DS 8 (4 heures)
Mécanique (CCP)

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	**Indicateur**
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respéctés	**Palier de Malus**	**Effet sur la note**
0	0	aucun
1–2	1	−3.3%
3–4	2	−6.7%
5–6	3	−10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Phénomène de frottement solide et applications

Ce problème s'intéresse à différents cas de frottements secs qui induisent des types de mouvement relatif possible dans certaines conditions pour un couple {solide 1 – solide 2}. Ces propriétés viennent du choix du support pour un mobile donné.
La **partie I** est composée de questions de cours à propos des lois de Coulomb dont les réponses attendues permettront de mieux exploiter les parties suivantes. Les **parties II et III** présentent des exemples de mesures de coefficients de frottement solide. La **partie IV** développe une modélisation simple du phénomène de *stick–slip*. Dans tout le problème, le référentiel du laboratoire sera considéré comme galiléen.

I – Lois de Coulomb relatives au glissement

On rappelle ci-dessous les lois de Coulomb, en notant f_s et f_g les coefficients statiques et dynamiques du frottement et $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la réaction du support :

- En mode statique (absence de glissement donc adhérence), la norme de la composante tangentielle $\|\vec{T}\|$ est inférieure à la quantité $f_s\|\vec{T}\|$ dans laquelle $\|\vec{N}\|$ représente la norme de la composante normale $\vec{N}$ de la réaction : $\|\vec{T}\| \leq f_s\|\vec{N}\|$
- En mode dynamique (présence de glissement), on a alors l'égalité $\|\vec{T}\| = f_g\|\vec{N}\|$ avec une composante tangentielle toujours opposée à la vitesse de glissement : $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$ et $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$.

Q.1 a) Définir ce qu'on appelle la vitesse de glissement $\vec{v}_g$ d'un solide par rapport à un autre en un point de contact.
b) Doit-on préciser dans quel référentiel elle est exprimée ? Justifier.

Q.2 Expliquer à quelle condition on passe de l'adhérence au glissement.

Q.3 Expliquer à quelle condition on passe du glissement à l'adhérence.

II – Mesure du coefficient de frottement dynamique

On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient f_g de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de S et celui du solide 1. On utilise le dispositif représenté sur la FIGURE 1 : le solide 1 de masse M est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse αM ($\alpha > 1 > f_s$). Le fil sans masse de longueur L passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe S horizontal. On appelle H l'altitude du solide 2 au–dessus d'un support horizontal S'. À l'état initial, les solides sont immobiles, le solide 1 est à l'abscisse $X(t=0) = X_0$ et le solide 2 est à l'altitude $H(t=0) = H_0$.
On mesure la distance D parcourue par le solide 1 sur le support S, sachant que le solide 2 touche S' avant que le solide 1 ne s'arrête.

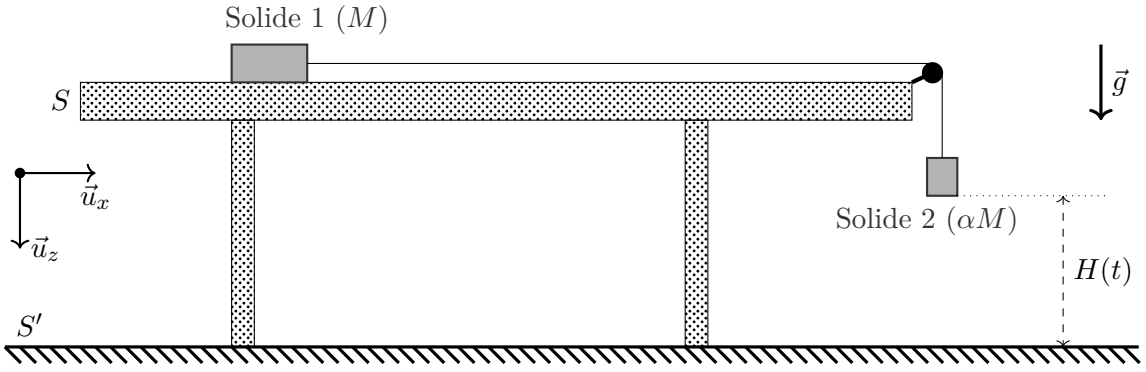


FIGURE 1 – Premier dispositif : mesure du coefficient de frottement dynamique

Consignes : on note g l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement T et N les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support S sur le solide 1, avec f_g le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

Q.4 Décrire qualitativement les deux phases successives du mouvement de l'ensemble en précisant pour chacune d'elles si le fil est tendu ou non tendu.

