

DS 6 (CCinP) (4 heures)
Ondes Électromagnétiques, Rayonnement

La calculatrice est autorisée

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1–2	1	–3.3%
3–4	2	–6.7%
5–6	3	–10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Considérations sur une raie spectrale

Document 1 : Lampe à décharge

Une lampe à décharge est une lampe électrique constituée d'un tube ou d'une ampoule en verre remplie de gaz ou de vapeur métallique, sous haute ou basse pression, au travers de laquelle on fait passer un courant électrique. Il s'ensuit une émission de photons donc d'énergie lumineuse. Pour ces lampes, la couleur de la lumière émise par luminescence dépend du gaz utilisé : [...]

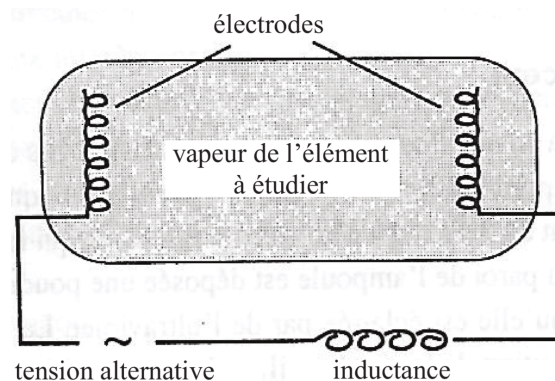
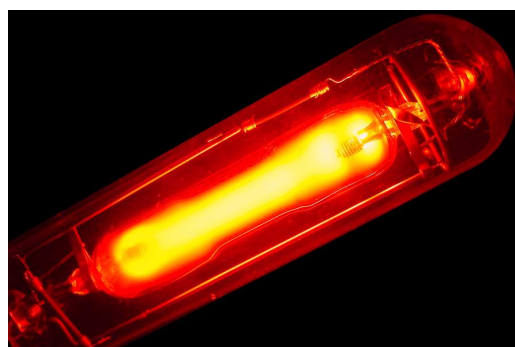
Le mercure s'approche du bleu tout en produisant une quantité importante d'ultraviolet.

Principe de fonctionnement

Les molécules du gaz métallique utilisé ont la faculté de pouvoir s'ioniser lorsqu'elles sont soumises à la différence de potentiel créée entre les électrodes situées de chaque côté de la lampe. Les électrons libérés sont attirés par l'électrode positive –nommée anode –et les ions positifs par l'autre, nommée cathode. Un énorme flux d'électrons traverse l'ampoule.

Lors du passage de ce flux, se produisent de nombreuses collisions entre les électrons circulants et ceux présents dans le gaz de la lampe. Lors de ces collisions, les électrons sont chassés de leur orbite, changent de couche et y reviennent en émettant un photon, dont la longueur d'onde (sa couleur) dépend de la différence d'énergie entre les couches, mais appartient habituellement au spectre du visible et/ou de l'ultraviolet. [...]

d'après Wikipédia, 2018



Optique Expérimentale, SEXTANT, collection Enseignement des Sciences, HERMANN

Nous allons considérer une lampe spectrale à vapeur de mercure, généralement utilisée en Travaux Pratiques au lycée.

Q.1 Déterminer la pulsation ω_0 du photon émis lors de la désexcitation d'un atome passant d'un état excité d'énergie $\mathcal{E}_2$ à un état fondamental d'énergie $\mathcal{E}_1$.

I – Oscillations au sein de l'atome de Thomson

Afin de donner une vision classique de l'émission d'un atome préalablement excité, nous allons étudier la réponse mécanique d'un électron à une excitation de l'atome.

Le modèle de l'atome d'hydrogène adopté ici est celui élaboré par Joseph Thomson, prix Nobel de Physique en 1906 pour avoir découvert l'électron en 1897. Il proposa en 1904 un modèle dit du «pudding aux électrons». Il s'agit :

- d'une boule de centre O et de rayon a , avec $a \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$, uniformément chargée en volume, de densité volumique de charge (uniforme à l'intérieur de la boule) notée ρ , de charge totale $+e$, considérée

tout d'abord immobile dans le référentiel du laboratoire,

- d'un électron ponctuel (masse m_e , charge $-e$) libre de se déplacer sans frottement à l'intérieur de la boule.

La position d'un point M de l'espace peut être repérée par ses coordonnées cartésiennes $M(x, y, z)$ dans la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, ou par ses coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$ associées à la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

I.A Force électrostatique ressentie par l'électron

Q.2 Donner l'expression de la densité volumique de charge ρ au sein de la boule du modèle.

