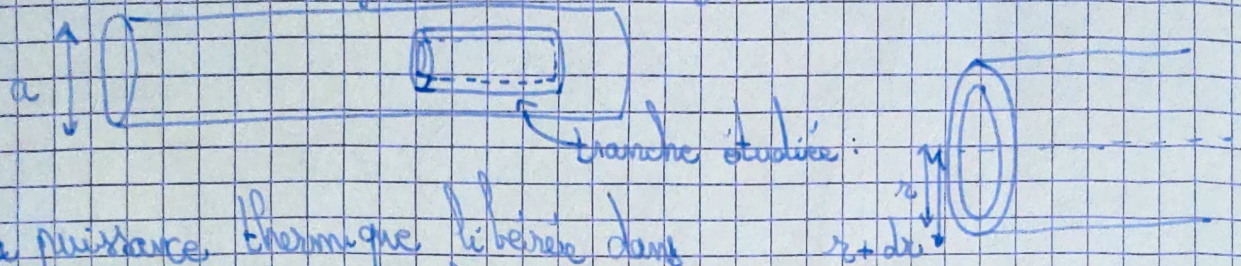
Et : $R_{\text{th}} = \frac{T_d - T_a}{\pi a^2 j_{\text{th}}(x=0)} = \frac{A + B}{\pi a^2 \frac{\lambda}{\delta} (A - B)}$

On trouve : $\boxed{R_{\text{th}} = \frac{1}{\pi a^2 h}}$ qui est indépendant de la

conductivité thermique λ , donc du matériau.

3- Barreau d'uranium

Le cylindre étant très allongé, on supposera que T ne dépend que de r (on néglige les effets de bord). On considère une tranche du barreau de rayon r , de longueur h et d'épaisseur dr :



La puissance thermique libérée dans la tranche est :

$$P_{\text{tot}} = P \times V_{\text{tranche}} = P \times 2\pi r h dr$$

Le flux total entrant dans la tranche est :

$$\Phi_{\text{tot}} = 2\pi r h j_{\text{th}}(r) - 2\pi h (r+dr) j_{\text{th}}(r+dr)$$

$$= -2\pi h dr \times \frac{d}{dr} (r j_{\text{th}}(r)) = +2\pi h \lambda \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr$$

(Par la loi de Fourier, et en supposant λ uniforme).

Ainsi en régime stationnaire la conservation de l'énergie s'écrit :

$$P_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}} = 0 \quad \text{soit :}$$

$$P \times 2\pi r h + 2\pi h \lambda \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\text{Ou encore } \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{P r}{\lambda}$$

$$\Rightarrow r \frac{dT}{dr} = - \frac{P r^2}{2\lambda} + K \quad K=0 \text{ car } j_{\text{th}}(r=0)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = - \frac{P r}{2\lambda} \Rightarrow T(r) = T_0 - \frac{P r^2}{4\lambda} \text{ où } T_0 \text{ est constante}$$

$$\text{On a donc } T = T_0 - \frac{P a^2}{4\lambda} \Leftrightarrow P = \frac{4\lambda}{a^2} (T_0 - T_s)$$

$$\text{Ainsi } \boxed{P_{\text{max}} = \frac{4\lambda}{a^2} (T_{\text{max}} - T_s) = 3,0 \cdot 10^8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}}$$

4 - Conduction thermique d'un cylindre

1. λ est la conductivité thermique homogène à un flux d'énergie surfacique divisé par un gradient de température. Elle s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Le 2^e principe impose que les transferts thermiques sont dirigés des corps chauds vers les corps froids ainsi $\vec{T}$ est opposé au gradient de température.

2. On considère une tranche de cylindre entre les rayons r et $r+dr$. Le flux entrant par la face interne est :

$$\Phi_{\text{in}} = 2\pi r L \times j_d(r)$$

Le flux sortant par la face externe est :

$$\Phi_{\text{out}} = 2\pi(r+dr) L \times j_d(r+dr)$$

En régime stationnaire $\Phi_{\text{in}} = \Phi_{\text{out}}$ donc :

$$2\pi L \times [(r+dr) j_d(r+dr) - r j_d(r)] = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{d}{dr} (r j_d(r)) = 0.$$

Or par la loi de Fourier $j_d(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}$ donc :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad r \frac{dT}{dr} = A \quad \text{où } A \text{ est une constante}$$

$$\text{Et : } \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r} \Rightarrow T(r) = A \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + B \quad \text{où } B \text{ est une constante}$$

$$\text{Alors } T(r=r_1) = T_1 = B$$

$$\text{et } T_2 - T_1 = A \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \Rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

D'où :

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$3. \quad \varphi = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi r L = 2\pi r L \lambda (T_1 - T_2) \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Soit
$$\Phi = \frac{2\pi L \lambda (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

4. On a $\Phi = R_{th}^{-1} \times (T_1 - T_2)$ donc
$$R_{th} = \frac{1}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

5. On a ici $T_1 - T_2 = 34,5 K$ $L = 1,6 m$

$r_2 = 30 \text{ cm}$ $r_1 = 25 \text{ cm}$ $\lambda = 7 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

L'énergie perdue en $\Delta t = 1 \text{ jour}$ est: $1j = 86400 s$

$$E_{perdue} = \Phi \Delta t = \frac{2\pi L \lambda (T_1 - T_2) \Delta t}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \boxed{8,2 \text{ MJ}}$$

L'énergie consommée est:

$$E_{nouriture} = 4 \times 4,6 \cdot 10^6 = \boxed{18 \text{ MJ}}$$

Environ la moitié de sa nourriture sert à maintenir sa température corporelle.

