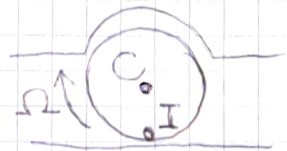


TD2 - Frottements Correction

Exercice 1 - Freinage d'un véhicule

1. * Avant le freinage : la roue roule sur le sol. Le centre de la roue avance à une vitesse $\vec{v}(C/sol) \neq \vec{0}$ mais comme la roue tourne à une vitesse de rotation Ω , le point I de la roue ne se déplace pas par rapport au sol : $\vec{v}(I/sol) = \vec{0}$. On est en phase d'adhérence.



* Après le début du freinage : la roue ne tourne plus. La vitesse de glissement $\vec{v}(I/sol) \neq \vec{0}$ donc on est en situation de glissement.

2. On utilise une approche énergétique. Lors du glissement, la voiture perd son énergie cinétique initiale :

$$E_{c, \text{initiale}} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad E_{c, \text{finale}} = 0$$

En supposant le sol plat, la variation d'énergie potentielle de pesanteur est nulle.

Enfin la force de frottement travaille (la réaction normale ne travaille pas). Comme on est en situation de glissement la norme de la force tangentielle est $\|\vec{T}\| = f_s \|\vec{N}\|$.

Or en appliquant le PFD à la voiture projeté sur la verticale on trouve $\|\vec{N}\| = mg$.

Enfin le travail de la force de frottement est donné par :

$$W = - \|\vec{T}\| \times d = - f_s \cdot m \cdot g \cdot d$$

où d est la distance parcourue lors du freinage. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique on trouve :

$$\Delta E_c = W \Leftrightarrow -\frac{1}{2} m v_0^2 = -f_l m g d$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{v_0^2}{2 f_l g}$$

On constate que la distance de freinage :

- * Diminue si on augmente le coefficient de frottement f_l .
C'est la raison pour laquelle on essaye de construire les pneus pour maximiser f_l .

- * Augmente avec le carré de la vitesse : si on va deux fois plus vite, la distance de freinage est 4 fois plus longue.

3. A.N : $v_0 = 80 \times \frac{1000}{3600} = 22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Sur route sèche : $d = 25 \text{ m}$ Sur route humide : $d = 50 \text{ m}$

2 - Déplacement d'un meuble

1. Le meuble est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$; la réaction du support $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ et la force $\vec{F}$ appliquée.

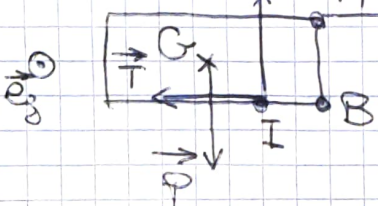
Au moment de la mise en mouvement, on arrive en limite de la condition de non glissement et $\|\vec{T}\| = f_s \|\vec{N}\|$.

Or le PFD selon la verticale donne $\|\vec{N}\| = mg$.

On en déduit que lors de la mise en mouvement :

$$\|\vec{F}\| = \|\vec{T}\| = f_s mg$$

2.



On représente ici le meuble, les forces qui s'y appliquent et leur point d'application.

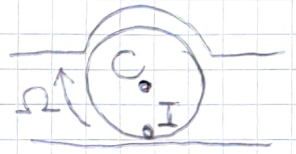
Le poids s'applique en G centre de gravité du meuble.

La réaction du support s'applique en un point I au niveau du bas du meuble. Au moment du basculement : $I = B$.

TD2 - Frottements Correction

Exercice 1 - Freinage d'un véhicule

1. * Avant le freinage : la roue roule sur le sol. Le centre de la roue avance à une vitesse $\vec{v}(C/sol) \neq \vec{0}$ mais comme la roue tourne à une vitesse de rotation Ω , le point I de la roue ne se déplace par rapport au sol : $\vec{v}(I/sol) = \vec{0}$. On est en phase d'adhérence.