Soit M un point quelconque de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques.

Q.3 Montrer que le champ électrostatique en M s'écrit : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$.

Q.4 Déterminer en tout point M intérieur à la boule, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par la distribution de charge caractérisée par ρ .

L'électron se situe en un point $M(r, \theta, \varphi)$ intérieur à la boule. On le repère par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. On suppose ici l'atome isolé et on néglige toute attraction gravitationnelle.

Q.5 Donner la force électrostatique ressentie par l'électron et la mettre sous la forme $\vec{F} = -m_e\omega_0^2\overrightarrow{OM}$ où on donnera l'expression de ω_0 . Commenter l'expression de cette force.

I.B Oscillations libres dans le modèle de l'électron élastiquement lié

Dans une lampe à vapeur, lors d'une décharge électrique, un atome peut recevoir beaucoup d'énergie à l'issue d'un choc. Le choc a lieu à l'instant $t = 0$ et l'atome se trouve alors dans un état initial d'énergie mécanique $\mathcal{E}_0$. L'électron est alors situé sur sa position d'équilibre en O , avec une énergie cinétique initiale non nulle car sa vitesse initiale vaut $\vec{v}(t = 0) = -V_0\vec{e}_z$. Pour $t \geq 0$, l'atome est supposé isolé.

Q.6 Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron. En déduire une équation différentielle vérifiée par le vecteur position $\vec{r}$ de l'électron. Déterminer alors son évolution temporelle en faisant apparaître la constante ω_0 .

Q.7 Donner l'expression du moment dipolaire électrique de l'atome d'hydrogène $\vec{p}(t)$ en fonction de e et $\vec{r}$. En déduire que $\vec{p}(t) = p_z(t)\vec{e}_z$ où on exprimera $p_z(t)$ comme une fonction sinusoïdale du temps dont on explicitera l'amplitude et la pulsation en fonction de e , V_0 et ω_0 .

Q.8 Déterminer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ_0 du rayonnement dipolaire associé. À quelle partie du spectre électromagnétique appartient ce rayonnement ?

I.C Introduction d'une force de frottements fluides

Pour affiner la description du mouvement de l'électron, on modélise un éventuel amortissement (faible) par l'ajout d'une force de type « frottement fluide » : $\vec{F}_f = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$ avec $\vec{v}$ la vitesse de l'électron. Cette force sera considérée comme un terme de perturbation, c'est-à-dire entre autre que $\tau\omega_0 \gg 1$ (hypothèse de faible amortissement). L'électron n'est soumis qu'aux trois forces décrites ci-dessus. Les conditions initiales sont les mêmes que précédemment (l'atome vient juste de subir un choc avec un porteur de charge d'énergie élevée).

Q.9 Donner l'origine physique d'une telle force. Quelle est la dimension de la constante τ ?

Q.10 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le moment dipolaire $\vec{p}(t)$ de l'atome. En tenant compte de l'hypothèse de faible amortissement, donner la solution approchée qu'on pourra écrire sous la forme :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_m(t) \sin(\Omega t + \phi) \quad \text{avec} \quad \vec{p}_m(t) = \vec{p}_0 e^{-\alpha t}$$

en exprimant $\vec{p}_0$, α , Ω et ϕ en fonction des données de l'énoncé.

Pour simplifier les notations, on posera $\vec{r}_0$ tel que $\vec{p}_0 = -e\vec{r}_0$.

Q.11 Écrire l'énergie potentielle élastique de l'oscillateur $\mathcal{E}_p(t)$ en fonction de m_e , ω_0 , r_0 et τ .

Q.12 Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)$ de l'oscillateur dans le référentiel du laboratoire et simplifier son expression en tenant compte de l'hypothèse de faible amortissement (on pourra montrer que cela revient à négliger la dérivée temporelle du facteur exponentiel devant celle du terme oscillant).

Q.13 Montrer alors que l'énergie mécanique de l'oscillateur peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{m_e}{2e^2} \omega_0^2 p_m^2(t)$$

puis mettre en évidence la durée caractéristique d'amortissement des oscillations.

II – Rayonnement de l'atome excité et largeur spectrale de la raie d'émission

Dans cette partie, nous allons tenter de proposer une justification de l'amortissement évoqué précédemment. Pour cela nous relierons la perte d'énergie de l'oscillateur à l'énergie électromagnétique rayonnée par l'atome excité à l'aide d'un modèle classique qui, tout simpliste qu'il soit, permet de rendre compte de certains résultats expérimentaux.

