

Frottements

Chapitre 2

Avec solutions

1 Distance de freinage ♥ ★

On étudie une voiture qui se déplace à la vitesse v_0 . Elle freine brusquement, ce qui bloque les roues. On note f le coefficient de frottement entre les roues et la route.

1. Avant le freinage du véhicule, est-on en situation de glissement ou non concernant le contact roue-sol ? Et pendant le freinage ?

On définit I le point de contact entre la roue et le sol et C le centre de la roue.

- Avant le freinage : la roue roule sur le sol, le centre de la roue avance à une vitesse $\vec{v}(C/\text{sol}) \neq \vec{0}$ mais comme la roue tourne à une vitesse de rotation Ω , le point I de la roue ne se déplace pas par rapport au sol : $\vec{v}(I \in \text{roue}/\text{sol}) = \vec{0}$. On est donc en phase d'adhérence.
- Après le début du freinage, la roue ne tourne plus. La vitesse de glissement est non nulle : $\vec{v}(I \in \text{roue}/\text{sol}) = \vec{0}$. On est donc en phase de glissement.

2. Calculer la distance parcourue entre le début du freinage et l'arrêt. Commenter la dépendance du résultat obtenu en fonction des variables du problème.

On utilise une approche énergétique. Lors du glissement, la voiture perd son énergie cinétique initiale :

$$E_c^{\text{initiale}} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad E_c^{\text{finale}} = 0 \quad (1)$$

En supposant le sol plat, la variation d'énergie potentielle de pesanteur est nulle.

La réaction normale du support $\vec{N}$ ne travaille pas, mais la force de frottement $\vec{T}$ travaille. Comme on est en situation de glissement, la loi de Coulomb donne $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$. Or en appliquant le PFD à la voiture projeté selon la verticale on trouve $\|\vec{N}\| = mg$. Le travail de la force de frottement est donc donné par :

$$W = -\|\vec{T}\| \times d = -f_d mgd$$

où d est la distance parcourue lors du freinage.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la voiture dans le référentiel terrestre

supposé galiléen on trouve :

$$\Delta(E_c + E_p) = W \Leftrightarrow -\frac{1}{2}mv_0^2 = -f_d mg \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d = \frac{v_0^2}{2f_d g}} \quad (3)$$

On constate que la distance de freinage :

- Diminue si on augmente le coefficient de frottement f_d . C'est la raison pour laquelle on essaye de construire des pneus pour maximiser f_d .
- Augmente avec le carré de la vitesse : si on va deux fois plus vite, la distance de freinage est 4 fois plus longue.

3. Application numérique : calculer la distance de freinage pour une vitesse initiale de 80 km/h sur une route sèche ($f = 1$) ou mouillée ($f = 0,5$).

A.N. : $v_0 = 80 \times \frac{1000}{3600} = 22 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Sur route sèche : $d = 25 \text{ m}$. Sur route humide : $d = 50 \text{ m}$.

2 Déplacement d'un meuble ★★

On s'intéresse à un meuble que l'on souhaite déplacer le long d'un plan. Pour cela, on choisit de tirer le meuble par le coin supérieur droit en A . Pour simplifier le problème, on supposera que le meuble a une densité uniforme. On note m la masse du meuble, h sa hauteur et a sa largeur. On note aussi f_s et f_d les coefficients de frottement statique et dynamique associés au contact entre le meuble et la surface.

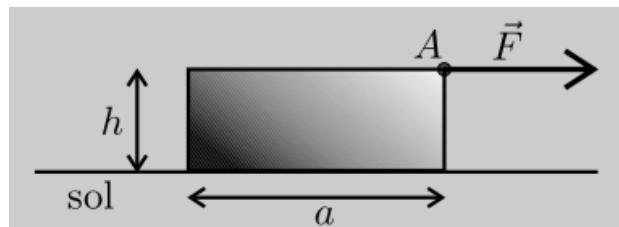


Figure 1: Schéma du meuble que l'on souhaite tirer.

1. Quelle est la force minimale à appliquer pour mettre le solide en mouvement ?

Le meuble est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à la réaction du sol $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ et à la force $\vec{F}$ appliquée par l'opérateur. Au moment de la mise en mouvement, on arrive en limite de la condition d'adhérence, et on a donc :

$$\|\vec{T}\| = f_s \|\vec{N}\|$$

Or, le PFD appliqué au meuble dans le référentiel terrestre, projeté selon la verticale, donne $\|\vec{N}\| = mg$. Le PFD projeté selon l'horizontale indique que pour que l'accélération soit non nulle, il faut que $\|\vec{F}\| > \|\vec{T}\|$.

