Lemme :

Dans $E = \mathbb{K}^p$ muni de la norme $\|\|_\infty$ (canonique),
une partie A de E est **compacte** **SSI** elle est **fermée** et **bornée**

Démonstration(lemme)

$\Longrightarrow$] : fait au paragraphe compacité (démo. 54).

$\Longleftarrow$] : Soit A une partie de $\mathbb{K}^p$ fermée et bornée pour $\|\|_\infty$. Il existe donc $r >$ tel que $A \subset [-r, r]^p$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $A \subset D_F(0, r)^p$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Or $\boxed{\mathbf{P}_5}$ du paragraphe compacité dit que $[-r, r]^p$ et $D_F(0, r)^p$ sont compacts (pour $\|\|_\infty$).

On conclut avec $\boxed{\mathbf{P}_4}$ du même paragraphe que A est compact.

Corollaire :

Soit E un $\mathbb{K}$-EV et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $N_\infty(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p}(|x_i|)$ avec $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i\, e_i$.

Alors $A \subset E$ est **compact** pour N_∞ **SSI** A est **fermé et borné**.

Démonstration(corollaire)

Notons $\|\|_\infty$ la norme infinie canonique de $\mathbb{K}^p$.

Considérons l'application
$$\Phi \ : \ \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^p, \|\|_\infty) & \longrightarrow & (E, N_\infty) \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i \end{array}.$$

On a Φ qui est linéaire et bijective (donc isomorphisme).

De plus, on a :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \ : \ N_\infty(\Phi(x)) = \|x\|_\infty \ (*) \qquad \text{donc géométriquement } \Phi \text{ est une isométrie.}$$

On déduit de cette relation $(*)$ que Φ est continue sur $\mathbb{K}^p$.

Notons $A_0 = \Phi^{-1}(A)$. Comme Φ est continue, A_0 est fermé comme image réciproque de fermé.

Enfin avec la relation $(*)$, si A est borné , alors A_0 aussi.

On a donc A_0 fermé et borné de $(\mathbb{K}^p, \|\|_\infty)$. D'après le lemme ci-dessus, A_0 est donc compact de $(\mathbb{K}^p, \|\|_\infty)$.

Comme Φ est continue, $A = \Phi(A_0)$ est aussi compact pour N_∞.

Théorème Fondamental :

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont <u>2 à 2 équivalentes</u>

Démonstration(T.F.)

Soit E un $\mathbb{K}$-EV et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $N_\infty(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p}(|x_i|)$ avec $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i\, e_i$.

Soit enfin N une autre norme quelconque sur E. Comme l'équivalence des normes est une relation d'équivalence, il suffit de montrer que

$$\boxed{\underline{N \textbf{ et } N_\infty \textbf{ sont équivalentes}}}.$$

Analyse :

On cherche $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E,\ N_\infty(x) \leqslant \alpha N(x) \text{ et } N(x) \leqslant \beta N_\infty(x)$$

La première idée est de n'avoir qu'une seule sorte de norme dans ces deux inégalités (N ou N_∞).
D'après le corollaire du lemme, la sphère unité $S_\infty = S(O,1) = \{x \in E \text{ tel que } N_\infty(x) = 1\}$ a une propriété très importante : elle est **compacte** pour la norme N_∞.
Si on se restreint à cette sphère, les deux inégalités deviennent :

$$\forall x \in S_\infty,\ 1 \leqslant \alpha N(x) \text{ et } N(x) \leqslant \beta$$

soit

$$\forall x \in S_\infty,\ 0 < \frac{1}{\alpha} \leqslant N(x) \leqslant \beta$$

On pense donc tout de suite au THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES

Réciproquement, si l'on a ces inégalités, avec $\dfrac{x}{N_\infty(x)}$, on en déduira le résultat escompté. Montrons cela.

Synthèse :

Pour utiliser T.B.A. , il faut une application continue : Considérons

Considérons l'application $f\ :\ \begin{array}{ccc} (E, N_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array}$.

Montrons que f est **continue sur E**

Attention : f est continue et même 1-lipschitzienne si l'on prenait la norme N sur l'espace de départ, mais ici l'ensemble de départ E est munit de la norme N_∞

$\forall (x,y) \in E^2$, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i\ e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i\ e_i$:

$|f(x) - f(y)| = |N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y) = N\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(x_i - y_i)\ e_i\Big) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i| N(e_i)$

$\leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \max_{1\leqslant i\leqslant p} |x_i - y_i| N(e_i) = k N_\infty(x-y)$ avec $k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} N(e_i)$.

On en déduit que f est k-lipschitzienne et donc continue sur (E, N_∞).

On peut donc appliquer T.B.A. : f est bornée et atteint ses bornes sur le compact S_∞ :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ \forall x \in S_\infty\ ,\ m \leqslant N(x) \leqslant M.$$

Comme il existe $c \in S_\infty$ tel que $m = f(c)$ et que $c \neq 0$ (sa norme (N_∞) est égale à un donc non nulle), on en déduit que $m > 0$.

$\forall x \in E$, $x \neq 0$: $\dfrac{x}{N_\infty(x)} \in S_\infty$, donc $m \leqslant N(\dfrac{x}{N_\infty(x)}) \leqslant M$, d'où $mN_\infty(x) \leqslant N(x) \leqslant MN_\infty(x)$, soit

$$\forall x \in E,\ x \neq 0\ N_\infty(x) \leqslant \alpha N(x) \text{ et } N(x) \leqslant \beta N_\infty(x) \text{ avec } \alpha = \frac{1}{m} \text{ et } \beta = M.$$

Comme ces inégalités sont encore vraies si $x = 0$, on conclut que $\boxed{N \text{ et } N_\infty \text{ sont équivalentes}}$.