* Après le début du freinage : la roue ne tourne plus. La vitesse de glissement $\vec{v}(I/sol) \neq \vec{0}$ donc on est en situation de glissement.

2. On utilise une approche énergétique. Lors du glissement, la voiture perd son énergie cinétique initiale :

$$E_c^{initiale} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad E_c^{finale} = 0$$

En supposant le sol plat, la variation d'énergie potentielle de pesanteur est nulle.

Enfin la force de frottement travaille (la réaction normale ne travaille pas). Comme on est en situation de glissement la norme de la force tangentielle est $\|\vec{T}\| = f_s \|\vec{N}\|$.

Or en appliquant le PFD à la voiture projetée sur la verticale on trouve $\|\vec{N}\| = mg$.

Enfin le travail de la force de frottement est donné par :

$$W = - \|\vec{T}\| \times d = - f_s \cdot m \cdot g \cdot d$$

où d est la distance parcourue lors du freinage. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique on trouve :

- La réaction du mur $\vec{R}_{\text{mur}} = \vec{N}_{\text{mur}}$. $\vec{T}_{\text{mur}} = \vec{0}$ car on considère que l'échelle glisse parfaitement sur le mur. Elle s'applique en B.

2. On se place à la limite du glissement pour évaluer la limite à partir de laquelle l'échelle va basculer. Dans le cadre de cette limite : $\|\vec{T}_{\text{sol}}\| = f_s \|\vec{N}_{\text{sol}}\|$.

2. La condition de non glissement s'écrit $\|\vec{T}_{\text{sol}}\| \leq f_s \|\vec{N}_{\text{sol}}\|$.

Par ailleurs on applique au système S :

- le PFD selon l'axe vertical qui donne $\|\vec{N}_{\text{sol}}\| = mg$
- le PFD selon l'horizontale qui donne $\|\vec{T}_{\text{sol}}\| = \|\vec{N}_{\text{mur}}\|$.

Comme on ne connaît pas $\|\vec{N}_{\text{mur}}\|$ il nous faut une autre condition pour le déterminer. On applique le théorème du moment cinétique à S évalué au point A :

$$\vec{0} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{N}_{\text{mur}}) + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{R}_{\text{sol}})}_{= \vec{0} \text{ (point d'application)}}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{N}_{\text{mur}}) = L \sin(\alpha) \cdot \|\vec{N}_{\text{mur}}\| \vec{e}_y$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = -L \cos(\alpha) \times mg \vec{e}_y \quad \text{si on suppose que la personne se trouve en haut de l'échelle (M=B; risque maximal de basculement).}$$

$$\text{On en déduit } L \sin(\alpha) \|\vec{N}_{\text{mur}}\| = L \cos(\alpha) mg$$

$$\text{Soit } \|\vec{N}_{\text{mur}}\| = \frac{mg}{\tan \alpha}$$

La condition de non glissement devient donc :

$$\frac{mg}{\tan \alpha} \leq f_s mg \quad \text{soit} \quad \boxed{f_s \geq \frac{1}{\tan \alpha}}$$

La montée est plus sécurisée si f_s et α sont grands.

Rq : Le risque de glissement de l'échelle ne dépend pas de la masse de la personne qui monte.

Si le meuble bascule on va avoir rotation autour de B.
On calcule le moment des forces appliquées au point B :

* $M_B(\vec{R}) = \vec{0}$ car B est le point d'application de la réaction du support $\vec{R}$

* $M_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F} = -h \cdot \|\vec{F}\| \cdot \vec{e}_z$

* $M_B(\vec{P}) = \vec{BG} \wedge (-m\vec{g}) = + \frac{a}{2} m g \vec{e}_z$

Il y aura basculement si $M_B(\vec{F}_{ext}) \cdot \vec{e}_z < 0$ (au vu du sens de rotation) donc si $h \|\vec{F}\| > \frac{a}{2} m g$

On en a vu $\|\vec{F}\| = f_s m g$ pour mettre le meuble en mouvement.