II.A Puissance rayonnée par un atome excité

Les oscillations effectuées par l'électron sont à l'origine d'un rayonnement électromagnétique. Pour décrire l'onde rayonnée par l'atome, on utilise un système de coordonnées sphériques centré sur O . Il s'agit maintenant de déterminer la puissance rayonnée par l'atome en le modélisant par un dipôle électrique oscillant (à la pulsation ω_0) non amorti et de moment dipolaire $\vec{p}(t) = p_z(t)\vec{e}_z$ avec $p_z(t) = p_m \sin(\omega_0 t)$.

L'onde sinusoïdale rayonnée, de longueur d'onde notée λ , sera étudiée en un point $M(r, \theta, \varphi)$ dans la zone de rayonnement. On rappelle que dans ces conditions, l'onde rayonnée a localement la structure d'une onde plane progressant dans le sens de $\vec{e}_r$.

Q.14 Formuler les approximations faites sur la hiérarchie des distances caractéristiques du problème dans la zone de rayonnement. Commenter physiquement les inégalités écrites.

Q.15 Identifier, parmi les quatre expressions suivantes, celle représentant le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$, puis celle représentant le champ électrique $\vec{E}(M, t)$, champs associés à l'onde émise par le dipôle oscillant. On justifiera la réponse notamment par des arguments d'analyse dimensionnelle et des considérations de symétrie.

$$(a) \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin(\theta) \ddot{p}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta$$

$$(c) \frac{\mu_0}{4\pi r c} \sin(\theta) \ddot{p}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta$$

$$(b) \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin(\theta) \ddot{p}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\varphi$$

$$(d) \frac{\mu_0}{4\pi r c} \sin(\theta) \ddot{p}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\varphi$$

Q.16 Établir l'expression du vecteur de Poynting en un point $M(r, \theta, \varphi)$ de la zone de rayonnement. En déduire sa moyenne temporelle que l'on exprimera en fonction de μ_0 , c , p_m , ω_0 , θ et r .

Q.17 Déterminer alors l'expression de la puissance moyenne rayonnée Φ_{ray} par l'atome à travers une sphère de rayon R en fonction de R , ε_0 , c , p_m et ω_0 .

Q.18 À l'aide de l'expression établie en **Q.13**, montrer que $\Phi_{ray} = \gamma \mathcal{E}_m$ où $\mathcal{E}_m$ est l'énergie mécanique de l'oscillateur et γ une constante que l'on exprimera en fonction de ε_0 , c , e , m_e et ω_0 .

II.B Amortissement des oscillations

Q.19 Estimation qualitative : rappeler l'expression de l'énergie totale rayonnée lors de l'émission d'un photon de pulsation ω_0 , de longueur d'onde dans le vide λ_0 correspondant au domaine visible.

Relier simplement l'ordre de grandeur de la puissance moyenne rayonnée, la quantité d'énergie totale rayonnée et la durée caractéristique de l'émission. Estimer, par un calcul simple, l'ordre de grandeur de la durée du train d'onde correspondant à l'émission en utilisant la formule trouvée en **Q.17** pour Φ_{ray} (il appartient au candidat d'estimer les données numériques éventuellement utiles). Quel commentaire peut-on faire à propos de la durée trouvée ?

On essaie par la suite d'affiner le calcul en utilisant les résultats obtenus précédemment. On estime que la puissance électromagnétique rayonnée par l'atome excité est puisée dans l'énergie mécanique de l'oscillateur. On suppose que l'amortissement qui en résulte peut être traité comme une perturbation du mouvement. On fait ainsi l'hypothèse (qui devra être vérifiée par la suite) que la décroissance de l'énergie mécanique de l'oscillateur est suffisamment lente pour qu'on puisse utiliser à chaque instant la formule $\Phi_{ray} = \gamma \mathcal{E}_m$. On appelle τ la durée caractéristique d'évolution de l'énergie mécanique.

Q.20 Écrire, en fonction de Φ_{ray} , l'expression de la variation de l'énergie mécanique de l'atome entre t et $t + \delta t$, où δt est une durée infinitésimale très faible devant τ et néanmoins grande devant la pseudo-période, c'est-à-dire $\tau \gg \delta t \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Q.21 En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'énergie mécanique et mettre en évidence la durée caractéristique τ . Donner l'ordre de grandeur de τ quand l'onde émise est dans le domaine du visible. Vérifier l'hypothèse faite sur le temps caractéristique de décroissance de l'énergie mécanique.

Q.22 Estimer alors la durée du train d'onde émis. Donner un ordre de grandeur de la largeur spectrale (en fréquence) qualifiée de *naturelle* du rayonnement émis.

