

DS 6 (CCS) (4 heures)

Ondes Électromagnétiques, Rayonnement

La calculatrice est autorisée

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrees.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1–2	1	–3.3%
3–4	2	–6.7%
5–6	3	–10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Considérations sur une raie spectrale

Document 1 : Lampe à décharge

Une lampe à décharge est une lampe électrique constituée d'un tube ou d'une ampoule en verre remplie de gaz ou de vapeur métallique, sous haute ou basse pression, au travers de laquelle on fait passer un courant électrique. Il s'ensuit une émission de photons donc d'énergie lumineuse. Pour ces lampes, la couleur de la lumière émise par luminescence dépend du gaz utilisé : [...]

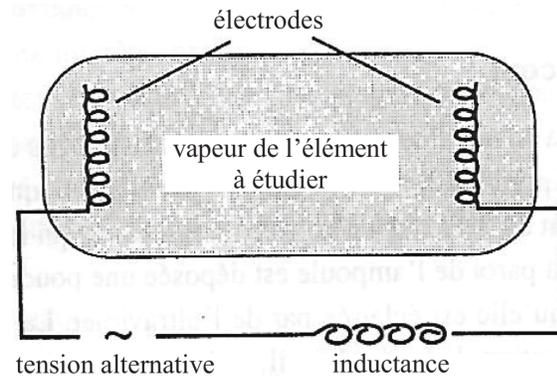
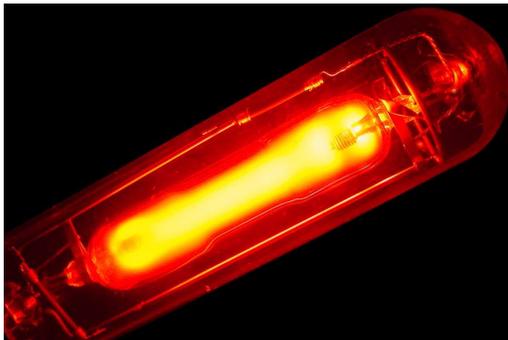
Le mercure s'approche du bleu tout en produisant une quantité importante d'ultraviolet.

Principe de fonctionnement

Les molécules du gaz métallique utilisé ont la faculté de pouvoir s'ioniser lorsqu'elles sont soumises à la différence de potentiel créée entre les électrodes situées de chaque côté de la lampe. Les électrons libérés sont attirés par l'électrode positive –nommée anode –et les ions positifs par l'autre, nommée cathode. Un énorme flux d'électrons traverse l'ampoule.

Lors du passage de ce flux, se produisent de nombreuses collisions entre les électrons circulants et ceux présents dans le gaz de la lampe. Lors de ces collisions, les électrons sont chassés de leur orbite, changent de couche et y reviennent en émettant un photon, dont la longueur d'onde (sa couleur) dépend de la différence d'énergie entre les couches, mais appartient habituellement au spectre du visible et/ou de l'ultraviolet. [...]

d'après Wikipédia, 2018



Optique Expérimentale, SEXTANT, collection Enseignement des Sciences, HERMANN

Nous allons considérer une lampe spectrale à vapeur de mercure, généralement utilisée en Travaux Pratiques au lycée.

- Q.1** Déterminer la pulsation ω_0 du photon émis lors de la désexcitation d'un atome passant d'un état excité d'énergie \mathcal{E}_2 à un état fondamental d'énergie \mathcal{E}_1 .

I – Oscillations au sein de l'atome de Thomson

Afin de donner une vision classique de l'émission d'un atome préalablement excité, nous allons étudier la réponse mécanique d'un électron à une excitation de l'atome.