On a donc basculement si $h f_s m g > \frac{a}{2} m g$

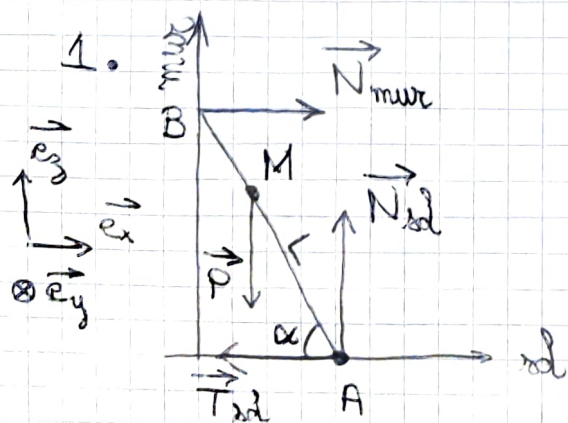
Soit : $\boxed{f_s > \frac{a}{2h}}$

Pour éviter le basculement il faut un ~~fort~~^{faible} coefficient de frottement, un meuble large et pas trop haut.

3. Une fois le solide en mouvement la loi du frottement de Coulomb s'écrit $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$. De plus la composante tangentielle s'oppose à la vitesse.

On a donc (après un raisonnement similaire à celui de la question 1) : $\boxed{\|\vec{F}\| = f_d \times m g}$

3 - Échelle



On considère le système S constitué de l'échelle et la personne qui se trouve dessus en M.

Il est soumis à :

* Le poids de la personne $\vec{P} = m\vec{g}$ qui s'applique en M

* La réaction du sol $\vec{R}_{sol} = \vec{T}_{sol} + \vec{N}_{sol}$ en A

4 - Slip - Stick et sismes

1. D'abord la masse est entraînée par le tapis. Mais lorsque la force de rappel du ressort dépasse la force maximale de frottement statique, on va avoir glissement et la masse va revenir à sa position initiale (voire même avant). Puis elle va ralentir et à nouveau être entraînée par le tapis.

2. La masse est soumise :

- À la force de rappel du ressort $\vec{F}_{\text{appel}} = -kx \vec{e}_x$
- À son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- À la réaction du tapis $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$

On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Tant que la masse ne glisse pas, elle a un mouvement rectiligne uniforme, ainsi : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

On en déduit
$$\begin{cases} \vec{N} = -m\vec{g} \\ \vec{T} = +kx \vec{e}_x \end{cases}$$

La condition de non glissement s'écrit $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$
soit $kx \leq f_s mg$, ou encore $x \leq x_{\text{max}}$ où

$x_{\text{max}} = \frac{f_s mg}{k}$ est la position maximale que la masse peut atteindre.

3. Une fois la phase d'adhérence terminée, la masse subit une force de frottement dynamique, $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\| = f_d mg$.
La force s'oppose à la vitesse de glissement $\vec{v}_g = (\dot{x} - v_0) \vec{e}_x$

Ainsi :
$$\vec{T} = f_d mg \times \text{sgn}(v_0 - \dot{x}) \vec{e}_x$$

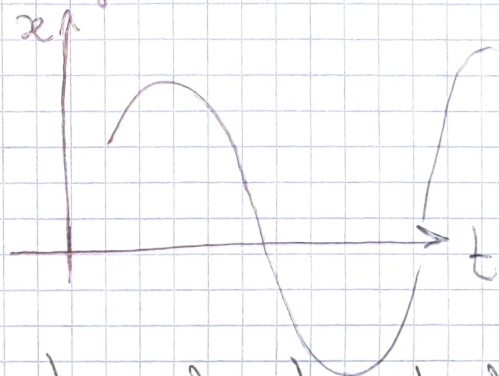
On projette le PFD appliqué à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen selon $\vec{e}_x$:

$$m\ddot{x} = -kx + f_d mg \times \text{sgn}(v_0 - \dot{x})$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ on trouve :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{1}{2}g \operatorname{sgn}(\dot{x} - v_0)$$