On conclut que la force minimale pour la mise en mouvement est donnée par :

$$\|\vec{F}\|_{\min} = \|\vec{T}\| = f_s mg$$

2. En tirant au point A on risque de faire basculer le meuble. Calculer à quelle condition le basculement se produit. *Indice : au moment où le meuble commence à basculer, il ne tient que sur son coin inférieur droit. Donc il s'agit du point d'application de la réaction du support.*

Si le meuble bascule, on va avoir une rotation autour du coin inférieur droit du meuble, noté B . A la limite du basculement, le meuble est soumis aux forces suivantes :

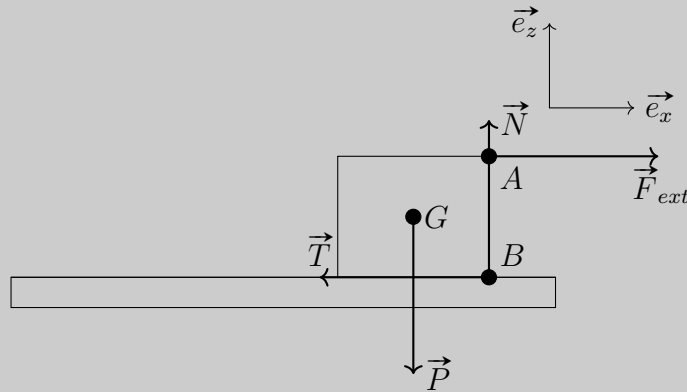
- Son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ qui s'applique au centre de gravité du meuble, noté G et situé au centre du meuble, et de moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{P}) = \vec{BG} \wedge (-m\vec{g}) = -\frac{a}{2}mg\vec{e}_y$$

- La force exercée par l'opérateur, qui s'applique au point A , de moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F} = h\|\vec{F}\|\vec{e}_y$$

- La réaction du support, qui s'applique au point B , et qui a donc un moment nul au point B .



Il y aura basculement si la somme des moments des forces contribue à faire tourner le meuble dans le sens horaire, donc si $\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{F}_{\text{ext}}) \cdot \vec{e}_y > 0$. La condition de basculement est donc :

$$h\|\vec{F}\| > \frac{a}{2}mg$$

Or on a vu que pour mettre le meuble en mouvement, il faut appliquer une force $\|\vec{F}\| > f_s mg$. On ne pourra pas déplacer le meuble sans le faire basculer si $hf_s mg > \frac{a}{2}mg$ donc la condition de basculement est :

$$f_s > \frac{a}{2h}$$

Pour éviter le basculement, il faut un faible coefficient de frottement, un meuble large et pas trop haut.

3. Une fois le solide en mouvement, quelle force faut-il appliquer pour déplacer le meuble à vitesse constante ?

Une fois le solide en mouvement, la loi de frottement de Coulomb s'écrit $\|\vec{T}\| = f_s \|\vec{N}\|$. De plus, la composante tangentielle s'oppose à la vitesse. On a donc (après un raisonnement similaire à celui de la question 1) :

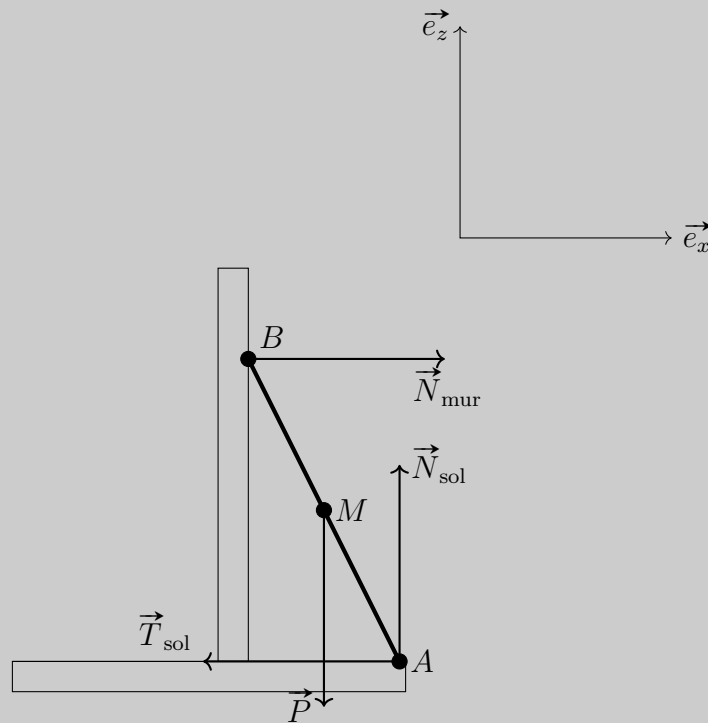
$$\|\vec{F}\| = f_d mg$$

3 Échelle ★★

Une personne de masse m considérée comme ponctuelle monte sur une échelle de longueur L dont on négligera la masse. On considère que l'échelle peut glisser sans frottement contre le mur. En revanche, le contact de l'échelle avec le sol donne lieu à un frottement qui obéit

aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement statique f_s . On note α l'angle entre l'échelle et le sol.

1. Faire un schéma des forces mises en jeu, et justifier leur point d'application et leur direction.



On considère le système S constitué de l'échelle et de la personne qui se trouve dessus au point M . Il est soumis à :

- Le poids de la personne $\vec{P} = m\vec{g}$ qui s'applique en M ;
- La réaction du sol $\vec{R}_{\text{sol}} = \vec{N}_{\text{sol}} + \vec{T}_{\text{sol}}$ qui s'applique au point de contact A entre l'échelle et le sol;
- La réaction du mur $\vec{R}_{\text{mur}} = \vec{N}_{\text{mur}}$ qui s'applique au point de contact B entre l'échelle et le mur. La réaction est normale car on considère que l'échelle glisse parfaitement sur le mur.