Le modèle de l'atome d'hydrogène adopté ici est celui élaboré par Joseph Thomson, prix Nobel de Physique en 1906 pour avoir découvert l'électron en 1897. Il proposa en 1904 un modèle dit du «pudding aux électrons». Il s'agit :

- d'une boule de centre O et de rayon a , avec $a \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$, uniformément chargée en volume, de densité volumique de charge (uniforme à l'intérieur de la boule) notée ρ , de charge totale $+e$, considérée

tout d'abord immobile dans le référentiel du laboratoire,

- d'un électron ponctuel (masse m_e , charge $-e$) libre de se déplacer sans frottement à l'intérieur de la boule.

La position d'un point M de l'espace peut être repérée par ses coordonnées cartésiennes $M(x, y, z)$ dans la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, ou par ses coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$ associées à la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

I.A Force électrostatique ressentie par l'électron

Q.2 Donner l'expression de la densité volumique de charge ρ au sein de la boule du modèle.

Soit M un point quelconque de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques.

Q.3 Montrer que le champ électrostatique en M s'écrit : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$.

Q.4 Déterminer en tout point M intérieur à la boule, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par la distribution de charge caractérisée par ρ .

L'électron se situe en un point $M(r, \theta, \varphi)$ intérieur à la boule. On le repère par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. On suppose ici l'atome isolé et on néglige toute attraction gravitationnelle.

Q.5 Donner la force électrostatique ressentie par l'électron et la mettre sous la forme $\vec{F} = -m_e\omega_0^2\overrightarrow{OM}$ où on donnera l'expression de ω_0 . Commenter l'expression de cette force.

I.B Oscillations libres dans le modèle de l'électron élastiquement lié

Dans une lampe à vapeur, lors d'une décharge électrique, un atome peut recevoir beaucoup d'énergie à l'issue d'un choc. Le choc a lieu à l'instant $t = 0$ et l'atome se trouve alors dans un état initial d'énergie mécanique \mathcal{E}_0 . L'électron est alors situé sur sa position d'équilibre en O , avec une énergie cinétique initiale non nulle car sa vitesse initiale vaut $\vec{v}(t = 0) = -V_0\vec{e}_z$. Pour $t \geq 0$, l'atome est supposé isolé.

Q.6 Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron. En déduire une équation différentielle vérifiée par le vecteur position \vec{r} de l'électron. Déterminer alors son évolution temporelle en faisant apparaître la constante ω_0 .

Q.7 Donner l'expression du moment dipolaire électrique de l'atome d'hydrogène $\vec{p}(t)$ en fonction de e et \vec{r} . En déduire que $\vec{p}(t) = p_z(t)\vec{e}_z$ où on exprimera $p_z(t)$ comme une fonction sinusoïdale du temps dont on explicitera l'amplitude et la pulsation en fonction de e , V_0 et ω_0 .

Q.8 Déterminer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ_0 du rayonnement dipolaire associé. À quelle partie du spectre électromagnétique appartient ce rayonnement ?

I.C Introduction d'une force de frottements fluides

Pour affiner la description du mouvement de l'électron, on modélise un éventuel amortissement (faible) par l'ajout d'une force de type «frottement fluide» : $\vec{F}_f = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$ avec \vec{v} la vitesse de l'électron. Cette force sera considérée comme un terme de perturbation, c'est-à-dire entre autre que $\tau\omega_0 \gg 1$ (hypothèse de faible amortissement). L'électron n'est soumis qu'aux trois forces décrites ci-dessus. Les conditions initiales sont les mêmes que précédemment (l'atome vient juste de subir un choc avec un porteur de charge d'énergie élevée).

Q.9 Donner l'origine physique d'une telle force. Quelle est la dimension de la constante τ ?

Q.10 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le moment dipolaire $\vec{p}(t)$ de l'atome. En tenant compte de l'hypothèse de faible amortissement, donner la solution approchée qu'on pourra écrire sous la forme :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_m(t) \sin(\Omega t + \phi) \quad \text{avec} \quad \vec{p}_m(t) = \vec{p}_0 e^{-\alpha t}$$

en exprimant \vec{p}_0 , α , Ω et ϕ en fonction des données de l'énoncé.

