# DS 8 (4 heures)

## *Mécanique (Centrale)*

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

| **Critère** | **Indicateur** |
|---|---|
| Lisibilité de l'écriture | L'écriture ne ralentit pas la lecture. |
| Respect de la langue | La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire. |
| Clarté de l'expression | La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture. |
| Propreté de la copie | La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées. |
| Identification des questions et pagination | Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée. |
| Mise en évidence des résultats | Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence. |

| **Nombre de critères non respéctés** | **Palier de Malus** | **Effet sur la note** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | aucun |
| 1–2 | 1 | −3.3% |
| 3–4 | 2 | −6.7% |
| 5–6 | 3 | −10% |

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## Exercice 1 : Voyage entre la Terre et Mars

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains. Cet exercice propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars. Cet exercice est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Les principales données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas ou peu guidées. Elles nécessitent plus de temps pour élaborer un modèle ou un raisonnement, le barème en tient compte.

Les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe $a$ des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

### I – Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

**Q.1** Donner les dimensions de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$ ainsi que son unité dans le système international.

**Q.2** Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ en $O$, centre du Soleil, d'un objet de masse $m$ est une constante du mouvement.

**Q.3** On utilise les coordonnées cylindriques associées à la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ tel que $\vec{L}_O = L_O\vec{e}_z$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $L_O$ et $m$. Quel est le nom de cette grandeur ?

**Q.4** Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon $r$, la vitesse $V$ de l'objet en fonction de $\mathcal{G}$, $M_S$, $r$ et $m$. Calculer les valeurs numériques de $V_T$, la vitesse orbitale de la Terre et de $V_M$, celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

### II – Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

**Q.5** Déduire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse $m$ sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de $\mathcal{G}$, $M_S$, $r$ et $m$.

**Q.6** Exprimer la période de rotation $T$ de l'objet en fonction $\mathcal{G}$, $M_S$ et $r$ (troisième loi de Kepler).

*Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon $R$ par le demi-grand axe de la trajectoire.*

### III – Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

**Q.7** Représenter, sur la FIGURE A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

**Q.8** Exprimer en fonction de $V_T$, $a_M$ et $a_T$ (demis–grands axes des trajectoires de Mars et de la Terre), la vitesse $V_T'$ que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert lorsqu'il quitte l'orbite de la Terre. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V_T' - V_T$. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T$.

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

**Q.9** Exprimer puis calculer la durée $\Delta t$ du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

**Q.10** Quel doit être l'angle (Terre – Soleil – Mars), noté $\alpha_0 = \theta_M(t = 0) - \theta_T(t = 0)$, formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de $\alpha_0$ et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la FIGURE A du document réponse.

**Q.11** Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

## IV – Durée de la mission

Toujours pour minimiser le cout énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

**Q.12** Déterminer l'angle (Terre – Soleil – Mars), noté $\alpha_1$, au moment du départ de Mars.

**Q.13** En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta\vec{V_T}$ colinéaire à $\vec{V_T}$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.
Dans la suite, on cherche une réduction de 25% de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$.
On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ où $p$ est appelé paramètre de la conique et $e$ son excentricité.

**Q.14** Placer sur la FIGURE B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

**Q.15** Justifier que $r_P$, le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.

**Q.16** Montrer que l'excentricité s'écrit $e = \dfrac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$ et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la FIGURE B l'allure de la trajectoire.

**Q.17** Exprimer l'énergie mécanique $E_m$ du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de $m$, $V_T$ et $e$.

**Q.18** En déduire la vitesse $V_T''$ que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de $V_T$ et $e$.

**Q.19** Donner, en fonction de $V_T$ et $e$, la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.

**Q.20** Exprimer $C = r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $a_T$ et $V_T''$.

**Q.21** Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.

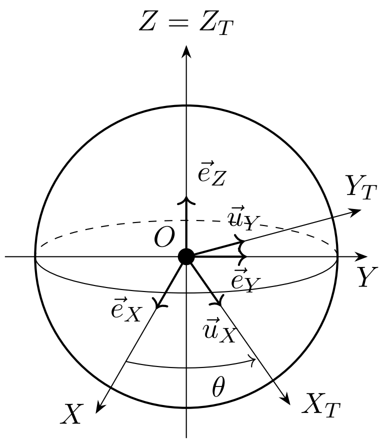
On donne : $\displaystyle\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = 2{,}15$ avec l'excentricité calculée en **Q.16**.