2. A quelle condition la personne peut-elle monter jusqu'en haut de l'échelle sans que celle-ci ne bascule ?

La condition de non glissement de l'échelle s'écrit $||\vec{T}_{\text{sol}}|| < f_s ||\vec{N}_{\text{sol}}||$. Par ailleurs, on applique au système S , dans le référentiel terrestre :

- Le PFD selon la verticale, qui donne $||\vec{N}_{\text{sol}}|| = mg$
- Le PFD selon l'horizontale qui donne $||\vec{T}_{\text{sol}}|| = ||\vec{N}_{\text{mur}}||$

Comme on ne connaît pas $||\vec{N}_{\text{mur}}||$ il nous faut une autre condition pour le déterminer. Pour cela, on utilise l'équilibre des moments des forces et on applique le théorème du moment cinétique au système S , évalué au point A :

$$\vec{0} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{N}_{\text{mur}})$$

où on a utilisé le fait que $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{R}_{\text{sol}}) = \vec{0}$ car le moment est calculé au point d'application de la force. Par ailleurs, si l'on suppose que la personne se trouve au sommet de l'échelle ($M = B$), ce qui correspond au risque maximal de basculement :

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{N}_{\text{mur}}) = L \sin(\alpha) ||\vec{N}_{\text{mur}}|| \vec{e}_y \quad (4)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = -L \cos(\alpha) mg \vec{e}_y \quad (5)$$

On en déduit qu'à l'équilibre de l'échelle : $L ||\vec{N}_{\text{mur}}|| \sin \alpha = L mg \cos \alpha$, ou encore $||\vec{N}_{\text{mur}}|| = \frac{mg}{\tan \alpha}$.

La condition de non glissement devient donc, en remplaçant $||\vec{N}_{\text{mur}}||$ par sa valeur :

$$f_s \geq \frac{1}{\tan \alpha}$$

Ainsi, la montée est plus sécurisée si f_s et α sont grands. On remarque aussi que le risque de glissement de l'échelle est indépendant de la masse de la personne qui monte sur l'échelle.

4 Slip-stick et séismes ♥ ★★

Les frottements solides peuvent générer des mouvements irréguliers de glissement puis blocages, que l'on appelle communément *slip-stick*. Ce type de mouvement saccadé est très commun :

- Le stick-slip décrit par exemple le mouvement de baskets sur un sol en plastique dans un gymnase, qui produit un bruit caractéristique ;
- Il est aussi utilisé en musique dans les instruments à cordes (violon, violoncelle...) pour produire des notes, via le frottement solide entre les cordes et l'archet ;

- Le stick-slip est aussi un excellent modèle des failles géologiques qui séparent deux plaques tectoniques, avec des phases de blocage et des phases de glissement, provoquées par le frottement solide entre les deux plaques.

Le modèle le plus simplifié du stick-slip correspond à un système masse-ressort. Considérons un solide de masse m posé sur un tapis roulant de vitesse $\vec{v}_t$ fixe régulée par un moteur. Des frottements solides, de coefficients de frottement statique f_s et dynamique f_d , existent entre le mobile et le tapis. Pour plus de simplicité, on repère la masse par sa position x définie de sorte à ce que le ressort soit à sa longueur à vide ($l = l_0$) lorsque $x = 0$.

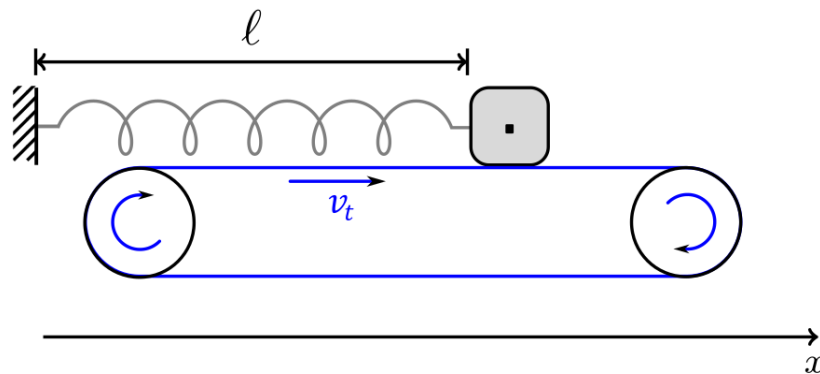


Figure 2: Modèle du phénomène de Stick-Slip. On prend pour exemple un objet attaché à un ressort se déplaçant sur un tapis roulant. Source : Poly de TD de S. Najid.

1. On démarre un moteur qui met instantanément le tapis en translation à la vitesse constante $\vec{v}_t$. Proposer une explication qualitative de ce qui se passe.

D'abord, la masse est entraînée par le tapis. Mais lorsque la force de rappel du ressort dépasse la force maximale de frottement statique, on va avoir glissement et la masse va revenir à sa position initiale (voire même avant). Puis elle va ralentir, et à nouveau être entraînée par le tapis.

2. Déterminer l'allongement maximal x_{max} du ressort pour lequel la masse cesse d'être entraînée par le tapis.

La masse est soumise à :

- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$
- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction du tapis $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$

On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Tant que la masse ne glisse pas, elle a un mouvement rectiligne uniforme, ainsi la somme des forces extérieures est nulle. On en déduit : $\begin{cases} \vec{N} = -m\vec{g} \\ \vec{T} = kx\vec{e}_x \end{cases}$ La condition d'adhérence s'écrit $\|\vec{T}\| \leq f_s\|\vec{N}\|$, ou encore $kx \leq f_s mg$. On en déduit qu'il y a adhérence tant que x est inférieur à la position maximale que la masse peut atteindre :

$$x_{\max} = \frac{f_s mg}{k}$$

3. Donner l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse une fois que la phase d'entraînement est finie (à partir de l'instant où la masse a une vitesse de glissement non nulle par rapport au tapis). Tracer l'allure de la solution. On pourra introduire la fonction signe telle que $\text{sgn}(x) = +1$ si $x > 0$ et -1 sinon.