6. Le phoque étant un animal à trois dimensions, en supposant que sa masse volumique est la même (adulte ou bébé):

$$\frac{V_{bébé}}{V_{adulte}} = \frac{V_{adulte}}{2,5^3} \Rightarrow M_{bébé} = \frac{M}{2,5^3} = 9,6 \text{ kg}$$

7. La résistance de la couche de graisse est:

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi L_{bébé} \lambda} \times \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = R_{th,adulte} \times \frac{L_{adulte}}{L_{bébé}} = \frac{R_{th,adulte}}{2,5}$$

le rapport de longueurs par

Celle du animal est:

$$R_{th}^{direct} = \frac{1}{2\pi L_{bébé} \lambda} \ln\left(\frac{r_2 + e''}{r_2}\right)$$

ON: $R_{th,bébé} = 0,65 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
 $R_{th}^{direct} = 2,0 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

(avec $r_2 + e'' = 13 \text{ cm}$ et $r_2 = \frac{r_{2,adulte}}{2,5} = 12 \text{ cm}$)

Alors:
$$E_{perdue} = \Phi \Delta t = \frac{(T_1 - T_2) \Delta t}{R_{th,bébé} + R_{th}^{direct}} = 1,1 \text{ MJ}$$

résistances en série

soit $m = \frac{5}{4,6 \cdot 10^6} = 0,25 \text{ kg}$ de poisson par jour, en plus
des $0,5 \text{ kg}$ nécessaires à son métabolisme.

Sans le duvet on aurait $E_{\text{perdue}} = \frac{(T_1 - T_2) \Delta t}{R_{\text{th, l'air}}} = 4,6 \text{ MJ}$

et donc $m = \frac{5}{4,6 \cdot 10^6} = 1,0 \text{ kg}$ de poisson soit 750 g de plus, autrement dit le phoque devrait doubler sa consommation de poisson.

5- Pilier parasismique

1. On peut supposer sa température uniforme à la température de la terre à la profondeur h (seul endroit où la barre d'acier n'est pas thermiquement isolée).

2. On étudie une tranche de cylindre entre les rayons r et $r+dr$, on note μ , c_p et λ la masse volumique, capacité thermique massique et conductivité thermique du béton. Le flux thermique entrant dans la tranche en r est : $\Phi(r) = 2\pi r h j_{\text{th}}(r)$ où $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(r) \vec{e}_r$ est le vecteur densité de courant thermique. Le flux sortant en $r+dr$ est $\Phi(r+dr) = 2\pi (r+dr) h j_{\text{th}}(r+dr)$.

Enfin par le 1^{er} principe : $dU = \delta Q = P_{\text{th}} dt$

Soit : $2\pi r h dr \times \mu c_p dT = (\Phi(r) - \Phi(r+dr)) dt$

D'où : $2\pi r h \mu c_p \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{d\Phi}{dr} = - 2\pi h \frac{d}{dr} (r j_{\text{th}}(r))$

Or : $j_{\text{th}}(r) = - \lambda \frac{dT}{dr}$ par la loi de Fourier.

Donc : $r \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} = + \lambda \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial T}{\partial r})$

On encore : $\left| \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial T}{\partial r}) \right|$

3. En régime stationnaire : $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$

Donc $r \frac{dT}{dr} = C^{ste} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C^{ste}}{r} = \frac{K}{r}$

D'où : $T(r) = K \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) + K'$ où K' est une autre constante.

Or $T(r_1) = T_a \Rightarrow K' = T_a$

$T(r_2) = T_b \Rightarrow K \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = T_b - T_a$

Ainsi :
$$T(r) = T_a + (T_b - T_a) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

ici $\frac{dT}{dr} = \frac{T_b - T_a}{\ln(r_2/r_1)} \times \frac{1}{r}$ est maximal en $r = r_1$,

et on a alors $\left| \frac{dT}{dr} \right| \approx \frac{T_b - T_a}{r_1 \ln(r_2/r_1)} \approx 43 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1} = 0,43 \text{ K} \cdot \text{cm}^{-1}$

Les contraintes thermiques sont donc supportables ($\left| \frac{dT}{dr} \right| < 0,5 \text{ K} \cdot \text{cm}^{-1}$)

4. Le temps caractéristique d'évolution est $\tau = \frac{r_1^2}{D_{th}}$

où r_1 est la plus petite distance caractéristique du problème

soit $\tau \sim \frac{10^{-2}}{5 \cdot 10^{-7}} \sim 2 \cdot 10^4 \text{ s} \sim 5 \text{ h}$.

L'hypothèse de régime permanent est discutable : le dispositif est très sensible aux variations journalières de température.

6 - Bilan thermique d'un artéride

1. On travaille à l'équilibre thermodynamique local et le problème est à symétrie sphérique : $T = T(r)$

De plus on peut s'attendre à ce que T dépende aussi de R , P et λ .