Exercice 2 : Protection des données bancaires par un conducteur

La protection du téléphone portable contre le piratage est devenue essentielle. Cette partie s'intéresse à la mise en place d'une protection simple en insérant une feuille d'aluminium dans la pochette du téléphone. En effet, les puces à distance (NFC-RFID) possèdent une antenne et un convertisseur de signal. L'antenne perçoit le signal de fréquence d'environ 14 MHz, émis à distance par le terminal et le convertisseur transforme ce signal en signal « horloge » qui sert à synchroniser les échanges de la puce et du terminal. À quelques mètres, on peut donc solliciter une puce NFC-RFID et recueillir ses données relativement aisément. Pour se prémunir d'un piratage, il suffit de protéger son téléphone à l'aide d'un feuillet constitué par exemple d'aluminium.

On considère l'aluminium comme un conducteur ohmique, homogène, isotrope et non magnétique. Sa permittivité relative ϵ_r ainsi que sa perméabilité relative μ_r sont toutes les deux prises égales à l'unité. En son sein, les charges mobiles sont des électrons animés d'une vitesse d'ensemble $\vec{v}(t)$ soumis à l'action d'un champ électrique variable $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. Les électrons libres, de masse m et de charge $-e$, sont soumis en outre selon le modèle de Drüde, à une force $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}(t)$ où τ est une constante physique traduisant les interactions avec l'ensemble du réseau cristallin, sa valeur est d'environ 1×10^{-14} s. Le poids de ces charges est négligé. Le conducteur est immobile dans le référentiel d'étude, supposé galiléen.

I – Loi d'Ohm locale

- Q.1** Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ des électrons.
- Q.2** Déterminer, en régime forcé, une expression de la vitesse sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp(i\omega t)$ où $\vec{v}_0$ est l'amplitude vectorielle complexe de la vitesse que l'on exprimera en fonction des données du problème.
- Q.3** On note n^* la densité volumique, supposée constante, d'électrons libres. Déterminer l'expression, en notation complexe, du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$.
- Q.4** Montrer alors que l'on peut établir une loi d'ohm locale complexe en considérant que la conductivité électrique du milieu $\underline{\gamma}$ peut s'écrire, en notation complexe, sous la forme $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + ig(\omega)}$ où γ_0 correspond à la conductivité électrique « statique » et $g(\omega)$ à une fonction de la pulsation. On exprimera ces deux grandeurs en fonction des données de l'énoncé.
- Q.5** Déterminer la valeur de la fréquence limite f_{lim} en dessous de laquelle on peut considérer que la loi d'Ohm en notation réelle peut s'écrire sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$.
- Q.6** Peut-on écrire la loi d'Ohm sous la forme ci-dessus pour les communications NFC-RFID ?
- Q.7** Pour les communications NFC-RFID, estimer numériquement le rapport entre la norme du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ et celle du vecteur densité de courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ présent dans l'équation de Maxwell-Ampère que l'on rappellera.
- Q.8** En déduire une simplification de la formulation de l'équation de Maxwell-Ampère. Comment appelle-t-on cette approximation ?

II – Propagation d'une onde électromagnétique

On considère désormais une onde électromagnétique plane progressive et harmonique (OPPH) $\vec{E}_c(z, t)$ de pulsation ω se propageant dans le conducteur précédemment considéré qui occupe le demi-espace $z \leq 0$. En notation complexe, cette onde s'écrit

$$\vec{E}_c = E_{0,c} \exp[i(\omega t - k_t z)] \vec{e}_x$$

L'amplitude $E_{0,c}$ est supposée constante et le vecteur d'onde $\vec{k}_t = k_t \vec{e}_z$ est complexe de telle sorte que $k_t = \alpha + i\beta$ avec α et β réels.

- Q.9** On suppose que la loi d'Ohm s'écrit sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}_c$, montrer que dans le conducteur la densité volumique de charge $\rho(M, t)$ peut être considérée comme nulle au bout d'un temps τ' que l'on exprimera en fonction des données du problème. On pourra notamment utiliser l'équation de conservation de la charge, que l'on ne cherchera pas à démontrer, et établir l'équation vérifiée par $\rho(M, t)$.
- Q.10** Justifier que l'on peut supposer que le milieu est électriquement neutre. Écrire dans ces conditions l'équation de Maxwell-Gauss dans le conducteur ohmique.
- Q.11** En supposant que les valeurs des fréquences utilisées permettent d'utiliser les versions simplifiées des équations de Maxwell identifiées dans les questions précédentes, établir l'équation d'onde suivante pour le champ électrique $\vec{E}_c$ au sein du conducteur :

$$\Delta \vec{E}_c(z, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial \vec{E}_c(z, t)}{\partial t} = \vec{0}$$

Exprimer D en fonction des grandeurs du problème et préciser son unité.