Une fois la phase d'adhérence terminée, la masse subit une force de frottement dynamique et la loi de Coulomb donne :

$$\|\vec{T}\| = f_d\|\vec{N}\| = f_d mg$$

La force s'oppose à la vitesse de glissement $\vec{v}_g = (\dot{x} - v_0)\vec{e}_x$. Ainsi :

$$\vec{T} = f_d mg \times \text{sgn}(v_0 - \dot{x})\vec{e}_x$$

On projette le PFD appliqué à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen selon $\vec{e}_x$:

$$m\ddot{x} = -kx + f_d mg \times \text{sgn}(v_0 - \dot{x})$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ on trouve :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -f_d g \text{sgn}(\dot{x} - v_0)$$

Il s'agit d'une équation d'oscillateur harmonique amortie par un terme de frottement solide. Si f_d est petit la solution aura une allure sinusoïdale, et cette allure pourra être déformée si f_d est suffisamment important.

4. Quelle est la condition nécessaire sur la vitesse de la masse pour que la phase de glissement s'arrête ? Quelle condition sur la position de la masse permet de maintenir la condition d'arrêt des lois de Coulomb ?

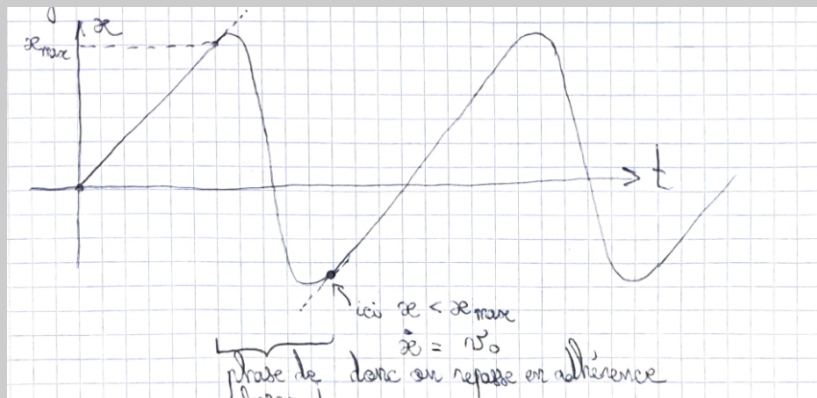
La phase de glissement s'arrête si la vitesse de glissement de la masse par rapport au tapis est nulle soit :

$$\vec{v}_g = \dot{x}\vec{e}_x - v_0\vec{e}_x = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\dot{x} = v_0}$$

De plus, il faut que la condition d'adhérence soit vérifiée, on a vu en Q1 que cela implique $\boxed{x \leq x_{\max}}$.

5. Justifier que la situation est alors périodique. En supposant que la phase de glissement est très rapide par rapport à la phase de blocage, estimer la période du mouvement. Tracer l'allure de la fonction $x(t)$.

Une fois que la masse s'est arrêtée de glisser, on se retrouve à nouveau dans la première phase : la masse va avancer jusqu'à $x_{\max}$ à la vitesse v_0 , puis la phase de glissement va recommencer. En supposant que le tapis avance suffisamment lentement, la phase de glissement peut être considérée comme courte devant la phase d'adhérence. La période du mouvement est alors de l'ordre de $T \sim x_{\max}/v_0$.



6. Application numérique pour un séisme : la plaque Caraïbe et la plaque Atlantique se déplacent l'une par rapport à l'autre avec une vitesse relative de $v_0 = 2 \text{ cm} \cdot \text{an}^{-1}$. Le coefficient de frottement statique est $f_s \approx 0.7$. Enfin, l'élasticité des plaques tectoniques correspond à un rapport $k/m \approx 20 \text{ s}^{-2}$.¹ Commenter l'ordre de grandeur obtenu.

On a $T \sim \frac{x_{\max}}{v_0} \sim \frac{f_s m g}{k v_0}$.

Or $v_0 = 2 \text{ cm} \cdot \text{an}^{-1}$. L'application numérique donne $\boxed{T \sim 17 \text{ ans}}$.

¹Ce rapport équivalent est calculé à partir de résultats de mesures réalisées en laboratoire sur des blocs de granite par Cheng Mei, Sylvain Barbot et Wei Wu et publiées en 2021 (<https://doi.org/10.1029/2020GL091807>), en prenant une faille de 30 km de profondeur et une densité des roches de $3000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

L'ordre de grandeur du temps qui sépare deux séismes majeurs dans les Antilles est effectivement de plusieurs dizaines d'années. On observe plutôt $T \sim 40 - 50$ ans, les derniers séismes majeurs en Guadeloupe étant ceux de 1914, 1969 et 2004.