Q.5 La nature « idéale » de la poulie et du fil permet de considérer que la norme F de la tension du fil est conservée tout le long du fil. En appliquant le théorème de la résultante cinétique au solide 1 et au solide 2, écrire les 3 relations qui lient N, T, F, g, α, M, l'accélération horizontale $\ddot{X}$ du solide 1 et l'accélération verticale $\ddot{Z}$ du solide 2.

Q.6 Traduire la loi de Coulomb pour exprimer $\vec{T}$.

Q.7 On s'intéresse à la première phase du mouvement.
a) Exprimer le lien entre $\ddot{X}$ et $\ddot{Z}$ en le justifiant dans cette première phase.
b) Établir dans cette phase la vitesse $\dot{X}(t)$ en fonction de α, f_g et g.
c) Quelle est la durée t_1 de cette première phase ?
d) Quelle est la vitesse correspondante atteinte V_1 ?

Q.8 On s'intéresse à la deuxième phase du mouvement.
a) Exprimer $X(t)$ dans cette phase en fonction de t, t_1, V_1, X_0, H_0, g et f_g.
b) Exprimer f_g en fonction de a, H_0 et D.

Q.9 Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chacune des deux phases du mouvement.

Q.10 On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de $H_0 = 40{,}0\,\text{cm}$. La masse du solide 1 vaut $M = 50\,\text{g}$ et celle du solide 2 vaut $\alpha M = 60\,\text{g}$. Calculer la valeur du coefficient de frottement f_g sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance D égale à $D = 1{,}50\,\text{m}$.

III – Mesure du coefficient de frottement statique

On pose maintenant le solide 1 sur le support S qui fait un angle θ avec le plan horizontal. Le dispositif est représenté sur la FIGURE 2. On fait augmenter, à partir d'une valeur faible, l'angle θ en déplaçant lentement un coin et on mesure pour quelle valeur $\theta = \theta_{lim}$ le solide 1 se met à glisser.

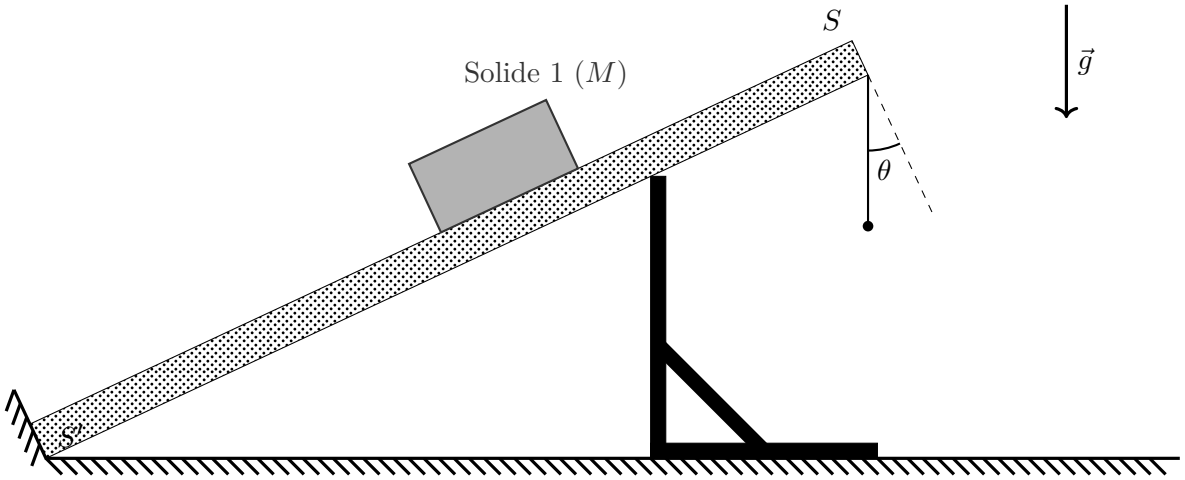


FIGURE 2 – Second dispositif : mesure du coefficient de frottement statique

Q.11 Montrer que cette expérience permet de mesurer le coefficient de frottement f_s.