- Q.12** Montrer alors que la relation de dispersion, pour le milieu considéré, s'écrit $k_t^2 = -i\omega\mu_0\gamma_0$.
- Q.13** Déterminer l'expression des grandeurs α et β en choisissant $\alpha > 0$, c'est-à-dire en considérant une propagation vers les z croissants.
- Q.14** Montrer alors que le champ électrique, en notation réelle, dans le conducteur peut se mettre sous la forme

$$\vec{E}_c(z, t) = E_{0,c} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x$$

et exprimer δ en fonction des données de l'énoncé.

- Q.15** Proposer une représentation soignée de la composante suivant x notée $E_{c,x}$ de $\vec{E}_c$ à t fixé, en fonction de z pour le demi-espace $z \leq 0$. On fera apparaître la grandeur δ sur le schéma.
- Q.16** Comment appelle-t-on δ ? Quelle est sa signification physique? Donner la valeur de δ pour les ondes électromagnétiques de communication NFC–RFID.

III – Réflexion sur un conducteur ohmique

L'onde $\vec{E}_c(z, t)$ présente dans le conducteur précédent est due à la présence d'une OPPH incidente se propageant dans le vide (supposé occuper le demi-espace $z < 0$) vers les z croissants de même pulsation ω et de la forme, en notation complexe :

$$\vec{E}_i(z, t) = \underline{E}_{0,i} \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_x$$

avec $k = \frac{\omega}{c} > 0$. L'onde incidente atteint le conducteur en $z = 0$.

- Q.17** Proposer une expression du champ électrique réfléchi d'amplitude complexe $\underline{E}_{0,r}$.
- Q.18** En exploitant les relations de continuité du champ électrique à la surface d'un dioptré, déterminer une relation reliant les coefficients complexes de transmission $\underline{t} = \frac{E_{0,c}}{E_{0,i}}$ et de réflexion $\underline{r} = \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}}$ en amplitude de l'onde électromagnétique.
- Q.19** Déterminer l'expression des champs magnétiques incident $\vec{B}_i(z, t)$, réfléchi $\vec{B}_r(z, t)$ et transmis $\vec{B}_c(z, t)$.

Q.20 En exploitant les relations de continuité du champ magnétique à la surface d'un dioptré et en considérant les courants surfaciques nuls, déterminer une nouvelle relation entre $\underline{t}$ et $\underline{r}$.

Q.21 En combinant les deux expressions précédentes de $\underline{t}$ et $\underline{r}$, montrer que :

$$\underline{r} = \frac{k\delta - 1 + i}{k\delta + 1 - i} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2k\delta}{k\delta + 1 - i}$$

Q.22 Que deviennent les expressions de $\underline{t}$ et $\underline{r}$ dans le cas où l'aluminium est considéré comme un conducteur parfait ? Que dire de l'efficacité de la protection de données avec un conducteur parfait ?

Q.23 En réalité, l'aluminium n'est pas un conducteur parfait. Déterminer la valeur du coefficient de transmission en énergie $T = 1 - |\underline{r}|^2$ pour des ondes électromagnétiques de communication NFC–RFID. Conclure sachant qu'une feuille d'aluminium standard de cuisine a une épaisseur $a = 0,020$ mm.

Données

Permittivité diélectrique du vide :	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide :	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide :	$c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante d'Avogadro :	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire :	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron :	$m_e = 0,91 \times 10^{-30} \text{ kg}$
Constante de Planck :	$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann :	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits :	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire du mercure :	$M_{\text{Hg}} = 200,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Conductivité de l'aluminium en régime statique :	$\gamma_0 = 38 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Formulaire

Valeurs de quelques intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} x \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \quad ; \quad \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = \frac{4}{3}$$

Relations de continuité des champs : En présence de charges surfaciques σ , la composante normale du champ électrique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante tangentielle est toujours continue :

$$\vec{E}_{2,n} - \vec{E}_{1,n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{2,t} - \vec{E}_{1,t} = \vec{0}$$

En présence de courants surfaciques $\vec{j}_s$, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue au niveau d'un dioptré séparant deux milieux 1 et 2, sa composante normale est toujours continue :

$$\vec{B}_{2,t} - \vec{B}_{1,t} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{2,n} - \vec{B}_{1,n} = \vec{0}$$

● ● ● FIN ● ● ●