5 Interprétation microscopique des lois de Coulomb

★★★

Nous avons vu les lois du frottement qui s'appliquent au contact entre deux solides Σ_2 et Σ_1 en glissement relatif le long de leur interface, et nous voulons leur apporter une interprétation microscopique. Dans ce contexte, il est fondamental de distinguer l'aire apparente S de cette interface, telle que l'on peut la percevoir à l'échelle macroscopique, de l'aire réelle de contact A . En effet, la surface d'un solide, rugueuse à l'échelle micrométrique, présente des aspérités de hauteurs diverses. Seules les plus proéminentes de chacun des solides se rencontrent et se déforment, faisant apparaître de petites zones plates appelées jonctions où l'interaction entre les solides se concentre.

On note A_1 l'aire d'une jonction et $\vec{R}_1 = R_{1x}\vec{e}_x + R_{1z}\vec{e}_z$ la résultante des forces exercée par Σ_2 sur Σ_1 au niveau de cette jonction. Le vecteur unitaire $\vec{e}_z$ est perpendiculaire à l'interface apparente des deux solides ; $\vec{e}_x$ lui est parallèle dans la direction du glissement. La réunion de toutes les jonctions donne l'aire réelle de contact A sur laquelle Σ_1 est soumis à des efforts de résultante $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_z\vec{e}_z$

Nous nous intéressons aux deux propriétés suivantes émergeant des lois de Coulomb :

- $|R_x|$ est proportionnelle à R_z , le facteur de proportionnalité dépendant de la nature des matériaux en contact ;
- R_x est indépendante de la surface apparente de contact S .

L'interprétation de ces observations date de 1950 environ et repose sur l'analyse des phénomènes ayant lieu au niveau des jonctions. En effet, ces jonctions se déforment sous l'effet des efforts perpendiculaires à l'interface et un contact intime s'y crée entre les deux solides. Pour déplacer les uns contre les autres les atomes de Σ_1 et Σ_2 en contact dans une jonction d'aire A_1 , il faut exercer une force tangentielle minimale $R_{x1} = \tau_c A_1$. La force surfacique τ_c , aussi appelée contrainte de cisaillement, est liée à la nature des matériaux.

Deux types de déformation des jonctions sont envisagés tour à tour dans la suite : les déformations plastiques d'une part et les déformations élastiques d'autre part.

5.1 Cas des déformations plastiques

Dans ce premier cas, on admet que $R_{z1} = \sigma_c A_1$ dès lors qu'il y a contact entre deux jonctions, quelle que soit l'amplitude de la déformation. La grandeur σ_c caractérise la dureté des

matériaux.

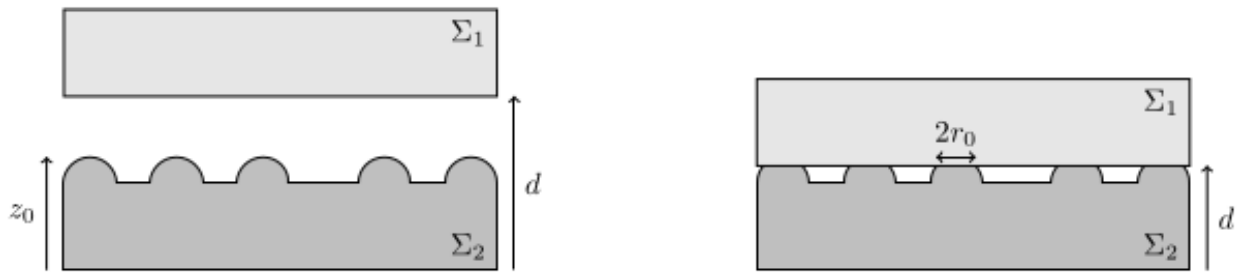


Figure 3: Contact sur une surface modélisée par une série de bosses sphériques.

1. (a) Quelle relation existe-t-il entre A (aire de contact réelle), R_z et σ_c ?

La réaction normale totale du support est la somme de toutes les réactions normales de chacune des jonctions :

$$R_z = \sum_{\text{jonctions}} R_{z1} = \sum_{\text{jonctions}} \sigma_c A_1 = \sigma_c \sum_{\text{jonctions}} A_1$$

On en déduit :

$$\boxed{R_z = \sigma_c A}$$

- (b) Calculer numériquement la valeur de A pour un bloc d'acier parallélépipédique de 300 g reposant sur une table d'acier horizontale. Pour $S = 24 \text{ cm}^2$, quelle fraction de l'aire apparente S représente l'aire de contact réelle A ? On donne $\sigma_c = 1 \times 10^9 \text{ Pa}$.

Pour un bloc d'acier de $m = 300 \text{ g}$, la réaction du support équilibre le poids et $R_z = mg$, d'où $A = \frac{mg}{\sigma_c}$.

A.N. : $A \approx 2.9 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$.

On en déduit $\frac{A}{S} = \frac{2.9 \cdot 10^{-9}}{24 \cdot 10^{-4}} \approx \boxed{1.2 \cdot 10^{-6}}$, ainsi $A \ll S$.

- (c) En supposant qu'il y a glissement d'un solide sur l'autre et que toutes les jonctions glissent en même temps, établir le lien entre $|R_x|$, R_z , σ_c et τ_c .

En cas de glissement, d'après l'énoncé : $|R_{x1}| = \tau_c A_1$. En sommant sur toutes les jonctions (méthode similaire à Q1a), on obtient $|R_x| = \tau_c A$. On en déduit :

$$\boxed{\frac{|R_x|}{R_z} = \frac{\tau_c}{\sigma_c}}$$

- (d) Cette modélisation permet-elle d'expliquer les deux propriétés issues des lois de Coulomb et introduites précédemment ? Pourquoi ?