Q.12 On réalise plusieurs essais successifs de décrochement et la valeur moyenne de θ_{lim} est de l'ordre de 29,5°. En déduire la valeur du coefficient de frottement cherché.

IV – Phénomène de *stick–slip*

Données : accélération de la pesanteur $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Le domaine des ondes sonores, perceptibles par l'oreille humaine, va d'une fréquence de 20 hertz à une fréquence de 20 kHz. Une grande fréquence correspond à un son aigu.
Consignes : on notera systématiquement N et T les normes des composantes normale et tangentielle de la réaction d'un support. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

Le phénomène *stick–slip* (littéralement coller–glisser) intervient quand les coefficients de frottement statique et dynamique ont des valeurs très différentes. Il s'agit d'un mouvement saccadé qui contient des phases de glissement et d'adhérence successives, que l'on cherche ici à caractériser.

Le solide 1 de masse $M = 50\,\mathrm{g}$ est relié à un point fixe A par un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. Il se déplace sur un tapis roulant horizontal caractérisé par un coefficient de frottement dynamique nul et par un coefficient statique $f_s = 0{,}6$. La situation est représentée Figure 3. On note $X(t)$ l'allongement instantané du ressort.

Dans la situation initiale, $X(t=0) = X_0 > 0$ et le solide 1 est abandonné sans vitesse initiale relativement au tapis. Il se déplace alors dans le référentiel du laboratoire à la vitesse uniforme $\vec{V} = V\vec{u}_x$.

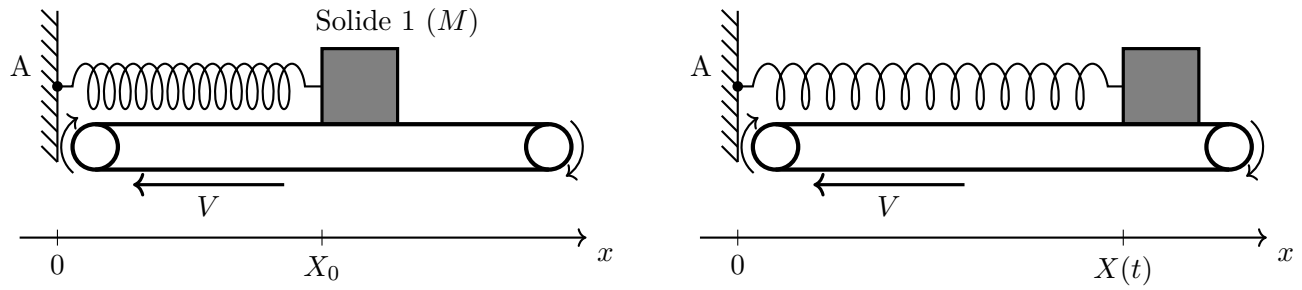


Figure 3 – Troisième dispositif : mouvement de *stick–slip*

Q.13 Établir les expressions de l'allongement X_1 et de la date t_1 associés au début du glissement du solide 1 par rapport au tapis.

Q.14 a) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $X(t)$ après la date t_1. Comment appelle-t-on ce type de système ? Exprimer la pulsation propre ω_0 associée en fonction des données du problème.

b) Déterminer, par une méthode énergétique, l'allongement maximal X_M atteint par la masse en fonction de X_1, V et la pulsation propre ω_0 trouvée précédemment.

Q.15 a) Déterminer les fonctions allongement $X(t)$ et vitesse $\dot{X}(t)$ pendant la phase de glissement.
b) Pour quelle valeur de $\dot{X}(t = t2)$, cette phase s'arrête-t-elle ?
c) Représenter l'allure de $X(t)$ et de $\dot{X}(t)$ entre $t = 0$ et $t = t_1 + t_2$.

Q.16 À quelle condition d'inégalité entre la période propre τ_0 et X_1/V peut-on considérer que l'abscisse maximale X_M est très voisine de X_1 ? On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite de cette partie.

Q.17 Montrer qu'alors la fréquence approchée du mouvement est donnée par $\nu = \dfrac{\omega_0^2 V}{2gf_s}$. Évaluer numériquement cette fréquence en supposant que la raideur vaut $k = 4\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ et que la vitesse du tapis roulant vaut $V = 6\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Q.18 Représenter l'allure de $X(t)$ sur une période.