Pour simplifier les notations, on posera \vec{r}_0 tel que $\vec{p}_0 = -e\vec{r}_0$.

Q.11 Écrire l'énergie potentielle élastique de l'oscillateur $\mathcal{E}_p(t)$ en fonction de m_e , ω_0 , r_0 et τ .

Q.12 Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)$ de l'oscillateur dans le référentiel du laboratoire et simplifier son expression en tenant compte de l'hypothèse de faible amortissement (on pourra montrer que cela revient à négliger la dérivée temporelle du facteur exponentiel devant celle du terme oscillant).

Q.13 Montrer alors que l'énergie mécanique de l'oscillateur peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{m_e}{2e^2} \omega_0^2 p_m^2(t)$$

puis mettre en évidence la durée caractéristique d'amortissement des oscillations.

II – Rayonnement de l'atome excité et largeur spectrale de la raie d'émission

Dans cette partie, nous allons tenter de proposer une justification de l'amortissement évoqué précédemment. Pour cela nous relierons la perte d'énergie de l'oscillateur à l'énergie électromagnétique rayonnée par l'atome excité à l'aide d'un modèle classique qui, tout simpliste qu'il soit, permet de rendre compte de certains résultats expérimentaux.

II.A Puissance rayonnée par un atome excité

Les oscillations effectuées par l'électron sont à l'origine d'un rayonnement électromagnétique. Pour décrire l'onde rayonnée par l'atome, on utilise un système de coordonnées sphériques centré sur O . Il s'agit maintenant de déterminer la puissance rayonnée par l'atome en le modélisant par un dipôle électrique oscillant (à la pulsation ω_0) non amorti et de moment dipolaire $\vec{p}(t) = p_z(t)\vec{e}_z$ avec $p_z(t) = p_m \sin(\omega_0 t)$.

L'onde sinusoïdale rayonnée, de longueur d'onde notée λ , sera étudiée en un point $M(r, \theta, \varphi)$ dans la zone de rayonnement. On rappelle que dans ces conditions, l'onde rayonnée a localement la structure d'une onde plane progressant dans le sens de \vec{e}_r .

Q.14 Formuler les approximations faites sur la hiérarchie des distances caractéristiques du problème dans la zone de rayonnement. Commenter physiquement les inégalités écrites.

Q.15 Identifier, parmi les quatre expressions suivantes, celle représentant le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$, puis celle représentant le champ électrique $\vec{E}(M, t)$, champs associés à l'onde émise par le dipôle oscillant. On justifiera la réponse notamment par des arguments d'analyse dimensionnelle et des considérations de symétrie.

$$\begin{array}{ll} (a) \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin(\theta) \ddot{p}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta & (c) \frac{\mu_0}{4\pi r c} \sin(\theta) \ddot{p}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta \\ (b) \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin(\theta) \ddot{p}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\varphi & (d) \frac{\mu_0}{4\pi r c} \sin(\theta) \ddot{p}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\varphi \end{array}$$

Q.16 Établir l'expression du vecteur de Poynting en un point $M(r, \theta, \varphi)$ de la zone de rayonnement. En déduire sa moyenne temporelle que l'on exprimera en fonction de μ_0 , c , p_m , ω_0 , θ et r .

Q.17 Déterminer alors l'expression de la puissance moyenne rayonnée Φ_{ray} par l'atome à travers une sphère de rayon R en fonction de R , ε_0 , c , p_m et ω_0 .

Q.18 À l'aide de l'expression établie en **Q.13**, montrer que $\Phi_{ray} = \gamma \mathcal{E}_m$ où \mathcal{E}_m est l'énergie mécanique de l'oscillateur et γ une constante que l'on exprimera en fonction de ε_0 , c , e , m_e et ω_0 .

II.B Amortissement des oscillations

Q.19 Estimation qualitative : rappeler l'expression de l'énergie totale rayonnée lors de l'émission d'un photon de pulsation ω_0 , de longueur d'onde dans le vide λ_0 correspondant au domaine visible.