5.2 Cas des déformations élastiques

Dans ce second cas nous supposons pour simplifier que la surface de Σ_1 est parfaitement lisse et indéformable alors que celle de Σ_2 présente N aspérités identiques modélisées par des sphères de rayon R (partie gauche de la figure 3). Par rapport à un plan de référence, les sommets de ces sphères se trouvent initialement à la hauteur z_0 . Elles se déforment lorsque la surface plane de Σ_1 se trouve à la hauteur $d < z_0$ (partie droite de la figure 3).

Chacune forme alors une jonction circulaire de rayon r_0 et voit sa hauteur réduite de h . Un calcul dû à H. Hertz montre que pour des déformations élastiques :

$$r_0 = R^{1/3}(\kappa R_{z1})^{1/3} \quad \text{et} \quad h = R^{-1/3}(\kappa R_{z1})^{2/3} \quad (6)$$

où κ est une constante caractéristique du matériau constituant Σ_2 .

- (e) (a) Relier l'aire de contact A à R_z, R, κ et N .

L'aire de contact pour une jonction est :

$$A_1 = \pi r_0^2 = \pi R^{2/3}(\kappa R_{z1})^{2/3}$$

Les aspérités étant identiques, on a simplement $A = NA_1$ et $R_z = NR_{z1}$. En combinant ces trois équations, on obtient alors :

$$A = N^{1/3} \times \pi R^{2/3}(\kappa R_z)^{2/3}$$

- (b) Cette modélisation permet-elle d'expliquer les deux propriétés introduites précédemment et issues des lois de Coulomb ? Pourquoi ?

On a toujours $|R_x| = \tau_c A$ et donc désormais :

$$\frac{|R_x|}{R_z} = \pi R^{2/3} \tau_c \kappa^{2/3} \times \frac{N^{1/3}}{R_z^{1/3}}$$

Ce rapport n'est pas constant, il dépend de R_z et aussi de la surface apparente de contact S qui est proportionnelle au nombre d'aspérités N . Donc ce modèle n'explique pas les lois du frottement de Coulomb.

- (c) En réalité, les sommets des aspérités de surface, ici représentés par les protubérances sphériques, ne se trouvent pas tous à la même hauteur avant le contact avec Σ_1 .

La diminution de d associée à l'augmentation de R_z ne provoque pas seulement l'élargissement de chacun des contacts circulaires mais permet aussi la formation de nouvelles jonctions. Dans le modèle de Greenwood, on note $dN = \Psi(z)dz$ le nombre de bosses sphériques dont le sommet se trouve initialement à une cote comprise entre z et $z + dz$.

- (a) Avec un nombre d'aspérités N identique à celui du modèle précédent, que vaut $\int_0^\infty \Psi(z)dz$? On obtient le nombre total d'aspérités :

$$\int_0^\infty \psi(z)dz = \int_0^\infty dN = N$$

- (b) Lorsque Σ_1 se trouve à la cote d , donner une expression intégrale du nombre de jonctions formées N_J .

Les jonctions se forment si et seulement si elles ont un sommet à une cote $z > d$, ainsi :

$$N_J = \int_d^\infty \psi(z)dz$$

- (c) Donner dans les mêmes conditions une expression intégrale de l'aire de contact A .

L'aire de contact est la somme des contributions des aires de chacun des groupes de jonctions entre z et $z + dz$:

$$dA = dN \times A_1(z) = dN \times \pi r_0(z)^2$$

Or on sait que :
$$\begin{cases} r_0 = R^{1/3}(\kappa R_{z1})^{1/3} \\ h = R^{-1/3}(\kappa R_{z1})^{2/3} \end{cases}$$

D'où $r_0^2 = Rh$.

Et h correspond à la réduction de hauteur de la sphère : $h = z - d$. On en déduit que $r_0(z)^2 = (z - d)R$. Ainsi :

$$dA = dN \times \pi R(z - d) = \pi R(z - d)\psi(z)dz$$

On obtient alors l'aire totale :

$$A = \int_d^\infty \pi R(z - d)\psi(z)dz$$

- (d) Faire de même pour R_z .

On a de même : $dR_z = dN \times R_{z1}(z)$.

Or $h = z - d = R^{-1/3}(\kappa R_{z1})^{2/3}$

Ainsi $R_{z1} = \frac{1}{\kappa}(z - d)^{3/2}R^{1/2}$

et $dR_z = \frac{\psi(z)dz}{\kappa}(z - d)^{3/2}R^{1/2}$

On en déduit par intégration :

$$R_z = \int_d^\infty \frac{R^{1/2}}{\kappa} (z - d)^{3/2} \psi(z) dz$$

- (e) Fréquemment, la fonction $\Psi(z)$ peut être approximée par $\Psi(z) = \Psi_0 e^{-\alpha z}$.
Calculer explicitement A et R_z en fonction de Ψ_0, α, d, R et κ .