Q.19 Ce phénomène se retrouve dans beaucoup de situations quotidiennes : craie qui crisse sur un tableau, porte qui grince, pneu qui crisse ou encore archet de violon sur une corde.
a) Dans quel domaine de fréquences sont donc ces mouvements de *stick–slip* ?
b) Pourquoi en cassant la craie supprime-t-on ce crissement, sachant que la raideur k d'un bâton est inversement proportionnelle au cube de sa longueur ?

Q.20 Évaluer le travail des forces de frottement sur une période dans ce modèle. Commenter.

Exercice 2 : Bille dans un tube en rotation

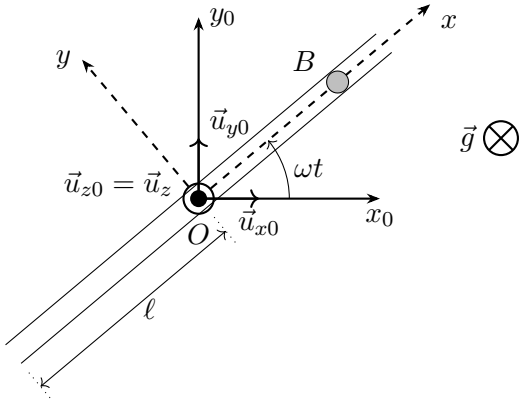
Dans tout le problème, le référentiel terrestre $(\mathcal{R}_0)$ est supposé galiléen et on le munit du repère d'espace (O, x_0, y_0, z_0) de vecteurs unitaires $(\vec{u}_{x0}, \vec{u}_{y0}, \vec{u}_{z0})$ et tel que (Oz_0) soit la verticale ascendante. L'accélération de la pesanteur est alors $\vec{g} = -g\vec{u}_{z0}$, supposée uniforme et dirigée selon la verticale descendante.

On envisage différentes situations d'une bille B, de masse m, quasi-ponctuelle, susceptible de se déplacer à l'intérieur d'un tube cylindrique mince (T), de longueur 2ℓ.

Le tube effectue divers mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe dans $(\mathcal{R}_0)$ et passant par son centre O. Le mouvement de la bille dans le tube a lieu sans frottements.

I – Mouvement horizontal

Dans un premier temps, le tube (T) est dans le plan horizontal (x_0Oy_0) et tourne autour de l'axe (Oz_0) à la vitesse angulaire constante ω. On définit le repère tournant $(Oxyz)$ lié au tube, tel que $(Oz) = (Oz_0)$ et $(\vec{u}_{x0}, \vec{u}_x) = \omega t$.



La position de B dans le tube est repérée par $\overrightarrow{OB} = x\vec{u}_x$. Initialement, la position et la vitesse de la bille dans le référentiel du tube (T) sont $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$. La réaction du tube sur la bille est notée $\vec{N} = N_y\vec{u}_y + N_z\vec{u}_z$.

Q.1 Faire un bilan des forces exercées sur la bille B dans le référentiel du tube (T) et donner les projections de toutes les forces sur les vecteurs de la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ attachée à $(Oxyz)$.

Q.2 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la bille dans le référentiel du tube, montrer que l'équation différentielle du mouvement de la bille s'écrit :

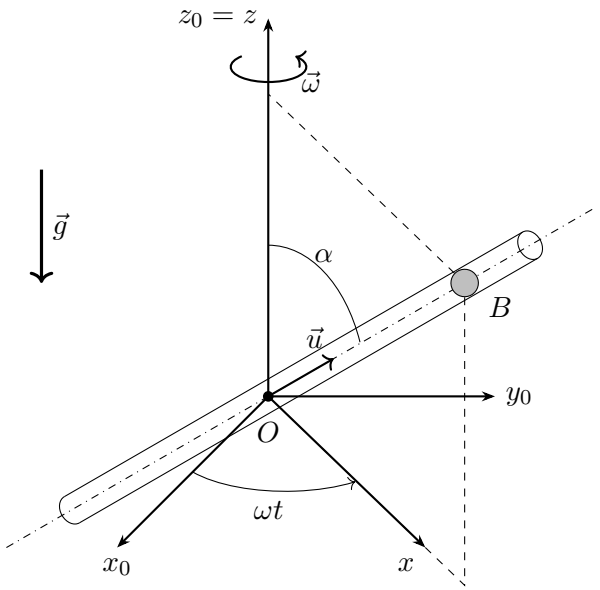
$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

Q.3 Intégrer cette équation compte tenu des conditions initiales et déterminer le temps τ que mettra la bille pour sortir du tube.

