Analyse vectorielle, systèmes de coordonnées

I) Notion de champ, champ scalaire, champ vectoriel

Un **champ** est une grandeur définie en tout point d'un espace et à tout instant.

Un champ est dit **scalaire** lorsque la grandeur associée en tout point est un scalaire. Il s'agit donc d'une fonction f qui traduit une propriété locale de l'espace à un instant donné : $f(M,t)$.
Exemples : champ de température $T(M,t)$, champ de pression $P(M,t)$, etc.

Un champ est dit **vectoriel** lorsque la grandeur associée en tout point est un vecteur. Il s'agit donc d'un vecteur $\vec{A}$ qui traduit une propriété locale de l'espace à un instant donné : $\vec{A}(M,t)$.
Exemples : champ de pesanteur $\vec{g}(M,t)$, champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$, etc.

II) Rappels sur les systèmes de coordonnées

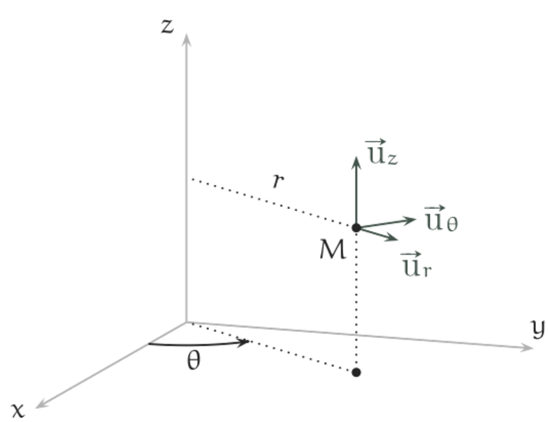
1 - Cartésien

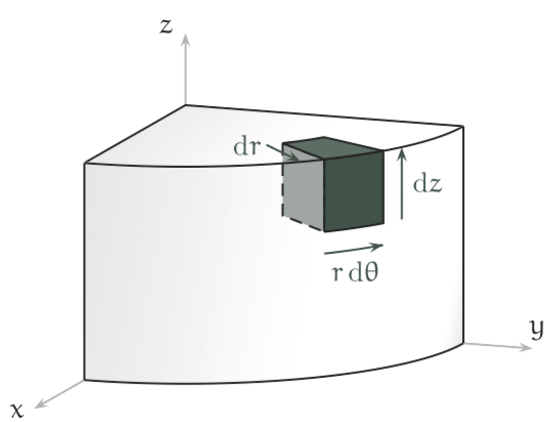
★ On définit un repère orthonormé **fixe** $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ et la position de tout point M de l'espace est donnée par les projetés orthogonaux x, y et z (les coordonnées du point M) sur les trois axes. Ainsi, $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.

★ Les éléments de surface infinitésimaux sont : $\begin{cases} \mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{cases}$

★ Le volume infinitésimal s'écrit : $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

2 - Cylindrique





★ On définit un repère orthonormé **mobile** $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ et la position de tout point M de l'espace est donnée par les coordonnées r, θ et z. On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$.

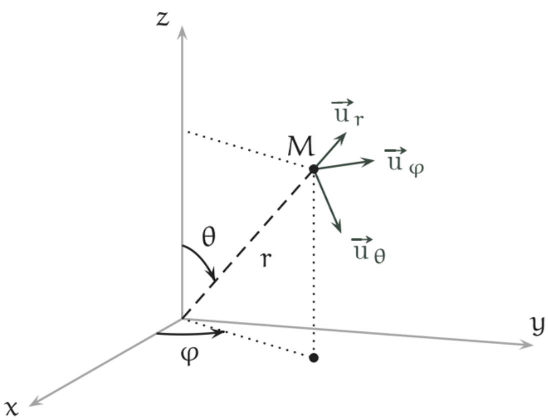
⚠ Ne pas confondre les coordonnées d'un point et les composantes du vecteur position ⚠