Relier simplement l'ordre de grandeur de la puissance moyenne rayonnée, la quantité d'énergie totale rayonnée et la durée caractéristique de l'émission. Estimer, par un calcul simple, l'ordre de grandeur de la durée du train d'onde correspondant à l'émission en utilisant la formule trouvée en **Q.17** pour Φ_{ray} (il appartient au candidat d'estimer les données numériques éventuellement utiles). Quel commentaire peut-on faire à propos de la durée trouvée ?

On essaie par la suite d'affiner le calcul en utilisant les résultats obtenus précédemment. On estime que la puissance électromagnétique rayonnée par l'atome excité est puisée dans l'énergie mécanique de l'oscillateur. On suppose que l'amortissement qui en résulte peut être traité comme une perturbation du mouvement. On fait ainsi l'hypothèse (qui devra être vérifiée par la suite) que la décroissance de l'énergie mécanique de l'oscillateur est suffisamment lente pour qu'on puisse utiliser à chaque instant la formule $\Phi_{ray} = \gamma \mathcal{E}_m$. On appelle τ la durée caractéristique d'évolution de l'énergie mécanique.

Q.20 Écrire, en fonction de Φ_{ray} , l'expression de la variation de l'énergie mécanique de l'atome entre t et $t + \delta t$, où δt est une durée infinitésimale très faible devant τ et néanmoins grande devant la pseudo-période, c'est-à-dire $\tau \gg \delta t \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Q.21 En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'énergie mécanique et mettre en évidence la durée caractéristique τ . Donner l'ordre de grandeur de τ quand l'onde émise est dans le domaine du visible. Vérifier l'hypothèse faite sur le temps caractéristique de décroissance de l'énergie mécanique.

Q.22 Estimer alors la durée du train d'onde émis. Donner un ordre de grandeur de la largeur spectrale (en fréquence) qualifiée de *naturelle* du rayonnement émis.

Exercice 2 : À la recherche des *péritios*

En astronomie, les sursauts radio rapides (fast radio burst) sont de brèves émissions radio intenses, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés *péritios* (*perytions*), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

L'observatoire de Parkes, en Australie, dispose d'un radiotélescope de 64 m de diamètre, utilisé entre autres pour l'étude des pulsars. En 2007, il a permis de découvrir des sursauts radio rapides, observés dès 2001, dont on a établi l'origine extragalactique. Ils seraient émis par des étoiles à neutrons particulières.

En analysant d'anciens enregistrements, on a trouvé qu'en 1998 le télescope de Parkes a détecté des signaux similaires aux sursauts rapides, les *péritios*. Leur origine fut une énigme, résolue seulement en 2015.

Les *péritios* sont des signaux radio d'une durée de quelques centaines de millisecondes, présentant une variation de fréquence similaire à la dispersion des impulsions émises par les pulsars s'étant propagées à travers un plasma froid dilué. La **FIGURE 1** représente la structure temporelle et fréquentielle d'un *péritio* qui est donc un signal quasiment sinusoïdal dont la fréquence varie lentement avec le temps.