2. Cette sphère perd une puissance thermique $\Phi = \int_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$

où $\vec{j}_{th} = -\lambda \text{ grad } T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$

Ainsi: $\boxed{\Phi(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2}$

3. Cette puissance est donnée par:

$$P_{\text{tot}}(r) = P \times \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{puissance libérée dans la sphère}$$

4. On applique le premier principe à cette sphère pendant dt :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Ici $dU = 0$ (régime stationnaire) et $\delta W = 0$ (sphère immobile).

De plus: $\delta Q = P_{\text{tot}}(r)dt - \Phi(r)dt$

D'où: $\boxed{P_{\text{tot}}(r) = \Phi(r)}$

5. On a donc: $3\lambda \frac{dT}{dr} + Pr = 0 \Leftrightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{3\lambda}r$

On envoie: $\boxed{T(r) = -\frac{Pr^2}{6\lambda} + T_0}$

6. À l'équilibre, on doit avoir continuité entre la puissance qui traverse la surface par conduction et la puissance émise par rayonnement: $\Phi(R) = P_{\text{tot}}(R) = P_{\text{ray}} \times 4\pi R^2$

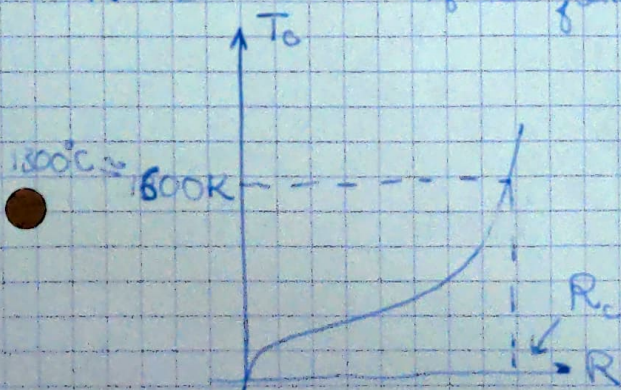
D'où $4\pi R^2 \sigma T(R)^4 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot P$

Soit: $\left(T_0 - \frac{PR^2}{6\lambda}\right)^4 = \frac{RP}{3\sigma}$

On envoie:

$$\boxed{T_0 = \frac{PR^2}{6\lambda} + \sqrt[4]{\frac{RP}{3\sigma}}}$$

7. On trace T_0 en fonction de R à la calculatrice:



On lit $\boxed{R_0 \approx 48 \text{ km}}$

Ce qui correspond effectivement à la taille d'un gros astéroïde.

8. On fait un bilan sur une coquille sphérique de rayon r et d'épaisseur dr :

* Pendant dt sa variation d'énergie interne est

$$dU = \mu \cdot C_p \times \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{volume de la coquille}} \times dt$$

* Elle reçoit par conduction le flux $\phi(r)$ et perd $\phi(r+dr)$

* L'énergie produite par radioactivité est :

$$\delta Q_{\text{rad}} = 4\pi r^2 dr \times P dt$$

Le premier principe donne alors :

$$\mu C_p \times 4\pi r^2 dr dT = \phi(r) - \phi(r+dr) + 4\pi r^2 dr \times P dt$$

$$\text{Or } \phi(r) - \phi(r+dr) = - \frac{d\phi}{dr} dr = + \frac{d}{dr} \left(\lambda \cdot 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \right) dr$$

$$= 4\pi \lambda \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr$$

$$\text{Ainsi : } \mu C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + P$$

$$\text{On encore : } \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D_{th}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{P}{\mu C_p}}$$

On obtient une équation de diffusion avec un terme source issu de la radioactivité.

III - Régime instationnaire

7 - Gel d'un lac

1. On fait un bilan d'énergie sur une tranche de section S et d'épaisseur dz pendant dt : $dU = \delta Q + \delta W$

* $\delta W = 0$ (tranche indéformable)

* $dU = S dz \times \rho_G \times C_G \times (T(t+dt, z) - T(t, z))$

* $\delta Q = -S_{\text{gh}}(z+dz, t) + S_{\text{gh}}(z, t)$

L'égalité entre ces quantités fournit :

$$S \rho_0 C_0 \frac{\partial T}{\partial t} = - S \frac{\partial j_{th}}{\partial z}$$

Or par la loi de Fourier $j_{th}(z) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$ donc :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_0 C_0} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

2. On a $T = T_A$ en $z=0$ et $T = T_F$ en $z = \xi(t)$
Elles ne suffisent pas à déterminer $T(z,t)$, il nous faut aussi une condition initiale. Mais $\xi(t)$ varie donc cela rend le traitement des conditions en temps et en espace complexe.

3. Dans ce cas on a $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ donc T est une fonction linéaire de l'espace : $T(z,t) = A(t) \times z + B(t)$.
Les conditions aux limites imposent alors :

$$\boxed{T(z,t) = T_A + \frac{z}{\xi(t)} (T_F - T_A)}$$

4. On peut faire un bilan d'enthalpie : entre t et $t+dt$ le cylindre reçoit un flux thermique :

$$\Phi = j_{th}(\xi(t)) \times S = -\lambda \frac{dT}{dz} \times S = -\frac{\lambda S (T_F - T_A)}{\xi(t)}$$

Et donc un transfert thermique $\delta Q = \Phi dt = -\frac{\lambda S (T_F - T_A)}{\xi(t)} dt$

De plus sa variation d'enthalpie est :

$$dH = -dm \times L \leftarrow \begin{matrix} \text{enthalpie de fusion} \\ \text{de solidification} \end{matrix}$$

