DS 5 (CCinP) (2 heures)

Électromagnétisme

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	**Indicateur**
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respéctés	**Palier de Malus**	**Effet sur la note**
0	0	aucun
1–2	1	-3.3%
3–4	2	-6.7%
5–6	3	-10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Création de champs magnétiques

I – Création d'un champ tournant

Q.1 Énoncer les équations de Maxwell dans le cas général.

On se place pour toute la suite, dans un régime qualifié d'ARQS magnétique, dans lequel la densité de courant de déplacement $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant la densité de courant "réel" $\vec{j}$.

Q.2 Donner la forme de l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de cette approximation et énoncer le théorème d'Ampère.

Q.3 Après avoir précisé les symétries et invariances du champ magnétique créé par un solénoïde unique infini d'axe (Ox), qui contient n spires par unité de longueur parcourues par une intensité I, établir que celui-ci sépare l'espace en deux zones de champ uniforme.

Q.4 On admet que le champ extérieur est nul. Établir dans ce cas l'expression du champ intérieur créé par le solénoïde unique en fonction de μ_0, n, I et le vecteur unitaire $\vec{u}_x$, l'orientation du courant étant celle qui correspond au sens direct autour de $\vec{u}_x$.

On considère à présent un ensemble de deux solénoïdes infinis identiques d'axes (Ox) et (Oy) perpendiculaires concourants en O comme l'indique la Figure 1. Les spires sont considérées comme circulaires car réalisées sur des cylindres de rayon R comportant n spires jointives par unité de longueur. Les spires du solénoïde d'axe (Oy) sont parcourues par une intensité $I_y = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ et celles du solénoïde d'axe (Ox) par une intensité $I_x = I_0 \cos(\omega t)$. L'orientation des courants correspond au sens direct autour des axes respectifs.

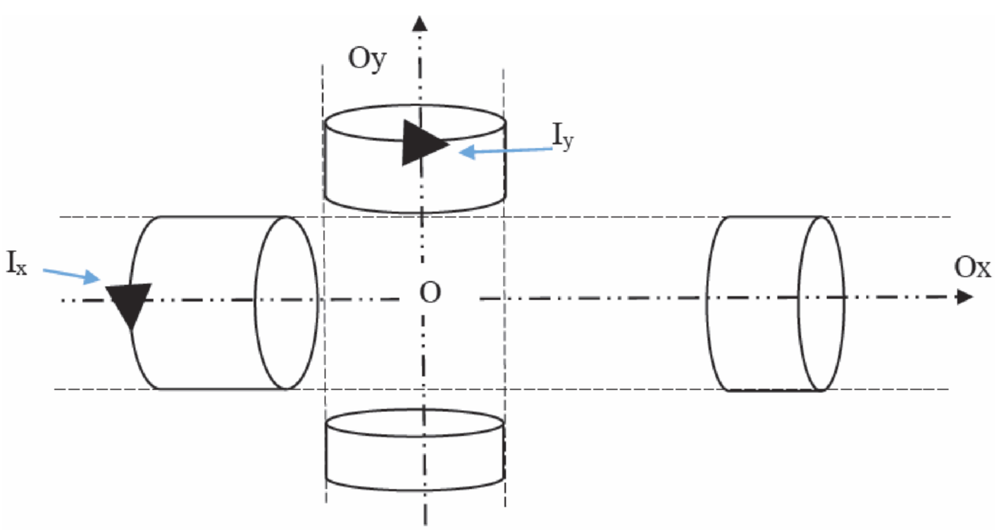


FIGURE 1 – Configuration des solénoïdes infinis, seules quelques spires sont représentées

Q.5 Établir que le champ magnétique dans la zone commune aux deux circuits, pour un déphasage $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, est un champ «tournant», c'est-à-dire un champ de norme constante B_1 porté par un vecteur unitaire qui tourne à vitesse uniforme dans le plan (xOy). On précisera sa norme B_1 et sa vitesse de rotation Ω.

II – Création d'un champ permanent intense

On utilise un solénoïde «épais» (épaisseur $e = R_2 - R_1$) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur $L \gg R_2$) de même axe (Oz). Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté $a = 1{,}0\,\mathrm{mm}$, enroulées sur un cylindre de longueur $L = 4{,}0\,\mathrm{m}$, depuis un rayon $R_1 = 20\,\mathrm{cm}$ jusqu'à un rayon $R_2 = 25\,\mathrm{cm}$. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu I_0 uniformément réparti, orienté dans le sens direct autour de (Oz). La situation est schématisée sur la Figure 2. Les sections carrées sont dans les plans $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ c'est-à-dire en positionnement radial.