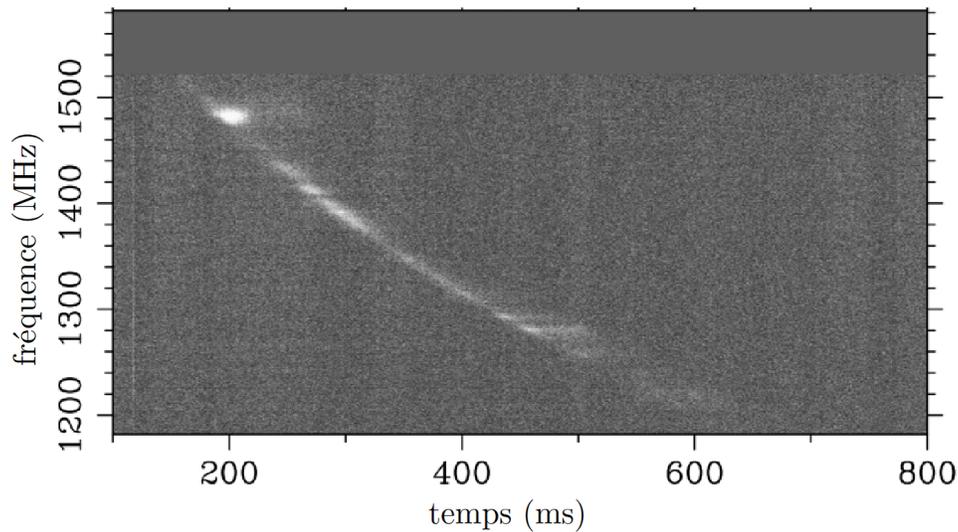


FIGURE 1 – Structure temporelle et fréquentielle d'un péritio.

I – L'énigme des péritios

Afin de caractériser la variation temporelle de fréquence caractéristique lors de la réception d'une impulsion radio, détaillons la modélisation d'un plasma froid dilué. Il est constitué :

- de cations de masse M , de charge $+e$ à la densité volumique n_c ;
- d'électrons de masse m , de charge $-e$ à la densité volumique n_e .

On fait les hypothèses suivantes :

- on néglige les interactions entre les particules (plasma peu dense), elles ne sont alors soumises qu'au champ électromagnétique de l'onde présente dans le plasma ;
- comme $M \gg m$, les ions, du fait de leur inertie, sont considérés comme immobiles : c'est le modèle du plasma froid où l'on néglige l'énergie d'agitation thermique des ions, considérés comme « froids » ;
- les électrons sont non-relativistes ;
- en l'absence d'onde, le plasma est localement neutre : les cations et les électrons ont la même densité volumique n ;
- le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane pseudo-progressive harmonique transverse $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}x)]$ avec $\vec{E}_0 \cdot \vec{u}_x = 0$ pour une onde transverse se propageant selon $\vec{k} = k\vec{u}_x$.

Q.1 Montrer que le plasma reste localement neutre même en présence de l'onde. Que peut-on alors dire de la densité volumique n_e d'électrons dans le plasma ?

Q.2 En considérant que les électrons ne sont soumis qu'à la seule force électrique (justifier que l'on néglige l'effet du champ magnétique), montrer que la densité volumique de courant dans le plasma est reliée au champ électrique par une relation de la forme

$$\vec{j} = \underline{\theta}_B \vec{E}$$

et exprimer la conductivité complexe $\underline{\theta}_B$ en fonction des données.

Q.3 À partir des équations de Maxwell, établir la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où l'on exprimera la pulsation plasma ω_p en fonction de n , m , e et ε_0 .

Q.4 À quelle condition sur ω l'onde peut-elle se propager dans le plasma ?

Q.5 Établir alors l'expression de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω , ω_p et c .

On considère une onde électromagnétique émise par un astre à une distance L de la Terre. Le temps de parcours de la composante de l'onde à la pulsation ω est :

$$t(\omega) = \int_0^L \frac{d\ell}{v_g(\omega)}$$

Q.6 Pourquoi ne peut-on pas écrire a priori $t(\omega) = \frac{L}{v_g}$?

Q.7 Établir l'expression de $t_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} t(\omega)$. Quelle est son interprétation physique ?

Q.8 Quel est le signe de $\tau(\omega) = t(\omega) - t_\infty$ et quel sens concret donner à cette grandeur ?

On définit la mesure de dispersion DM (pour dispersion measure) par

$$DM = \int_0^L n_e d\ell$$

Pour un plasma interstellaire, on a typiquement $n_e \approx 1 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$.