D'où :

$$dH = \delta Q$$

Sait :

$$\boxed{dm = \frac{\lambda S (T_F - T_A)}{L \xi(t)} dt}$$

5. On peut remarquer que $dm = S \times \rho_0 \times d\xi$ donc :

$$\text{D'où : } \rho_0 d\tilde{z} = \frac{\lambda(T_F - T_A)}{L\tilde{z}(t)} dt$$

On encore :

$$\tilde{z} \frac{d\tilde{z}}{dt} = \frac{\lambda(T_F - T_A)}{\rho_0 L}$$

6. On intègre :

$$\frac{1}{2} \tilde{z}^2(t) - \frac{1}{2} \tilde{z}^2(t=0) = \frac{\lambda(T_F - T_A)}{\rho_0 L} t$$

Or $\tilde{z}(t=0) = 0$ donc :

$$\tilde{z}(t) = \sqrt{\frac{\lambda(T_F - T_A)}{\rho_0 L} t}$$

t	$\tilde{z}$	1 jour	1 semaine	1 mois	6 mois
$\tilde{z}(t)$	2 cm	10 cm	26 cm	55 cm	1,3 m

La croissance est rapide au début mais ralentit ensuite, car la couche de glace isole de plus en plus le lac de l'atmosphère.

8 - Âge de la Terre

1. Par la loi de Fourier :

$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

Alors $\frac{\partial j}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial z} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial t}$ (th de Schwarz)

$$= -\lambda \frac{\partial}{\partial z} \left[D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

$$= -\lambda D \frac{\partial^3 T}{\partial z^3} = D \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

D'où :

$$\frac{\partial j}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

2. Lorsque $t \rightarrow 0$ on doit avoir $j(z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 0 \\ +\infty & \text{si } z = 0 \end{cases}$

car à $t=0$ on a une discontinuité de température en $z=0$.

Lorsque $t \rightarrow \infty$ la Terre est complètement refroidie : $j(z, t) \rightarrow 0$.
Enfin $j(z \rightarrow \infty, t=0) = 0$ car alors la Terre est à T_0 .

3. On a :

$$\frac{\partial j}{\partial t} = + \frac{A}{2t\sqrt{Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} - \frac{A}{\sqrt{Dt}} \times \frac{z^2}{4Dt^2} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$$

$$\frac{\partial j}{\partial z} = \frac{Az}{2Dt\sqrt{Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$$

$$\frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = \frac{A}{2Dt\sqrt{Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} - \frac{Az^2}{4Dt^2\sqrt{Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$$

On constate qu'on a bien $\frac{\partial j}{\partial t} = D \frac{\partial^2 j}{\partial z^2}$. De plus on peut remarquer que l'on a bien $j(t, z \rightarrow \infty) = 0$

$$j(t \rightarrow \infty, z) = 0 \quad \text{et} \quad j(t=0) = 0 \quad \text{si} \quad z \neq 0$$

$$\left(\text{car} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} e^{-x} = 0 \right)$$

$$4. \quad [T_0 - T_s] = K \quad [\lambda] = W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} = kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$$

$$[p] = kg \cdot m^{-3} \quad [c_p] = J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1} = m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$$

$$\text{D'où, avec } A = a(T_0 - T_s)^\alpha \lambda^\beta p^\gamma c_p^\delta :$$

$$[A] = K^{\alpha-\beta-\delta} \cdot kg^{\beta+\gamma} \cdot m^{\beta-\gamma+2\delta} \cdot s^{-\beta-2\delta}$$

$$\text{Or: } [A] = [j\sqrt{Dt}] = W \cdot m^{-2} \cdot m = kg \cdot m \cdot s^{-3}$$

$$\text{Donc: } \begin{cases} \alpha - \beta - \delta = 0 \\ \beta - \gamma + 2\delta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ 3\beta + 2\delta = 3 \end{cases}$$

$$\text{On trouve } \gamma = 0; \beta = 1; \delta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 1$$

$$\text{Soit } A = a(T_0 - T_s) \cdot \lambda$$

$$5. \quad \text{On a } j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{j}{\lambda} \quad \text{soit:}$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_0 - T_s}{\sqrt{Dt}}} \quad \text{en } z = 0$$

$$6. \quad \text{donc } t = \left(\frac{T_0 - T_s}{\sqrt{Dt}} \times \left(\frac{\partial T}{\partial z}(z=0) \right)^{-1} \right)^2$$

$$\text{On trouve } t \approx 25 \text{ Millions d'années}$$

En réalité t est bien plus élevée (de l'ordre du milliard d'années).

Lord Kelvin n'a pas pris en compte :

- * la radioactivité qui libère de l'énergie thermique
- * la présence de convection dans le noyau externe et le manteau
- * la cristallisation du noyau ($\text{Fe}(l) \rightarrow \text{Fe}(s)$) qui libère de la chaleur latente.