Alors :

$$A = \pi \Psi_0 R \int_d^\infty e^{-\alpha z} (z - d) dz \quad (7)$$

$$= \pi \Psi_0 R e^{-\alpha d} \int_0^\infty u e^{-\alpha u} du \quad (u = z - d) \quad (8)$$

$$= \boxed{\frac{\pi \Psi_0 R}{\alpha^2} e^{-\alpha d}} \quad (9)$$

De même :

$$R_z = \Psi_0 \frac{R^{1/2}}{\kappa} \int_d^\infty e^{-\alpha z} (z - d)^{3/2} dz \quad (10)$$

$$= \Psi_0 \frac{R^{1/2}}{\kappa} e^{-\alpha d} \int_0^\infty e^{-\alpha u} u^{3/2} du \quad (11)$$

$$= \boxed{\frac{3 \Psi_0 \sqrt{\pi R}}{4 \kappa \alpha^{5/2}} e^{-\alpha d}} \quad (12)$$

- (f) Le modèle de Greenwood permet-il d'expliquer les deux propriétés introduites précédemment et issues des lois de Coulomb ? Pourquoi ?

On a toujours $|R_x| = \tau_c A$ et donc :

$$\frac{|R_x|}{R_z} = \tau_c \frac{\pi \Psi_0 R}{\alpha^2} \cdot \frac{4 \kappa \alpha^{5/2}}{3 \Psi_0 \sqrt{\pi R}} = \frac{4}{3} \tau_c \kappa \sqrt{\pi \alpha R}$$

Ce rapport ne dépend que de τ_c, κ, α et R qui sont des propriétés du matériau indépendantes de R_z et de la surface de contact. Donc le modèle permet d'expliquer les lois du frottement solide.

Aide au calcul :

$$\int_0^\infty u e^{-\alpha u} du = \frac{1}{\alpha^2} \quad \int_0^\infty u^{3/2} e^{-\alpha u} du = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^{5/2}} \quad (13)$$

6 Traîneau sur la glace ★★★

(Remarque : je trouve certaines questions peu précises, mais j'ai préféré les laisser ici telles qu'elles ont été posées au concours. La Q12 est difficile.)

Un traîneau à chiens est un dispositif de masse totale M (le pilote, ou *musher*, est compris dans cette masse) qui peut glisser sur la surface de la glace avec des coefficients de glissement statique (avant le démarrage) μ_s et dynamique (en mouvement) μ_d .

❑ 12 — Les chiens sont reliés au traîneau par des éléments de corde tendus, de masse négligeable et inextensibles. Montrer qu'un tel élément de corde transmet les tensions et que celles-ci sont colinéaires à la corde.

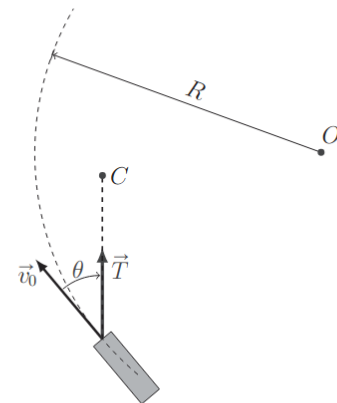
❑ 13 — Le trajet se fait soit à l'horizontale, soit sur une faible pente ascendante caractérisée par l'angle α avec l'horizontale. Montrer que, dans ce dernier cas, tout se passe comme dans un mouvement horizontal sous réserve de remplacer μ_d par μ'_d , que l'on exprimera.

L'intensité de la force de traction totale F exercée par l'ensemble des chiens dépend de leur vitesse v et on adoptera le modèle $F = F_0 - \beta v$ où F_0 et β sont des constantes positives. On prendra les valeurs $M = 5,0 \times 10^2 \text{ kg}$, $\alpha = 0$, $\mu_d = 5,0 \times 10^{-2}$ et $\mu_s = 8,0 \times 10^{-2}$.

❑ 14 — Déterminer la valeur minimale de F_0 permettant le démarrage du traîneau.

❑ 15 — La vitesse du traîneau en régime stationnaire est $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, atteinte à 5% près au bout d'un temps $t_1 = 5 \text{ s}$. Exprimer d'une part β en fonction de M et t_1 et d'autre part F_0 en fonction de β , v_0 , μ_d , M et g . Calculer leurs valeurs respectives.

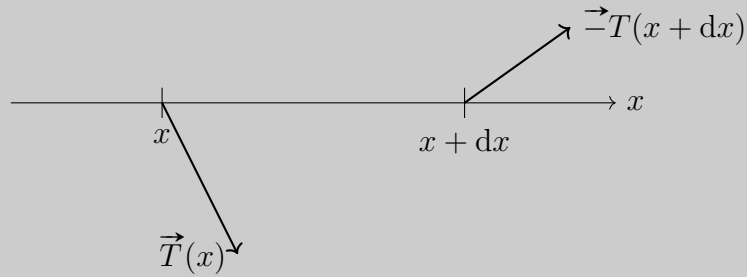
Toujours à vitesse constante v_0 , le traîneau aborde une courbe à plat qu'on assimilera à un cercle de centre O et de rayon R (cf. fig. 4). Les chiens (modélisés ici en un seul point C) doivent donc tirer vers l'intérieur du cercle.



❑ 16 — Déterminer en fonction des données la tension $\vec{T}$ de la corde et l'angle θ entre la force de traction et la trajectoire.