Q.9 Montrer que pour des ondes d'une fréquence f de l'ordre du gigahertz, on peut écrire

$$\tau(f) = A \frac{DM}{f^2}$$

où l'on exprimera A en fonction de e , ϵ_0 , m et c .

Q.10 Calculer la valeur de A .

Q.11 Cette relation est-elle qualitativement en accord avec l'enregistrement de la FIGURE 1 ?

Dans la définition donnée précédemment de DM , on exprime usuellement la densité électronique n_e en cm^{-3} et la distance L en parsec, unité de distance astronomique ; la mesure de dispersion est alors donnée en $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Q.12 À partir de la FIGURE 1, estimer la mesure de dispersion DM , en exprimant le résultat d'abord en unités du système international puis en $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Q.13 Les mesures de dispersion mesurées pour des objets extragalactiques sont usuellement de quelques centaines de $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$. Peut-on exclure une origine extragalactique aux péricitios ?

Différents indices ont fait pencher la balance vers une origine terrestre des péricitios : détections dans des directions en dessous de la ligne d'horizon, ou sur un large champ de visée. Et surtout, ces phénomènes se produisent pendant les heures de bureau, en semaine. En 2014, l'observatoire de Parkes s'est doté d'un enregistreur plus performant, pouvant couvrir une bande de fréquence allant de 402 MHz à 3 GHz, l'équipement utilisé jusqu'alors ne permettant d'explorer qu'une bande de 400 MHz de large, centrée sur 1382 MHz.

Des chercheurs ont alors découvert que plusieurs péricitios sont associés à une émission d'onde électromagnétique dans le domaine de fréquence de 2,3 à 2,5 GHz, inaccessible avec l'ancien matériel. Il est apparu que les péricitios sont toujours accompagnés d'une émission à 2,4 GHz, mais que l'on observe de nombreuses émissions à 2,4 GHz

non accompagnées de péritio. L'analyse des enregistrements sur deux mois montre que les péritios sont répartis pendant la journée, entre 9h et 17h. Ces observations ont permis aux chercheurs de trouver le coupable : un four à micro-ondes utilisé par le personnel de l'observatoire. La partie suivante étudie le four à micro-ondes afin de déterminer si l'ouverture de la porte du four avant la fin de son fonctionnement permet d'expliquer les péritios observés.

I.A Le four à micro-ondes

Un four à micro-ondes est constitué d'un klystron, qui émet une onde électromagnétique généralement à la fréquence $f = 2,45$ GHz, acheminée par un guide d'onde vers la cavité du four. Cette cavité est un parallélépipède entouré de parois métalliques, délimitant l'espace $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq d$. On considère dans un premier temps que les parois sont parfaitement conductrices, l'espace intérieur au four étant assimilé au vide. Pour rappel, le champ électromagnétique est nul dans un conducteur parfait. On cherche le champ électrique dans la cavité sous la forme :

$$\begin{cases} E_x(x, y, z, t) = E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_y(x, y, z, t) = E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z(x, y, z, t) = E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \end{cases}$$

Q.14 Montrer que seules des valeurs discrètes de k_x , k_y , k_z sont possibles, repérées respectivement par des entiers m , n , ℓ .

Le triplet (m, n, ℓ) caractérise un mode propre de la cavité.

Q.15 En déduire l'expression des fréquences f_{mnl} des modes propres possibles dans la cavité.

Pour étudier le champ électromagnétique dans un four, des chercheurs ont construit un modèle ayant pour dimensions intérieures $a = 36,0$ cm, $b = 24,0$ cm et $d = 26,5$ cm, alimenté par un klystron de fréquence $f = 2,45$ GHz. Ils ont placé dans le four une feuille de papier imbibée d'hexahydrate de chlorure de cobalt ($\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$), de couleur rose, tandis que la forme anhydre est de couleur bleu ciel. Lorsque la température du papier augmente, l'hexahydrate de chlorure de cobalt passe sous forme anhydre et prend la couleur bleue. La FIGURE 2 présente les résultats obtenus en fonction de la position de la feuille de papier dans le four.