9- Formation d'une croûte de lave

1. On a
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{T_f - T_0} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D}{T_f - T_0} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

D'où :
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (*)$$

De plus à $t=0$: $\theta(y > 0) = 1$ lave en fusion et $\theta(y=0) = 0$ contact avec l'air

Et $\theta(y=0, t > 0) = 0$ température de l'air $T=T_0 \Rightarrow \theta=0$

$\theta(y = y_s(t), t > 0) = 1$ température de la lave en fusion $T=T_f \Rightarrow \theta=1$

2. $[D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = L^2 \cdot T^{-1}$, on peut donc définir une longueur caractéristique de diffusion $L = \sqrt{Dt}$

3. On a alors :
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \times \frac{-\eta}{4t\sqrt{Dt}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\eta}{2\sqrt{Dt}} \frac{d\theta}{d\eta} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{4Dt} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}$$

 Ainsi (*) devient :
$$\frac{1}{4t} \times \frac{-\eta}{4t\sqrt{Dt}} = \frac{1}{4t} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}$$

Ou encore :
$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta}{d\eta} = 0$$

4. On a alors
$$\frac{d\theta}{d\eta} + 2\eta \theta = 0$$
 soit $\theta(\eta) = B e^{-\eta^2}$
 où $B = \text{cte}$

$$\text{Et : } \theta(\eta) = A + B \int_0^\eta e^{-z^2} dz$$

$$= A + \frac{B\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta)$$

Or $\theta(\eta=0) = 0$ donc $A = 0$

Et $\theta(\eta = \eta_s(t)) = \theta(\eta = \eta_s = \lambda) = 1$

Donc $\frac{B\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\lambda) = 1 \Leftrightarrow \frac{B\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\operatorname{erf}(\lambda)}$

Ainsi :

$$\boxed{\theta(\eta) = \frac{\operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{erf}(\lambda)}}$$

5. À pression constante : $dH = \delta Q$ (cours de thermochimie)

Donc $-p \delta dy_s \times \Delta h_{sl \rightarrow liq} = \delta Q_{regue} = -\delta Q_{libérée}$

L'énergie libérée est $p \delta dy_s \Delta h_{sl \rightarrow liq}$.

6. On en déduit une condition sur le flux thermique à la base de la couche de lave Φ également donné par la loi de Fourier :

$$\Phi = -S \times R \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=y_s}$$

Et $\Phi_{dt} = \delta Q_{libérée}$ donc :

$$\boxed{\rho \frac{dy_s}{dt} \Delta h_{sl \rightarrow liq} = R \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=y_s}}$$

7. On a $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{T_f - T_0} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{T_f - T_0} \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}(\pi(T_f - T_0))} \frac{d\theta}{d\eta} (\eta = \lambda)$$

De plus $\frac{dy_s}{dt} = \frac{d}{dt}(\eta_s \times 2\sqrt{t}) = \lambda \sqrt{\frac{D}{t}}$

Et $\frac{d\theta}{d\eta} (\eta = \lambda) = \frac{\operatorname{erf}'(\lambda)}{\operatorname{erf}(\lambda)} = \frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}(\lambda)} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

D'où :

$$\frac{R}{\sqrt{t}(\pi(T_f - T_0))} \cdot \frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}(\lambda)} = \lambda \sqrt{\frac{D}{t}} \times \rho \Delta h_{sl \rightarrow liq}$$

On $D = \frac{K}{\rho c}$ donc après simplifications:

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \operatorname{erf} \lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \quad \Delta h_d \rightarrow h_f$$

8. On trouve $\frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \operatorname{erf} \lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{10^3 \times 10^3} \times 4 \cdot 10^5 \approx 0,7$

D'où: $\lambda \approx 0,9$ et $y_s = 2 \times 0,9 \times \sqrt{D t}$

$t = \frac{1 \text{ an}}{2} = \frac{1 \cdot 10^7 \text{ s}}{2} \approx 1,6 \cdot 10^7 \text{ s}$ $D = 7 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Donc $y_s \approx 6 \text{ m}$

9. Ceci correspond très bien aux mesures (environ 5,5 m au bout de 1 an)

10- Expérience de Fourier

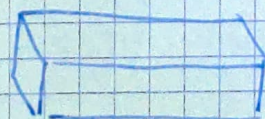
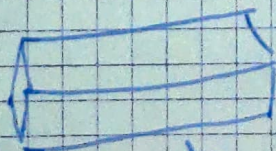
1. On note (TT) le plan contenant l'axe (Oz) et l'axe passant par O et l'origine des angles. (TT) est un plan de symétrie:

- * pour la géométrie du dispositif
- * pour le chauffage imposé à $t=0$

Donc c'est un plan de symétrie de la température et $T(\theta)$ est une fonction paire.

2. L'équation de la chaleur s'écrit $\mu \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T)$

Or si on se place dans le cas $a \ll R$ localement dans l'anneau on peut considérer la géométrie comme cartésienne:



avec $dx = R d\theta$ où x est la coordonnée cartésienne locale.
Alors $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{R^2 \partial \theta^2} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$

3. T_m est la température moyenne du barreau à l'instant $t=0$.

L'équation de diffusion étant linéaire, on peut écrire la solution comme la somme des solutions pour chacune des conditions initiales :

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial^2 T_n}{\partial \theta^2} = \mu c \frac{\partial T_n}{\partial t} \\ T_n(t=0) = b_n \cos(n\theta) \end{cases}$$

Et alors $T = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ vérifie bien l'équation de diffusion et la condition initiale $T(t=0) = T_0(\theta)$.