Il s'agit d'une équation d'oscillateur harmonique amortie par un terme de frottement solide. Si $\frac{1}{2}g$ est petit la solution aura une allure sinusoïdale :



4. La phase de glissement s'arrête si la vitesse de glissement de la masse par rapport au tapis est nulle, soit :

$$\vec{v}_g = \dot{x} \vec{e}_x - v_0 \vec{e}_x = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\dot{x} = v_0}$$

De plus il faut que la condition de non glissement soit vérifiée, on a vu en Q2 que cela implique $\boxed{x \leq x_{\max}}$

5. Dans ce cas on se retrouve dans la première phase : la masse va avancer jusqu'à $x_{\max}$ à la vitesse v_0 , puis la phase de glissement va recommencer :



ici $x < x_{\max}$
 $\dot{x} = v_0$
 donc on repasse en adhérence
 phase de glissement

La période du mouvement, en ordre de grandeur, est $T \sim \frac{x_{\max}}{v_0}$

$$6. \text{ On a } T \sim \frac{x_{\text{moy}}}{v_0} \sim \frac{\int_0^L m g}{R v_0}$$

$$\text{Or } v_0 = 2 \text{ cm} \cdot \text{an}^{-1} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{an}^{-1}$$

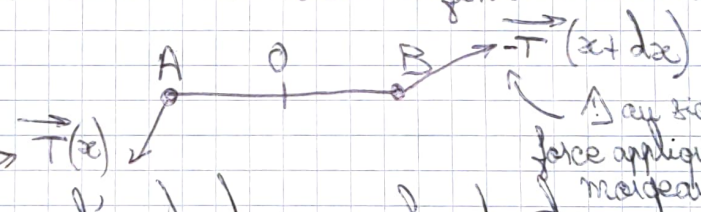
$$\text{A.N.: } T \sim \frac{0,7 \times 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{20 \times 10^{-2} \times 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{an}^{-1}} = 47 \text{ ans}$$

L'ordre de grandeur du temps qui sépare deux séismes majeurs dans les Antilles est effectivement de plusieurs dizaines d'années.

On observe en pratique plutôt $T \sim 40-50$ ans ; les derniers séismes majeurs en Guadeloupe étant ceux de 1914, 1969 et 2004

5 - Traîneau sur la glace

12. On considère un élément de corde infinitésimal soumis à des tensions :

$\vec{T}(x)$ et la force appliquée par le morceau de gauche $\rightarrow \vec{T}(x)$  $\vec{T}(x+dx)$

On ne suppose pour l'instant rien sur la direction de ces tensions.

Lorsque l'élément de corde est à l'équilibre, on peut lui appliquer le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m \vec{a} = \vec{0} = -\vec{T}(x+dx) + \vec{T}(x)$$

$$\text{D'où } \vec{T}(x) = \vec{T}(x+dx).$$

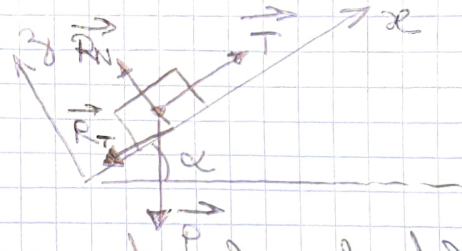
Par ailleurs on peut appliquer le théorème du moment cinétique au point O. À l'équilibre : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} = -\frac{dx}{2} \vec{e}_x \wedge \vec{T}(x) - \frac{dx}{2} \vec{e}_x \wedge \vec{T}(x+dx)$

On encore comme $\vec{T}(x) = \vec{T}(x+dx)$:

$$\vec{e}_x \wedge \vec{T}(x) = \vec{0}$$

Ainsi le fil transmet la tension ($\vec{T}(x) = \vec{T}(x+dx)$) et celle-ci est colinéaire à la corde ($\vec{T}(x) \wedge \vec{e}_x = \vec{0}$).