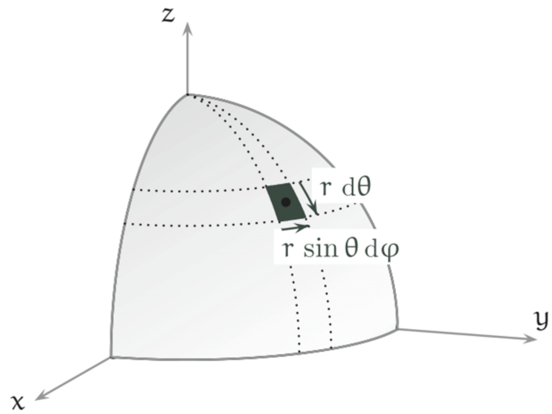
★ Lien avec le système de coordonnées cartésien : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \\ z & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta & = & \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z & = & z \end{array}\right.$

★ Les éléments de surface infinitésimaux sont : $\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{d}S_r & = & r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}S_\theta & = & \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}S_z & = & r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \end{array}\right.$

★ Le volume infinitésimal s'écrit : $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

3 - Sphérique





★ On définit un repère orthonormé **mobile** $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et la position de tout point M de l'espace est donnée par les coordonnées r, θ et φ. On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$.

⚠ Ne pas confondre les coordonnées d'un point et les composantes du vecteur position ⚠

★ Lien avec le système de coordonnées cartésien : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\sin\theta\,\cos\varphi \\ y & = & r\sin\theta\,\sin\varphi \\ z & = & r\cos\theta \end{array}\right.$

★ Les éléments de surface infinitésimaux sont : $\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{d}S_r & = & r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}S_\theta & = & r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}S_\varphi & = & r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \end{array}\right.$

★ Le volume infinitésimal s'écrit : $\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

III) Opérateurs sur les champs scalaires et vectoriels

1 - Opérateur Nabla

Par définition, il s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z}$$

Il n'est pas nécessaire de connaître sa définition dans les autres systèmes de coordonnées (**seules les expressions en coordonnées cartésiennes de tous les opérateurs sont exigibles**, les autres sont données à titre d'information).

2 - Gradient

L'opérateur gradient s'applique à un champ scalaire f et le résultat est un champ vectoriel. Il s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f}$$

★ En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

★ En coordonnées cylindriques et sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

3 - Divergence

L'opérateur divergence s'applique à un champ vectoriel $\vec{A}$ et le résultat est un champ scalaire. Il s'écrit :

$$\boxed{\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}}$$

★ En coordonnées cartésiennes :

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

★ En coordonnées cylindriques et sphériques :

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

4 - Rotationel

L'opérateur rotationel s'applique à un champ vectoriel $\vec{A}$ et le résultat est un champ vectoriel. Il s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}}$$

★ En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

★ En coordonnées cylindriques et sphériques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial (\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

5 - Laplacien scalaire

Cet opérateur s'applique à un champ scalaire f et le résultat est un champ scalaire. Il s'écrit :

$$\boxed{\Delta f = \vec{\nabla}^2 f}$$

★ **En coordonnées cartésiennes :**

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

★ **En coordonnées cylindriques et sphériques :**

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

6 - Laplacien vecteur

Cet opérateur s'applique à un champ vectoriel $\vec{A}$ et le résultat est un champ vectoriel. Il s'écrit :

$$\boxed{\Delta \vec{A} = \vec{\nabla}^2 \vec{A}}$$

★ **En coordonnées cartésiennes :** $\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$

★ **En coordonnées cylindriques et sphériques :** L'expression peu pertinente, elle vous sera donnée si nécessaire.

7 - Quelques propriétés et relations entre ces opérateurs

Les résultats ci-dessous sont, pour la plupart, des conséquences de propriétés des produits scalaires et vectoriels. Il est possible que certains soient rappelés dans les énoncés, mais le plus sûr est de les apprendre ou de savoir les retrouver.

★ **Combinaisons d'opérateurs :**

- $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right) = 0$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right) = \vec{0}$
- $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right) = \Delta f$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$

★ **Identités vectorielles :**

- $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(fg) = f\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}g\right) + g\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right)$
- $\mathrm{div}(f\vec{A}) = f(\mathrm{div}\vec{A}) + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)\cdot\vec{A}$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(f\vec{A}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right)\wedge\vec{A}$
- $\mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$