Q.4 Déterminer l'expression de la réaction $\vec{N}$ et commenter le résultat.

II – Mouvement incliné

Le tube (T) tourne toujours autour de l'axe (Oz_0) à la vitesse angulaire constante ω, mais avec une inclinaison α constante par rapport à la verticale. On étudie le mouvement de la bille B dans le référentiel du tube muni du repère tournant $(Oxyz)$ comme défini dans la partie précédente. Dans ce repère, le tube est immobile dans le plan (Oxz).



La position de la bille B dans le tube est repérée par $\overrightarrow{OB} = r\vec{u}$ où $\vec{u}$ représente le vecteur unitaire directeur du tube.

Q.5 Déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée à la force de pesanteur en fonction de r et α.

Q.6 Exprimer la force d'inertie d'entraînement exercée sur B puis calculer le travail élémentaire associé, δW_e, reçu par la bille lorsqu'elle se déplace de $\mathrm{d}x\vec{u}_x$ alors que le tube est en rotation.

Q.7 En déduire que la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle $E_{p,e} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2$. Où on exprimera Ω en fonction de ω et α.

Q.8 Le système est-il conservatif ? Justifier la réponse.

Q.9 Déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la bille en fonction de r, m, g, α et Ω.

Q.10 En déduire que la nouvelle équation différentielle du mouvement de la bille s'écrit :

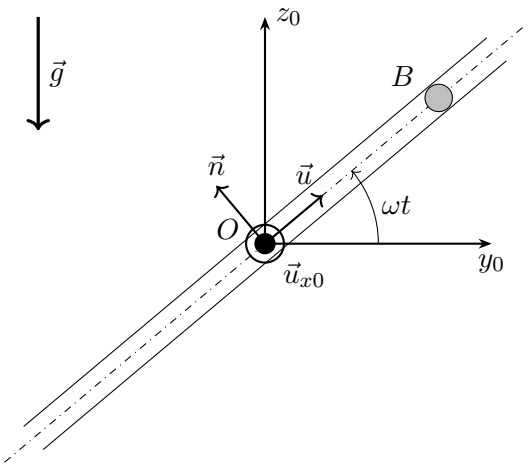
$$\ddot{r} - \Omega^2 r = -g\cos\alpha$$

Q.11 Déterminer les positions d'équilibre de B dans le référentiel du tube et étudier la stabilité de ces positions.

III – Mouvement vertical

On étudie une dernière configuration dans laquelle le tube (T) reste dans le plan vertical (Oy_0z_0) et tourne à vitesse angulaire ω constante autour l'axe $(Ox_0) = (Ox)$.

On introduit le vecteur $\vec{u}$ (vecteur unitaire directeur du tube) tel que $(\vec{u}_{y0}, \vec{u}) = \omega t$ et le vecteur $\vec{n}$ qui est orthogonal à $\vec{u}$, de sorte que $(\vec{u}, \vec{n}, \vec{u}_{x0})$ soit une base orthonormée directe.



On veut étudier le mouvement de la bille B dans le référentiel du tube muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{n}, \vec{u}_{x0})$. La position de B dans le tube est donc repérée par $\overrightarrow{OB} = r\vec{u}$. À l'instant initial, la position et la vitesse de B dans le référentiel du tube sont $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = v_0$.

Q.12 Faire un bilan des forces exercées sur la bille B dans le référentiel du tube et donner les projections de toutes les forces sur les vecteurs de la base $(\vec{u}, \vec{n}, \vec{u}_{x0})$.

Q.13 En déduire que l'équation différentielle du mouvement de la bille s'écrit maintenant :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = -g\sin(\omega t)$$

Q.14 Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

Q.15 Existe-t-il une position d'équilibre de la bille par rapport au tube ? À quelle condition le mouvement est-il rectiligne sinusoïdal dans le référentiel du tube ? Décrire le mouvement de B lorsque les conditions initiales sont telles que :

$$v_0 = \frac{g}{2\omega} - \omega r_0$$

• • • FIN • • •