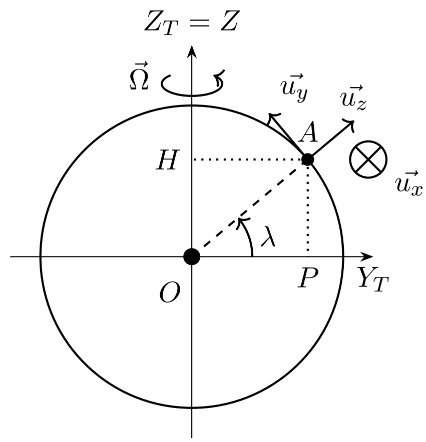
## Exercice 2 : Mécanique terrestre

Cet exercice s'intérresse à quelques aspects de la mécanique à la surface terrestre. La Terre est assimilée à une boule homogène de centre noté $O$, de rayon $R_T$ et de masse $M_T$. Le référentiel géocentrique $(\mathcal{R}_G)$ est supposé galiléen. On le considère comme le référentiel absolu et on le munit du repère absolu $(OXYZ)$ et de la base canonique $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$.

Par rapport à $(\mathcal{R}_G)$, le référentiel terrestre $(\mathcal{R}_T)$ est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles $(SN)$ qui coïncide avec $(OZ)$, fixe dans $(\mathcal{R}_G)$, avec une vitesse angulaire constante $\omega = 7{,}29 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

On munit $(\mathcal{R}_T)$ du repère $(OX_TY_TZ_T)$, dont la base orthonormale directe associée est $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z = \vec{e}_Z)$. La rotation est paramétrée par l'angle $\theta = (\vec{e}_X, \vec{u}_X)$ tel que $\omega = \dot{\theta}$.




On considère un point $A$ de la surface terrestre, fixe dans $(\mathcal{R}_T)$, situé dans le plan $(OY_TZ_T)$ à la latitude $\lambda$ (voir ci-dessus) et on appelle $P$ son projeté dans le plan de l'équateur. L'angle $\lambda$ peut varier entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$ : il est négatif dans l'hémisphère Sud et positif dans l'hémisphère Nord.

Dans tout l'exercice, les calculs se feront dans la base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ indiquée sur le schéma ci-dessus. On étudie le mouvement d'un point matériel $M$ de masse $m$ dans le référentiel terrestre $(\mathcal{R}_T)$. Ce point reste toujours au voisinage du point $A$ et proche de la surface terrestre. On pose :

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

avec $\overrightarrow{OM} \approx \overrightarrow{OA} = R_T\vec{u}_z$. Le projeté de $M$ sur l'axe de rotation $SN$ sera noté $H$. Enfin, comme $M$ reste proche de la surface terrestre, le champ de gravitation en $M$ pourra s'approximer par $\vec{G}_T(M) = -g_0\vec{u}_z = -\mathcal{G}\dfrac{M_T}{R_T^2}\vec{u}_z$.

## I – Champ de pesanteur terrestre

**Q.1** Calculs préliminaires.

a) Exprimer les trois vecteurs $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ dans la base $(\vec{u}_X,\vec{u}_Y,\vec{u}_Z)$.

b) À partir de la relation générale donnant l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(M)$ du point $M$, montrer que celle-ci peut aussi se mettre sous la forme : $\vec{a}_e(M) = -m\omega^2\overrightarrow{HM}$.

c) Expliquer pourquoi $\vec{v}_{/\mathcal{R}_T}(M) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$.

**Q.2** Montrer que lorsque la seule force d'interaction que subit le point $M$ est gravitationnelle, le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}_T}(M) = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_T}(M)$$

où $\vec{g}$ est un vecteur que l'on explicitera en fonction de $g_0\vec{u}_z$, $\omega$ et $\overrightarrow{HM}$.