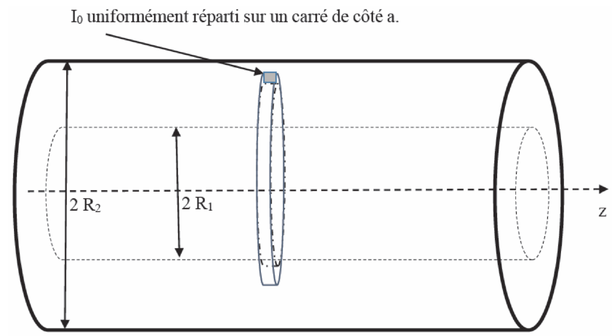


FIGURE 2 – Solénoïde épais

Q.6 Exprimer le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ pour $R_2 > r > R_1$.

Q.7 Établir que l'expression du champ sur l'axe vaut $B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{a^2}(R_2 - R_1)$.

Q.8 Quelle est l'intensité nécessaire pour engendrer un champ de 1 Tesla ?

Pour obtenir un champ intense, sans problème d'échauffement, on utilise des matériaux supraconducteurs qui perdent totalement leur résistivité en dessous d'une température critique T_c, qui dépend du champ magnétique. Ces matériaux ont des propriétés magnétiques intéressantes : en régime permanent, ils «expulsent» le champ magnétique. La loi constitutive de ces supraconducteurs est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{j} = -\Lambda \vec{B} \quad (\Lambda > 0)$$

On rappelle la formule d'analyse vectorielle suivante : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

Q.9 En supposant qu'on peut appliquer les équations de Maxwell du vide dans le matériau supraconducteur de perméabilité μ_0 et de permittivité ε_0, exprimer l'équation différentielle à laquelle obéit le champ magnétique en régime permanent.

Q.10 Faire apparaître dans l'équation différentielle obtenue une grandeur homogène à une longueur notée δ.

On considère qu'un supraconducteur de ce type occupe un demi-espace $x \leq 0$ et que les sources du champ sont telles que règne dans l'espace extérieur $(x > 0)$ un champ permanent uniforme $\vec{B}_{ext} = B_0\vec{u}_z$. On considère qu'il n'y a pas de discontinuités spatiales du champ magnétique.

Q.11 En utilisant les invariances du problème, montrer que le champ dans le supraconducteur s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}(M) = B_x(x)\vec{u}_x + B_y(x)\vec{u}_y + B_z(x)\vec{u}_z$$

Q.12 Déterminer le champ permanent régnant dans le supraconducteur.

Q.13 En déduire la densité de courant volumique.

Q.14 L'ordre de grandeur du paramètre δ est de $5 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}$. Commenter.

Q.15 Tracer, sans faire de calculs, l'allure de $B_z(r)$ dans une symétrie cylindrique comme en Figure 2 où le supraconducteur occupe le volume d'un cylindre creux d'épaisseur $e = 100\delta$, de longueur L très grande devant son rayon R, lui-même très supérieur à e. On suppose que le champ vaut $B_0\vec{u}_z$ dans l'espace intérieur au cylindre creux.

Exercice 2 : Quelques généralités sur les ondes électromagnétiques

Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier la propagation des ondes électromagétiques dans le vide puis la réflexion d'une onde plane progressive sur un conducteur parfait.

I – Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

On considère une onde électromagnétique (EM) associée au champ $(\vec{E}, \vec{B})$. L'espace est rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(Oxyz)$ associé à la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Q.1 Écrire les équations de Maxwell dans le cas général. Que deviennent-elles dans le vide ?

Q.2 Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par les champs électrique et magnétiques et régissant la propagation des ondes dans le vide. On fera apparaître les constantes ε_0 et μ_0.

L'onde considérée est plane progressive monochromatique, de pulsation ω. Le champ EM associé est de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

avec $\vec{E}_0 = E_{0y}\vec{e}_y + E_{0z}\vec{e}_z$ et $\vec{B}_0 = B_{0y}\vec{e}_y + B_{0z}\vec{e}_z$ des vecteurs constants.

Q.3 Quelle est la direction de propagation de l'onde ? Justifier que cette onde soit plane (on pourra donner l'équation d'un plan d'onde), progressive et monochromatique.