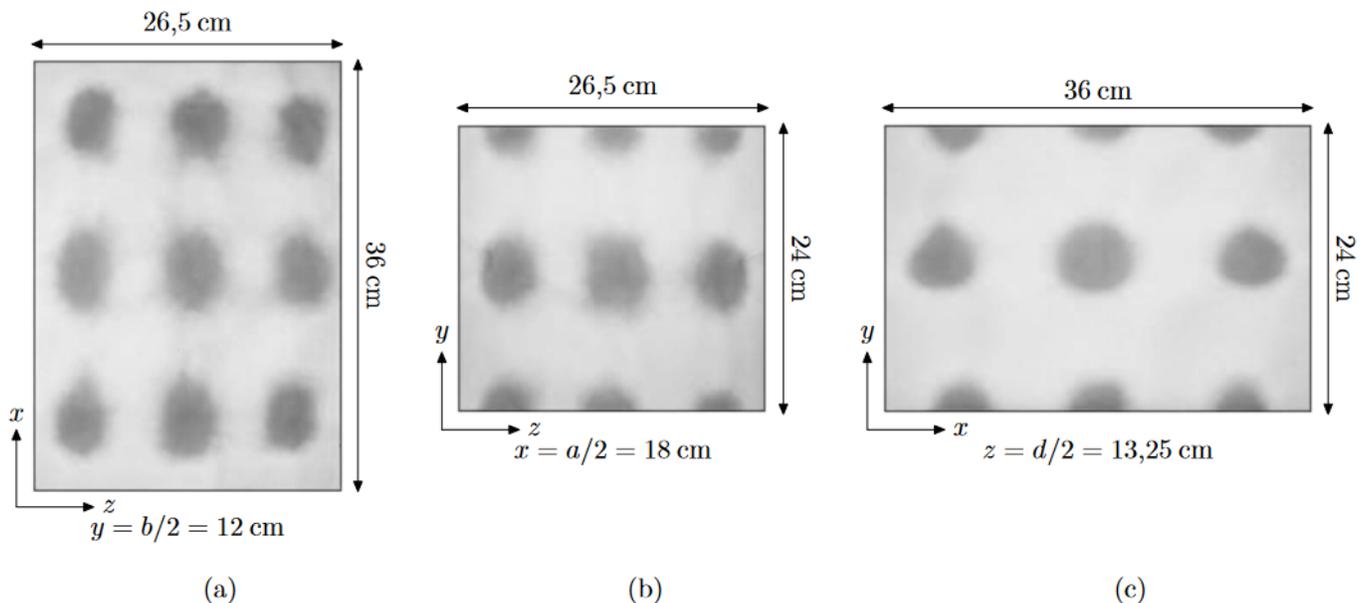


FIGURE 2 – Aspect du papier imbibé de chlorure de cobalt, en fonction de sa position dans le four. Les tâches sombres correspondent à la couleur bleue

Q.16 Déterminer la valeur du triplet (m, n, ℓ) . La fréquence du mode propre observée est-elle en accord avec la valeur donnée pour le klystron ? Justifier précisément l'aspect de la FIGURE 2(b) en s'intéressant aux conditions aux limites sur les parois $y = 0$ et $z = 0$.

L'ouverture de la porte d'un four à micro-ondes déclenche l'arrêt du klystron générant l'onde. Cependant, des ondes électromagnétiques ont été détectées lorsque l'on ouvre la porte d'un four en cours de fonctionnement. Nous allons déterminer au bout de quelle durée l'onde présente dans le four s'atténue.

On considère une cavité simplifiée à une dimension entre deux plaques conductrices de surface S , situées en $x = 0$ et $x = a$. Le champ électrique régnant dans cette cavité, en négligeant les effets de bord, est de la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

où n est un entier positif. On considère toujours que les parois sont parfaitement conductrices.