**Q.3** a) Expliciter les composantes de $\vec{g}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de $g_0$, $\omega$, $\lambda$ et $R_T$.

b) Soit $\alpha$ l'angle entre $\overrightarrow{AO}$ et $\vec{g}$. Déterminer $\tan\alpha$ en fonction de $g_0$, $\omega$, $\lambda$ et $R_T$.
*Application numérique* : calculer $\alpha$ à la latitude $\lambda = 45°$ Nord.

**Q.4** Donner l'expression de $\Delta g = g_{max} - g_{min}$, différence des normes de l'accélération de la pesanteur aux pôles (maximale) et à l'équateur (minimale). Calculer la valeur numérique de $\Delta g$. En réalité, on mesure $\Delta g = 52{,}10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Proposer une raison pour expliquer l'écart trouvé.

Compte tenu des valeurs numériques calculées, on admettra par la suite que les composantes de $\vec{g}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont $(0, 0, -g)$ où $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ est une constante.

## II – Pendule de Foucault

Un pendule de Foucault est un pendule simple constitué d'un fil inextensible de longueur $L$ suspendu à un point $B$ sur un axe $(\Delta)$ qui est la verticale locale du point $A$, de sorte que $\overrightarrow{AB} = L\vec{u}_z$. À l'autre bout du fil, on attache un objet $M$ de masse $m$. La longueur du fil est en réalité très légèrement inférieure à $L$ afin que le point $M$ ne touche jamais le sol. L'étude est menée dans le référentiel terrestre $(\mathcal{R}_T)$ non-galiléen. Pour les applications numériques, on prendra $\lambda = 45°$ Nord et $L = 15\,\mathrm{m}$.

**Q.5** On note $\vec{T}$ la tension exercée par le fil sur le point $M$ et $T$ sa norme. Déterminer l'expression de $\vec{T}$ en fonction de $T$, du vecteur $\overrightarrow{MB}$ et de $L$.

**Q.6** Établir les trois équations différentielles auxquelles obéissent les trois coordonnées $x$, $y$ et $z$.

Dans la suite du problème, on étudie les petites oscillations au voisinage de $A$, ce qui suppose que $z \approx 0$, $\dot{z} \approx 0$ et $\ddot{z} \approx 0$. On supposera en outre que $|2\omega\dot{x}\cos(\lambda)| \ll g$.

**Q.7** Montrer que les équations différentielles vérifiées par $x$ et $y$ s'écrivent de façon approchée :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 2\Omega\dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= -2\Omega\dot{x} \end{cases}$$

où on précisera les expressions de $\omega_0$ et $\Omega$. Faire les applications numériques.

**Q.8** Dans le but de résoudre ce système d'équations couplées, on définit la fonction complexe $u = x + iy$ (avec $i^2 = -1$). Déterminer l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit $u$. En déduire sa solution générale en introduisant deux constantes d'intégration complexes qu'on ne cherchera pas à déterminer pour le moment.

Afin d'interpréter plus facilement les solutions précédentes, on effectue un changement de base. On introduit la base $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z = \vec{u}_z)$ en rotation par rapport à la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ autour du vecteur $\vec{u}_z$ à la vitesse de rotation constante $\vec{\Omega} = -\Omega\vec{u}_z$. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, les deux bases sont confondues. On pose :

$$\overrightarrow{AM} = x'(t)\vec{u}'_x + y'(t)\vec{u}'_y + z'(t)\vec{u}'_z \qquad \text{et} \qquad u'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

**Q.9** Montrer que $u(t) = u'(t)e^{-i\Omega t}$.

**Q.10** On suppose que la masse oscillante $M$ est abandonnée sans vitesse initiale dans la position $M_0$ de coordonnées $(x_0 > 0, y_0 = 0)$. Expliciter dans ce cas l'expression complète de $u'(t)$ et montrer que :

$$x'(t) = a\cos(\omega_1 t) \qquad \text{et} \qquad y'(t) = b\sin(\omega_1 t)$$

en précisant les expressions de $a$, $b$ et $\omega_1$.

**Q.11** Quelle est la nature de la trajectoire avec les coordonnées $x'$ et $y'$ ? Calculer numériquement le rapport $b/a$ ainsi que l'écart relatif $\dfrac{|\omega_1 - \omega_0|}{\omega_0}$. Que peut-on en conclure ?