Q.4 Que représente la grandeur c dans l'expression des champs ? Quel est le vecteur d'onde $\vec{k}$ de cette onde ? On précisera clairement la direction, le sens et la norme de $\vec{k}$.

Q.5 Vérifier que les champs donnés sont solutions des équations de propagation établies précédemment à condition que c soit liée à ε_0 et μ_0 par une relation que l'on précisera.

Q.6 Grâce aux équations de Maxwell, établir les expressions de B_{0y} et B_{0z} en fonction de E_{0y}, E_{0z} et de c.

Q.7 En déduire que : (a) le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux entre eux ; (b) les normes de ces champs sont telles que : $\|\vec{E}\| = c\,\|\vec{B}\|$.

Q.8 Rappeler la définition du vecteur de Poynting $\vec{R}$ relatif à l'onde plane progressive monochromatique considérée puis l'exprimer en fonction de c, ε_0, E_0 (norme du vecteur $\vec{E}_0$), ω, t, x et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. Que représente physiquement ce vecteur de Poynting et quelle est sa dimension physique ?

Q.9 Déterminer l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\left\langle \vec{R} \right\rangle$ en fonction de c, ε_0, E_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Q.10 Définir puis exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{em}(z,t)$ en fonction des constantes du problème. Déterminer sa valeur moyenne $\langle u_{em} \rangle$. Commenter par rapport au vecteur de Poyting moyen.

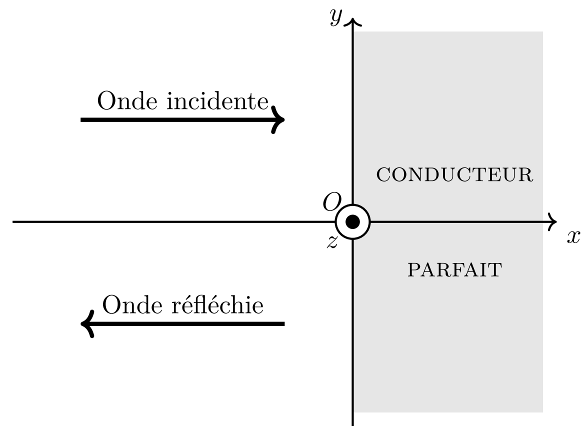
II – Réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait en incidence normale

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement, de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k}$ se propage dans le vide suivant l'axe (Ox) dans le sens des x croissants. Le champ électrique qui lui est associé s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_y$$

avec E_0 une constante et k la norme du vecteur d'onde.

Q.11 Quelle est la direction de polarisation de cette onde ?



En $x = 0$, l'onde arrive sur la surface plane d'un conducteur parfait (voir ci-contre) dans lequel on admet que le champ électromagnétique est nul. L'onde incidente donne alors naissance à une onde réflechie se propageant suivant les x décroissants. Son champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r}\cos(\omega t + kx)$$

On précise par ailleurs que pour $x = 0$, le champ électrique est normal au plan conducteur parfait et que le champ magnétique est tangent au plan conducteur parfait. On suppose que le champ $\vec{E}$ ne présente pas de discontinuité à la traversée de l'interface.

Q.12 En utilisant les conditions limites, déterminer l'expression du vecteur $\vec{E}_{0r}$ en fonction de E_0 et du vecteur unitaire $\vec{e}_y$.

Le champ magnétique incident est donné par l'expression $\vec{B}_i = \vec{B}_{0i}\cos(\omega t - kx)$. En arrivant sur le conducteur parfait, il donne naissance à un champ magnétique réfléchi tel que $\vec{B}_{0r} = \vec{B}_{0r}\cos(\omega t + kx)$.

Q.13 En utilisant les équations de Maxwell, déterminer les expressions des amplitudes $\vec{B}_{0i}$ et $\vec{B}_{0r}$ des champs magnétiques incident et réfléchi en fonction de E_0, de c et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Q.14 Montrer alors que les expressions du champ électrique $\vec{E}$ et du champ magnétique $\vec{B}$ résultant de la superposition des ondes incidente et réfléchie dans le demi-espace $x < 0$ sont :

$$\vec{E} = 2E_0\sin(\omega t)\sin(kx)\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\vec{e}_z$$

Comment nomme-t-on ce type d'onde ?

Q.15 Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne temporelle $\left\langle \vec{R} \right\rangle$. Quels commentaires peut-on faire ?

• • • FIN • • •