Q.17 Établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ dans la cavité. On notera B_0 son amplitude maximale, que l'on exprimera en fonction de E_0 .

Q.18 Établir l'expression de l'énergie électromagnétique totale W contenue dans la cavité, en fonction de B_0 , des caractéristiques de la cavité et de μ_0 . Que constate-t-on ?

Pour rendre compte de la décroissance du champ électromagnétique en l'absence de source d'onde, il faut tenir compte de la conductivité électrique finie σ des parois métalliques. Les parois d'un four à micro-ondes sont en acier inoxydable, de conductivité électrique $\sigma = 1,5 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Nous allons étudier l'interaction d'une onde électromagnétique avec un conducteur métallique. On considère pour cela un milieu métallique, conducteur ohmique de conductivité σ , occupant le demi-espace $x > 0$.

Q.19 Comment se simplifie l'équation de Maxwell-Ampère si $\varepsilon_0 f \ll \sigma$? Cette condition est-elle vérifiée dans le cadre du four à micro-ondes ?

Q.20 Établir alors l'équation vérifiée par $\vec{B}(M, t)$ dans le conducteur. Qu'est-ce qui permet de dire qu'elle traduit un phénomène irréversible ? Citer un phénomène décrit par une équation analogue dans un autre domaine de la physique que l'électromagnétisme.

On cherche une solution de cette équation dans le domaine $x > 0$ sous la forme

$$\vec{B}(x, t) = \underline{f}(x) e^{i\omega t} \vec{u}_z$$

Q.21 Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $\underline{f}(x)$, sachant que l'on impose en $x = 0$ le champ $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On posera une longueur caractéristique δ que l'on exprimera en fonction de μ_0 , σ et ω .

Q.22 Commenter l'expression du champ $\vec{B}(x, t)$ dans le conducteur. Donner l'interprétation de δ .

Q.23 Rappeler l'expression de la puissance volumique cédée par un champ électromagnétique à un conducteur ohmique.

Q.24 Établir l'expression de la puissance moyenne (temporelle) dissipée dans les deux parois de la cavité de section S , en fonction de B_0 , ω , δ , S et μ_0 .

On définit le facteur de qualité de la cavité par $Q = 2\pi \frac{\text{énergie stockée dans la cavité}}{\text{énergie dissipée par période}}$.

- Q.25** En admettant que l'on puisse prendre en première approximation l'expression de l'énergie totale établie en considérant les conducteurs des parois comme parfaits, établir l'expression du facteur de qualité de la cavité en fonction de a et δ .
- Q.26** Calculer la valeur de Q pour un four à micro-ondes, avec $a = 36$ cm.
- Q.27** Montrer que l'énergie totale $W(t)$ décroît avec un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction de ω et Q .
- Q.28** Calculer numériquement τ . Peut-on expliquer les pertes par le champ émis lors de l'ouverture d'un four à micro-ondes ?

Données

Permittivité diélectrique du vide :	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide :	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide :	$c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante d'Avogadro :	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire :	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron :	$m_e = 0,91 \times 10^{-30} \text{ kg}$
Constante de Planck :	$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann :	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits :	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire du mercure :	$M_{\text{Hg}} = 200,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Parsec :	$1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$

Formulaire

Valeurs de quelques intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} x \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \quad ; \quad \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta = \frac{4}{3}$$

Relations de continuité des champs : En présence de charges surfaciques σ , la composante normale du champ électrique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante tangentielle est toujours continue :

$$\vec{E}_{2,n} - \vec{E}_{1,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{2,t} - \vec{E}_{1,t} = \vec{0}$$

En présence de courants surfaciques \vec{j}_s , la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante normale est toujours continue :

$$\vec{B}_{2,t} - \vec{B}_{1,t} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{2,n} - \vec{B}_{1,n} = \vec{0}$$

• • • **FIN** • • •