FIGURE 4 – Trajectoire circulaire du traîneau

12. On considère un élément de corde infinitésimal entre x et $x + dx$ soumis à des tensions :



On note $\vec{T}(x)$ la force de tension exercée par la portion de la corde à gauche de x sur la portion de la corde à droite de x . Le morceau de corde entre x et $x + dx$ est donc soumis aux forces $\vec{T}(x)$ et (par principe d'action-réaction) $-\vec{T}(x + dx)$. On note dm la masse du morceau de corde et on lui applique le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$dm \vec{a} = \vec{0} = -\vec{T}(x + dx) + \vec{T}(x)$$

On en déduit $\vec{T}(x) = \vec{T}(x + dx)$, c'est-à-dire que le fil transmet la tension sans la modifier.

Par ailleurs, on peut appliquer le théorème du moment cinétique au niveau du point O , centre de la portion de corde (à l'abscisse $x + dx/2$) :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} = -\frac{dx}{2} \vec{e}_x \wedge \vec{T}(x) - \frac{dx}{2} \vec{e}_x \wedge \vec{T}(x + dx)$$

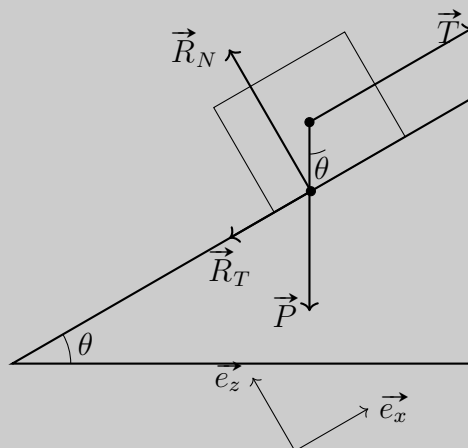
Comme $\vec{T}(x) = \vec{T}(x + dx)$, cette expression se simplifie :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{T}(x) = \vec{0}$$

ce qui implique que la force de tension est colinéaire au fil.

Ainsi, le fil transmet la tension et cette tension est nécessairement colinéaire au fil.

13. On réalise le schéma suivant :



Le PFD appliqué au traîneau dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne :

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = M\vec{g} + \vec{T} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$$

où $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$ est la réaction du support.

Comme on est en phase de glissement : $||\vec{R}_T|| = \mu_d ||\vec{R}_N||$.

De plus, en projetant le PFD sur $\vec{e}_z$ on a $||\vec{R}_N|| = Mg \cos \alpha$. D'où $||\vec{R}_T|| = \mu_d Mg \cos \alpha$.

On projette le PFD selon $\vec{e}_x$, avec $\vec{v} = v\vec{e}_x$:

$$M \frac{dv}{dt} = ||\vec{T}|| - Mg \sin \alpha - \mu_d Mg \cos \alpha \quad (14)$$

$$= ||\vec{T}|| - (\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) Mg \quad (15)$$

Dans le cas plat, $\alpha = 0$ et donc :

$$M \frac{dv}{dt} = ||\vec{T}|| - \mu_d Mg$$

Tout se passe donc comme si le sol était plat avec un coefficient de frottement $\mu'_d = \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$, ou encore, avec l'approximation des petits angles :

$$\mu'_d \approx \mu_d + \alpha$$

14. Pour démarrer le traîneau, la loi de Coulomb du glissement n'est plus vérifiée, et on se place en limite de la condition d'adhérence : $||\vec{R}_T|| = \mu_s ||\vec{R}_N||$.

De plus, juste avant que le traîneau démarre, on a $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$. Le PFD projeté selon $\vec{e}_x$ devient alors :

$$0 = ||\vec{T}|| - \mu_s Mg = F_0 - \mu_s Mg$$

Il faut donc une force :

$$F_0 = \mu_s Mg \approx 4.0 \cdot 10^2 \text{ N}$$

15. Lorsque le traîneau se déplace, on est à nouveau dans le cas de la Q13 et :

$$M \frac{dv}{dt} = ||\vec{T}|| - \mu_d Mg = (F_0 - \mu_d Mg) - \beta v$$

Cette équation se réécrit :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$$

avec $\tau = \frac{M}{\beta}$ le temps caractéristique de cette équation d'ordre 1, et $v_0 = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta}$ la vitesse en régime stationnaire.

On atteint 95 % de v_0 au bout de 3τ , c'est-à-dire :

$$t_1 = 3\tau = \frac{3M}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{3M}{t_1} = 3 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Et $\boxed{F_0 = \beta v_0 + \mu_d Mg = 1.1 \text{ kN}}$.

16. On se place dans les coordonnées polaires de centre O dans le plan du mouvement. Le mouvement étant circulaire uniforme : $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r$.

Par ailleurs, par la loi de Coulomb, la force tangentielle de frottement s'oppose au mouvement et est donc perpendiculaire à $\vec{e}_r$. Le PFD appliqué au traîneau et projeté selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ s'écrit donc :

$$-M\frac{v_0^2}{R} = -\|\vec{T}\| \sin \theta \quad (16)$$

$$+ = \|\vec{T}\| \cos \theta - \|\vec{R}_T\| \quad (17)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \|\vec{T}\| \cos \theta = \|\vec{R}_T\| = \mu_d Mg \\ \|\vec{T}\| \sin \theta = \frac{Mv_0^2}{R} \end{cases}$$

Le quotient des deux équations et la somme de leurs carrés donnent alors les expressions recherchées :

$$\boxed{\tan \theta = \frac{v_0^2}{\mu_d Rg}}$$

et

$$\boxed{\|\vec{T}\| = M\sqrt{(\mu_d g)^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}}$$