13. Nous faisons un schéma:



Le PFD appliqué au traineau dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne: $M \frac{d\vec{v}}{dt} = M\vec{g} + \vec{T} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$

où $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$ est la réaction du support.

Comme on est en phase de glissement: $\|\vec{R}_T\| = \mu_2 \|\vec{R}_N\|$.

De plus en projetant le PFD sur $\vec{e}_z$ on a $\|\vec{R}_N\| = Mg \cos \alpha$

D'où $\|\vec{R}_T\| = \mu_2 Mg \cos \alpha$.

On projette le PFD selon $\vec{e}_x$, avec $\vec{v} = v \vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} M \frac{dv}{dt} &= \|\vec{T}\| - Mg \sin \alpha - \mu_2 Mg \cos \alpha \\ &= \|\vec{T}\| - (\mu_2 \cos \alpha + \sin \alpha) Mg. \end{aligned}$$

Dans le cas plat $\alpha = 0$ d:

$$M \frac{dv}{dt} = \|\vec{T}\| - \mu_2 Mg.$$

Tout se passe comme si le sol était plat avec un coefficient de frottement

$$\mu_2' = \mu_2 \cos \alpha + \sin \alpha$$

ou encore $\boxed{\mu_2' \approx \mu_2 + \alpha}$ (car α est faible)

14. Pour démarrer le traineau, on n'a plus $\|\vec{R}_T\| = \mu_2 \|\vec{R}_N\|$ mais $\|\vec{R}_T\| = \mu_s \|\vec{R}_N\|$ (limite de la condition d'adhérence)

De plus juste avant que le traineau démarre $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$.

Le PFD projeté selon $\vec{e}_x$ devient:

$$0 = \|\vec{T}\| - \mu_s Mg = F_0 - \mu_s Mg.$$

Il faut donc $\boxed{F_0 = \mu_s Mg = 4,0 \cdot 10^2 \text{ N}}$

15. Lorsque le traineau se déplace, on est à nouveau dans le cas de la Q13 et:

$$M \frac{dv}{dt} = \|\vec{T}\| - \mu_2 Mg = (F_0 - \mu_2 Mg) - \beta v$$

Cette équation se réécrit :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\infty}}{\tau}$$

avec $\tau = \frac{M}{\beta}$ le temps caractéristique de cette équation d'ordre 1

et $v_{\infty} = \frac{F_0 - \mu_2 M g}{\beta}$ la vitesse en régime stationnaire ($v_0 = v_{\infty}$)

On atteint 95% de v_0 au bout de 3τ c'est-à-dire :

$$t_1 = 3\tau = \frac{3M}{\beta} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{3M}{t_1} = 3 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$\text{Et } \boxed{F_0 = \beta v_0 + \mu_2 M g = 1,1 \text{ kN}}$$

16. Le mouvement étant circulaire uniforme $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{v_0^2}{R} \vec{e}_r$.

Par la loi de Coulomb la force tangentielle de frottement s'oppose à la vitesse et est selon $-\vec{e}_\theta$:

Le PFD selon $\vec{e}_r$ s'écrit :

$$-\frac{M v_0^2}{R} = -\|\vec{T}\| \cdot \sin \theta$$

Et selon $\vec{e}_\theta$:

$$0 = \|\vec{T}\| \cos \theta - \|\vec{R}_T\|$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} \|\vec{T}\| \cos \theta = \|\vec{R}_T\| = \mu_2 M g & (1) \\ \|\vec{T}\| \sin \theta = \frac{M v_0^2}{R} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \frac{(2)}{(1)} \text{ donne } \boxed{\tan \theta = \frac{v_0^2}{\mu_2 R g}}$$

$$\text{Et } \sqrt{(1)^2 + (2)^2} \text{ donne } \boxed{\|\vec{T}\| = M \sqrt{(\mu_2 g)^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}}$$