**Q.12** Les équations précédentes peuvent s'interpréter comme décrivant un pendule oscillant avec une période $T_0$ dans un plan $(P)$ qui tourne autour de l'axe $\Delta$ avec une période $T_R = \dfrac{2\pi}{\Omega}$. Déterminer $T_0$ ainsi que la durée $T_R$ d'une rotation complète de ce plan d'oscillations. Application numérique.

## III – Déviation vers l'est

On étudie maintenant le mouvement du point $M$ lorsqu'il tombe en chute libre, sans vitesse initiale, à partir d'un point $B$ d'altitude $z_0$ à la verticale du point $A$. Le référentiel terrestre n'est toujours pas considéré galiléen.

**Q.13** Déterminer en fonction de $g$, $\omega$ et $\lambda$, les trois équations différentielles auxquelles obéissent les trois coordonnées $x$, $y$ et $z$ du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Comme $\omega$ est très faible, il est possible de voir le phénomène de déviation vers l'est comme une perturbation de la trajectoire en référentiel galiléen. On ne garde donc que les termes d'ordre au plus 1 en $\omega$.

**Q.14** Résoudre, dans cette approximation, les équations différentielles obtenues à la question précédente et montrer que :

$$x(t) = at^3 \quad ; \quad y(t) = 0 \quad ; \quad z(t) = bt^2 + z_0$$

où $a$ et $b$ sont deux constantes à expliciter en fonction de $g$, $\omega$ et $\lambda$.

**Q.15** En déduire que la particule tombe sur le sol en étant déviée vers l'Est d'une quantité $x_1$ à exprimer. Calculer la valeur numérique de $x_1$ pour $z_0 = 200\,\text{m}$ et $\lambda = 45°$. Commenter.

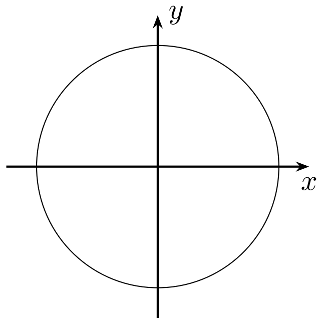
**Q.16** Que se passerait-il si on considérait les termes d'ordre 2 en $\omega$ ?

## Données

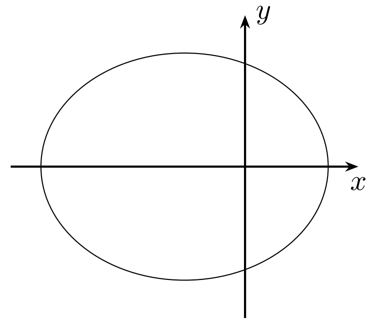
| | |
|---|---|
| Masse du Soleil | $M_S = 2{,}00 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ |
| Masse de la Terre | $M_T = 6{,}00 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ |
| Demi-grand axe de l'orbite de la Terre | $a_T = 150 \times 10^{6}\,\mathrm{km}$ |
| Demi-grand axe de l'orbite de Mars | $a_M = 228 \times 10^{6}\,\mathrm{km}$ |
| Constante gravitationnelle | $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI}$ |
| Champ de pesanteur terrestre | $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ |
| Rayon de la Terre | $R_T = 6{,}4 \times 10^{3}\,\mathrm{km}$ |
| Période de révolution de la Terre | $T_T = 365\,\mathrm{jours}$ |
| Période de révolution de Mars | $T_M = 687\,\mathrm{jours}$ |

## Formulaire

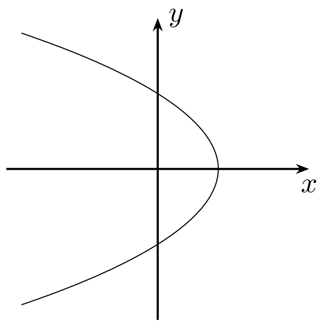
L'équation polaire d'une conique d'axe focal $(Ox)$, de paramètre $p$ et d'excentricité $e$ s'écrit $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$.
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas :



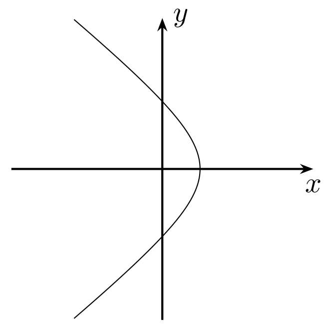

$e = 0$, la courbe est un cercle




$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse




$e = 1$, la courbe est une parabole




$e > 1$, la courbe est une hyperbole

**••• FIN •••**

# Annexe du DS 8
**(À détacher et à rendre avec la copie)**

**Exercice 1, Questions 7 et 10**

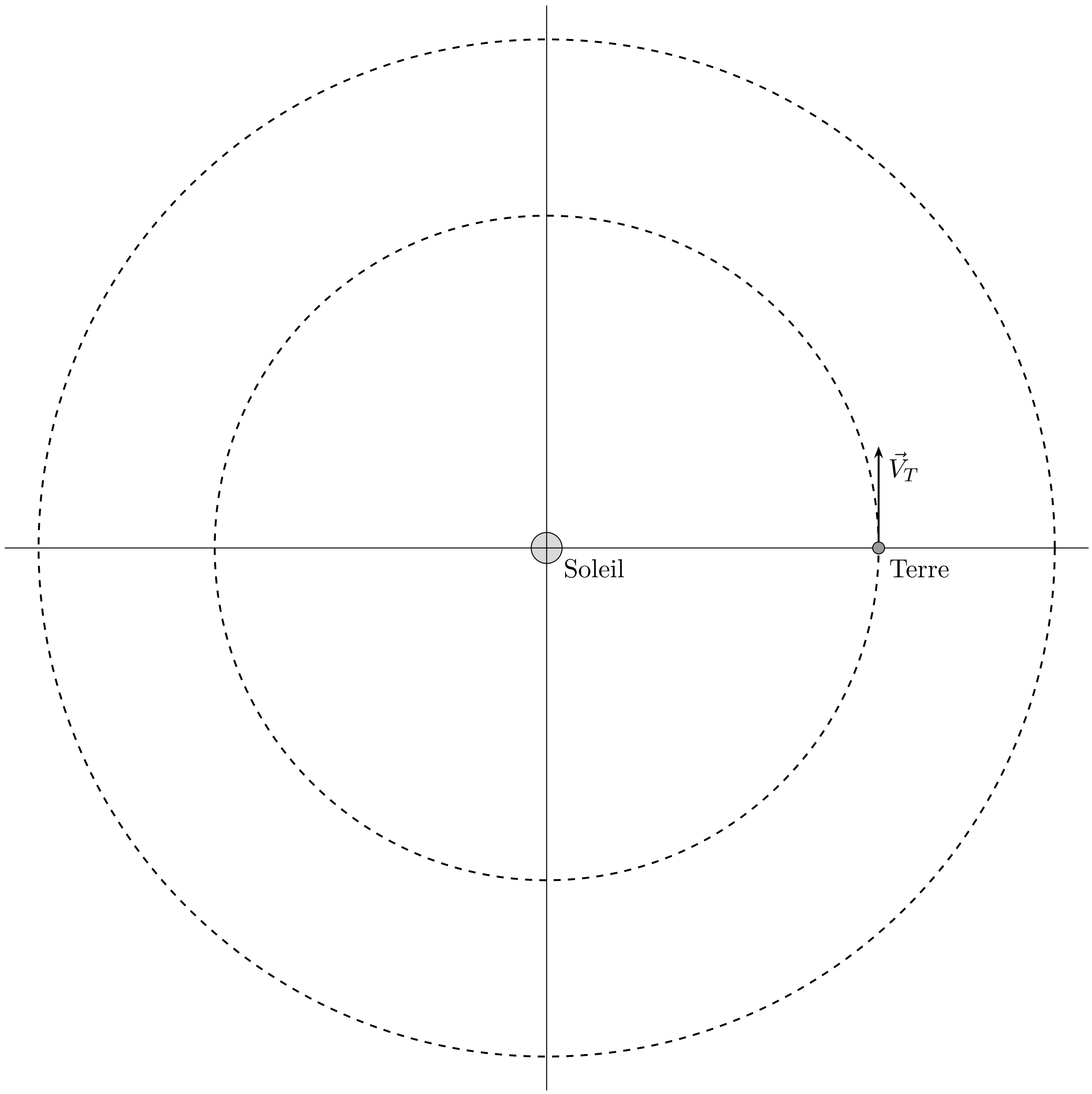



Figure A

**Exercice 1, Questions 14 et 16**

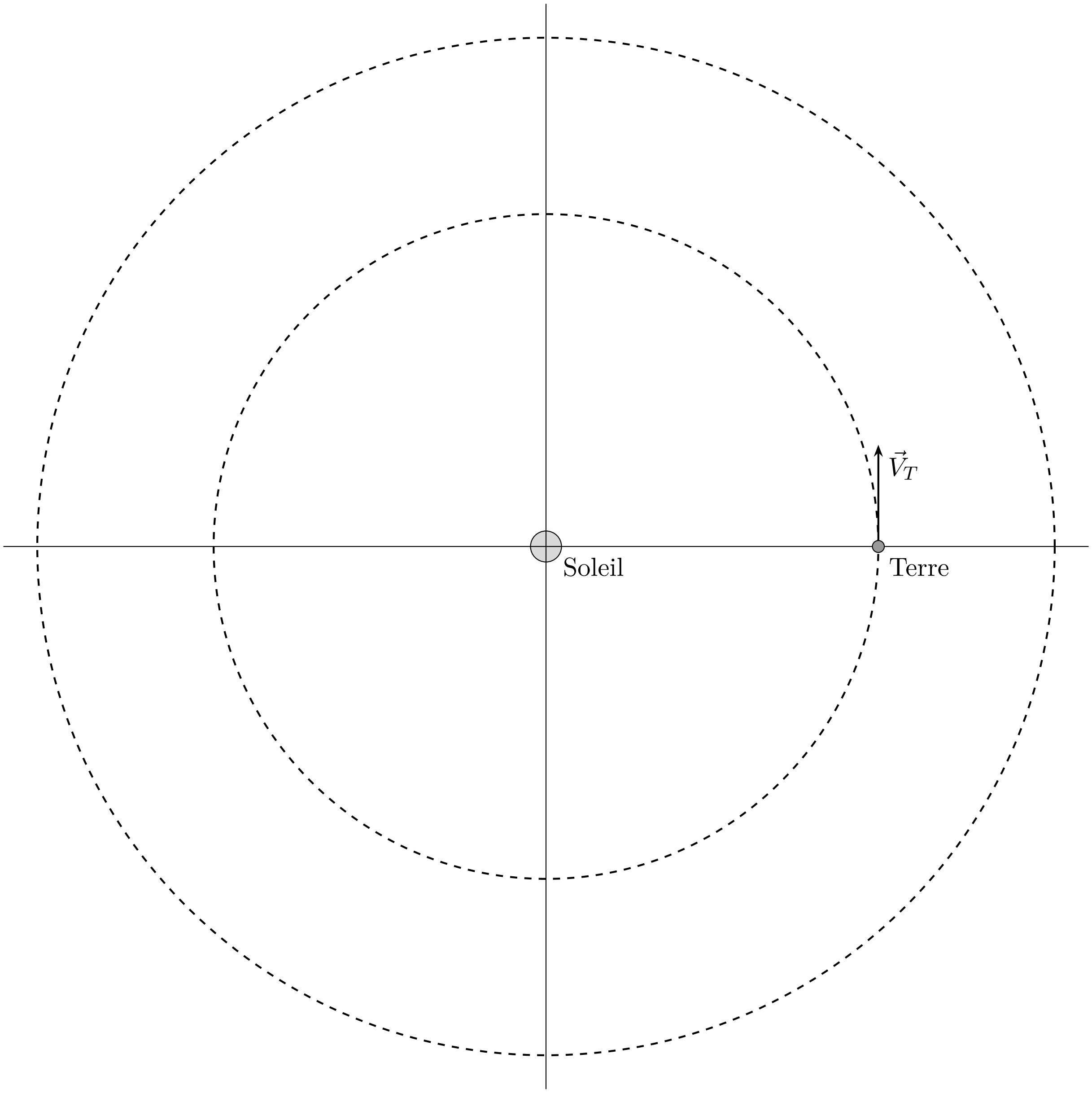



Figure B