4. On réinjecte dans l'équation :

$$\frac{\lambda}{R^2} f_n''(\theta) g_n(t) = \mu c f_n(\theta) g_n'(t)$$

Soit :

$$\underbrace{\frac{g_n'(t)}{g_n(t)} \times \frac{\mu c R^2}{\lambda}}_{\text{indépendant de } \theta} = \underbrace{\frac{f_n''(\theta)}{f_n(\theta)}}_{\text{indépendant de } t} = c^{ste}$$

On en déduit que $f_n(\theta)$ vérifie une équation d'oscillateur harmonique, or à $t=0$ $T_n(\theta, t) = g_n(0) f_n(\theta) = b_n \cos(n\theta)$
 Donc on peut prendre $g_n(0) = b_n$ et $f_n(\theta) = \cos(n\theta)$.

Alors $c^{ste} = \frac{f_n''(\theta)}{f_n(\theta)} = -n^2$ et $\frac{g_n'(t)}{g_n(t)} = -\frac{\lambda n^2}{\mu c R^2} = -\frac{1}{\tau_n}$

Ainsi :

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n} \quad g_n(t) = b_n e^{-t/\tau_n}$$

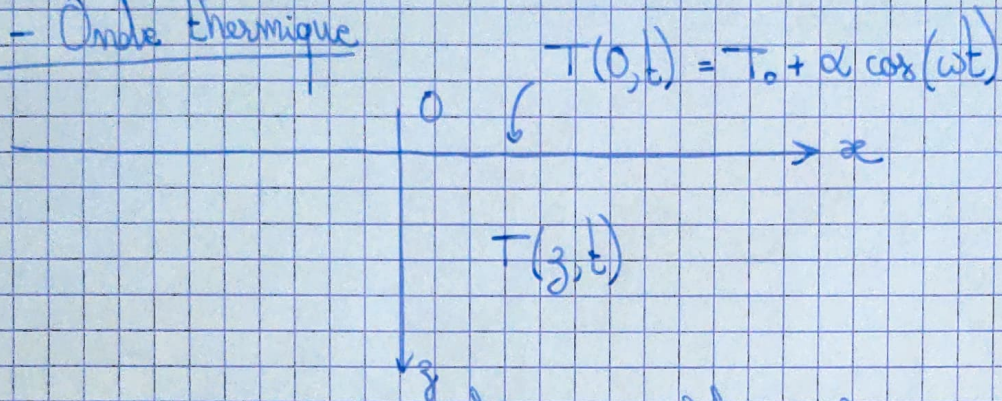
où $B_n = b_n$; $d_n = \frac{R}{n}$ et $\tau_n = \frac{\mu c R^2}{\lambda n^2}$.

On constate que $d_n = \sqrt{D_{th} \tau_n}$ avec $D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c}$ la diffusivité thermique ce qui est caractéristique des problèmes de diffusion.

5. On a un temps τ_n qui varie comme $\frac{1}{n^2}$, autrement dit les composantes $(T_n)_{n>1}$ tendent rapidement vers 0 et on peut alors dire que $T(\theta, t) - T_m \approx T_1 \approx B_1 \cos \theta e^{-t/\tau_1}$

III - Ondes thermiques

II - Onde thermique



1. Le problème est invariant par translation selon x et y .

2. $\vec{j}_{th} = - \lambda \text{grad}(T)$

Annotations: $\vec{j}_{th}$ is labeled "densité de flux" with units $[W \cdot m^{-2}]$. λ is labeled "conductivité thermique" with units $[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}]$. T is labeled "température" with units $[K]$.

3. On réinjecte dans l'équation de la chaleur:

$$\lambda \times f''(z) e^{j\omega t} = j\omega \rho c f(z) e^{j\omega t}$$
$$\Rightarrow f''(z) + \frac{j\omega}{D} f(z) = 0$$

4. Équation caractéristique: $\underline{r}^2 = -\frac{j\omega}{D} = e^{j\frac{\pi}{2}} \times \frac{\omega}{D}$

$$\Rightarrow \underline{r} = \pm e^{j\frac{\pi}{4}} \times \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}}$$

$$\Rightarrow f(z) = A \exp\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}} z\right) + B \exp\left(-\frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}} z\right)$$

$A = 0$ car l'exponentielle diverge si $z \rightarrow \infty$

5. Alors: $\underline{\theta}(z, t) = B \exp\left(-\frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}} z\right) e^{j\omega t}$

$$\underline{\theta}(z, t) = B e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})}$$

où $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ est appelée épaisseur de peau.

$$6. T(z,t) = \operatorname{Re}(\underline{Q}(z,t)) + T_0 \quad \text{Notons } \underline{B} = B_0 e^{i\varphi_0}$$

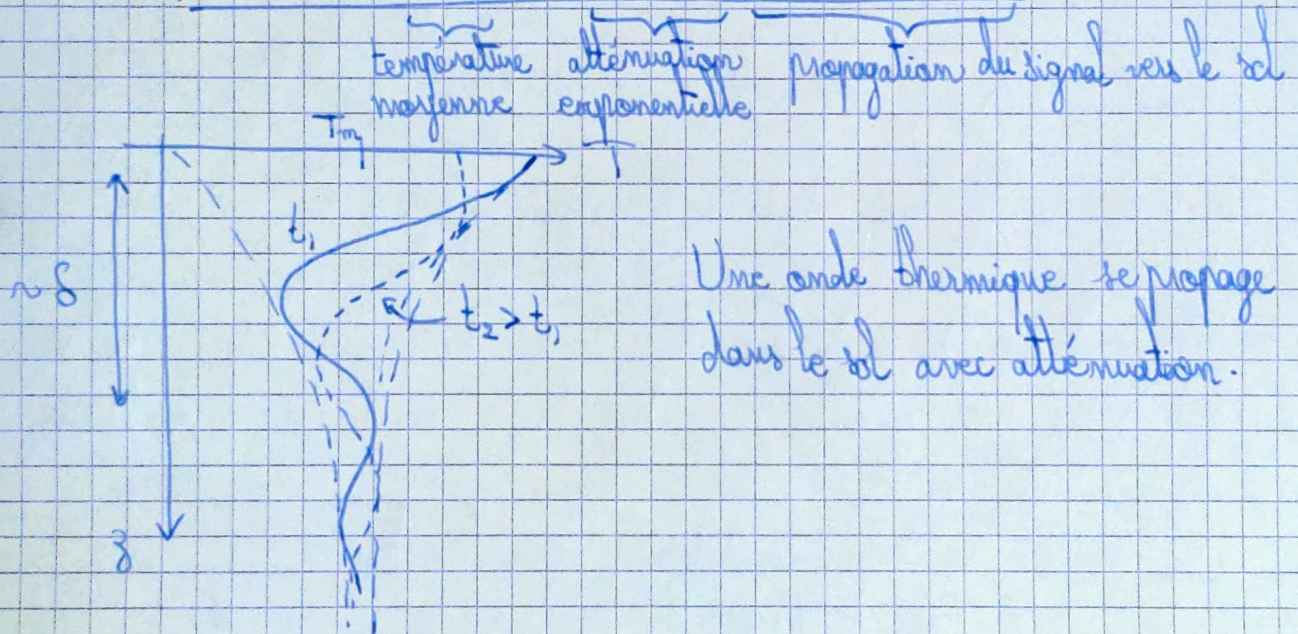
Alors:

$$T(z,t) = T_0 + B_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi_0)$$

$$\text{Or } T(z=0,t) = T_0 + \alpha \cos(\omega t)$$

Donc $B_0 = \alpha$ et $\varphi_0 = 0$:

$$\boxed{T(z,t) = T_0 + \alpha e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})}$$



$$7. \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{10DT}$$

$$T = 1j: \quad \delta = \sqrt{10 \times 2 \cdot 10^{-4} \times 10^5} = \sqrt{6 \cdot 10^{-2}} \approx 0,25 \text{ m}$$

$$T = 1 \text{ an}: \quad \delta = \sqrt{10 \times 2 \cdot 10^{-7} \times 10 \cdot 10^7} \approx 5 \text{ m}.$$

On veut une température plutôt constante dans l'installation donc on choisira $z \geq 5 \text{ m}$ pour l'installation.

8. On a négligé la conduction-convection à l'interface (discontinuité de température), le rayonnement solaire, le flux conductif géothermique qui jouent tous un rôle important.

12 - Réflexion et transmission d'une onde thermique

1. On a dans un solide: $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$
 La température est donc nécessairement une fonction continue de l'espace, ainsi:

$$\underbrace{\Theta_i(0, t) + \Theta_r(0, t)}_{T(z=0^-, t)} = \underbrace{\Theta_t(0, t)}_{T(z=0^+, t)}$$

2. On doit avoir: $j_{th}(z=0^-, t) = j_{th}(z=0^+, t)$

$$\text{Soit: } \lambda_1 \left(\frac{\partial \Theta_i}{\partial z}(0, t) + \frac{\partial \Theta_r}{\partial z}(0, t) \right) = \lambda_2 \frac{\partial \Theta_t}{\partial z}(0, t)$$

3. L'onde réfléchie doit se propager selon $-\vec{e}_z$ et celle transmise selon $+\vec{e}_z$. De plus on doit avoir une atténuation des ondes dans leur sens de propagation, qui se fait avec une échelle caractéristique égale à l'épaisseur du peau δ_1 ou δ_2 selon le milieu.

4. On écrit les deux conditions aux limites:

$$\begin{cases} A_i + A_r = A_t \\ -j\vec{k}_1 \lambda A_i + j\vec{k}_1 \lambda A_r = -j\vec{k}_2 \lambda A_t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \underline{k}_1 = \frac{1-j}{\delta_1} \\ \underline{k}_2 = \frac{1-j}{\delta_2} \end{cases}$$

Alors:

$$0 = (A_i + A_r) \underline{k}_2 \lambda_2 + \underline{k}_2 \lambda_2 A_r - \underline{k}_1 \lambda_1 A_i = A_r (\underline{k}_1 + \underline{k}_2) = A_i (\underline{k}_1 - \underline{k}_2)$$

$$\text{D'où: } \underline{r} = \frac{\underline{k}_1 - \underline{k}_2}{\underline{k}_1 + \underline{k}_2} \quad \text{or } \lambda_n \underline{k}_n = \frac{1-j}{\sqrt{2} \lambda_n} \cdot \lambda_n = \frac{1-j}{\rho_n c_n \omega}$$

$$\Rightarrow \lambda_n \underline{k}_n = (1-j) \sqrt{\frac{\omega}{2}} \cdot \sqrt{\lambda_n \rho_n c_n} \propto c_n$$

Ainsi: $\boxed{\underline{r} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}}$

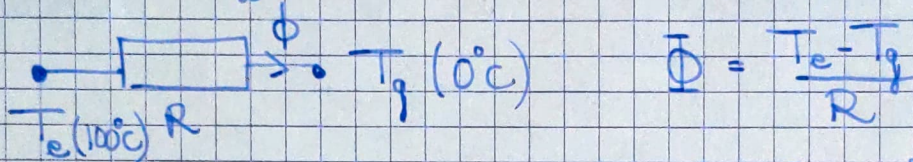
Et: $-2 \underline{k}_1 \lambda_1 A_i = (-\underline{k}_2 \lambda_2 - \underline{k}_1 \lambda_1) A_t$ d'où:

$$\boxed{\underline{t} = \frac{2c_1}{c_1 + c_2}}$$

IV - Résistances thermiques

13 - Association de résistances

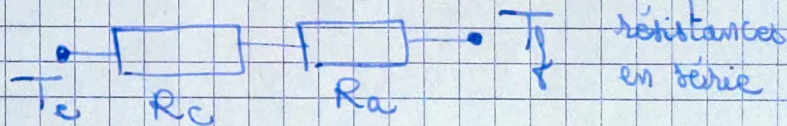
On note R_c la résistance thermique de la barre de cuivre
 R_a celle de la barre d'acier.



Soit E l'énergie nécessaire pour faire fondre la glace.
En Δt on fait fondre la glace si $\Phi \Delta t = E = \frac{T_e - T_g}{R} \Delta t$

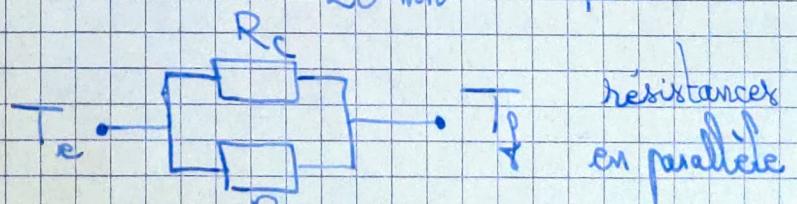
$$\text{D'où : } \Delta t = \frac{RE}{T_e - T_g} = \begin{cases} 20 \text{ mm cuivre} \\ 40 \text{ mm acier} \end{cases}$$

Figure de gauche :



$$\text{Alors } \Delta t = \frac{(R_c + R_a)E}{T_e - T_g} = \underbrace{\frac{R_c E}{T_e - T_g}}_{20 \text{ mm}} + \underbrace{\frac{R_a E}{T_e - T_g}}_{40 \text{ mm}} = 1h$$

Figure de droite :



$$\Delta t = \frac{R_a R_c}{R_a + R_c} \cdot \frac{E}{T_e - T_g} = \frac{\frac{R_a E}{T_e - T_g} \cdot \frac{R_c E}{T_e - T_g}}{\frac{R_a E}{T_e - T_g} + \frac{R_c E}{T_e - T_g}} = \frac{20 \cdot 40}{20 + 40}$$

$$\Delta t \approx 13 \text{ mm}$$

14 - Combinaison de plongée

1. On modélise l'humain par un cylindre de hauteur $L \approx 1,7 \text{ m}$ et de rayon $r_c \approx 20 \text{ cm}$, alors sa surface est :
 $S \approx 2\pi r_c L$

Il perd une énergie $\Phi = Sh(T_{\text{corps}} - T_{\text{eau}})$ } par unité de temps
 produit une énergie P

On lui applique le 1^{er} principe pendant Δt :

$$\Delta U = m \cdot C_m \cdot \Delta T = (-\Phi + P) \Delta t$$

en faisant l'approximation que $\Phi \approx \text{cte}$. Alors on a hypothermie

pour $\Delta T = -37,5^\circ + 35^\circ = -2,5 \text{ K}$ soit:

$$\Delta t = \frac{-m C_m \Delta T}{2\pi r L h (T_{\text{corps}} - T_{\text{eau}}) - P} \approx \begin{cases} 83 \text{ min} & \text{Guadeloupe} \\ 29 \text{ min} & \text{Manche} \\ 12 \text{ min} & \text{Banquise} \end{cases}$$

(avec $m = 65 \text{ kg}$)

2. On a vu $\Phi = Sh(T_{\text{corps}} - T_{\text{eau}}) = 2\pi r L h (T_{\text{corps}} - T_{\text{eau}})$

pour la peau. $\Rightarrow R_{\text{th, peau}} = \frac{1}{2\pi r L h}$

Pour le néoprène d'épaisseur e on a:

$$R_{\text{th, neo}} = \frac{e}{\lambda S} = \frac{e}{2\pi r L \lambda}$$

Les deux résistances sont en série et en régime permanent:

$$P = \Phi = \frac{T_{\text{corps}} - T_{\text{eau}}}{R_{\text{th, neo}} + R_{\text{th, peau}}} = \frac{2\pi r L (T_{\text{corps}} - T_{\text{eau}})}{\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h}}$$

$$\text{Soit } e = \lambda \left[\frac{2\pi r L}{P} (T_{\text{corps}} - T_{\text{eau}}) - \frac{1}{h} \right]$$

ANI: $e = \begin{cases} 2,3 \text{ cm} & \text{Guadeloupe} \\ 6,5 \text{ cm} & \text{Manche} \\ 15,5 \text{ cm} & \text{Banquise} \end{cases}$

} il va falloir trouver une autre solution ou faire une baignade plus courte