Compléments de cours
Traitement du signal

I) Décomposition en série de Fourier

Dans toute cette partie, on considère un signal périodique $f(t)$ de période T et de fréquence f. On pose $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$. Ce signal se décompose en série de Fourier suivant :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

ou encore :

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Les coefficients a_i, b_i et c_i sont appelés coefficients de Fourier. Ils sont définis par :

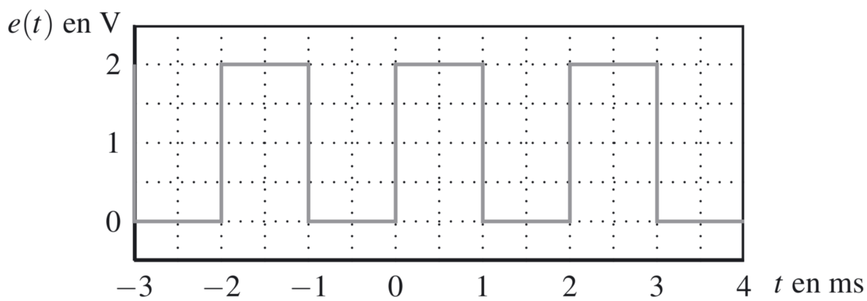
$$\left\{\begin{array}{lcl} a_n & = & \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N} \\ b_n & = & \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right.$$

puis $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Il est important de noter que ces coefficients ne dépendent pas de l'instant t_0 choisi pour le calcul de l'intégrale puisque le signal est périodique.

1 - Exemple de calcul de composantes spectrales

★ Signal créneau

On considère un signal créneau $e(t)$ de période T, d'amplitude crête-à-crête $E_c = 2\,\mathrm{V}$.



Calculons les coefficients de la série de Fourier de ce signal.
Le premier coefficient, a_0 est donné par :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} E_c \mathrm{d}t = E_c$$

Il vient ensuite :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} E_c\cos(n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{E_c}{n\pi}\left[\sin(n\omega t)\right]_0^{T/2} = 0$$

Puis

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} E_c \sin(n\omega t)\mathrm{d}t = -\frac{E_c}{n\pi}\left[\cos(n\omega t)\right]_0^{T/2} = -\frac{E_c}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

Il convient ici de distinguer les cas où n est pair des cas où n est impair. En effet, si n est pair, alors $b_n = 0$ et si n est impair ($n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$) :

$$b_n = \frac{2E_c}{n\pi}$$

On obtient finalement :

$$e(t) = \frac{E_c}{2} + \frac{2E_c}{\pi}\sum_p \frac{\sin((2p+1)\omega t)}{2p+1}$$

★ Signal triangle

Soit un signal triangle d'amplitude (différence entre le maximum et le minimum) E_c et de valeur moyenne E_0. La décomposition en série de Fourier de ce signal est :

$$e(t) = E_0 - \frac{4E_c}{\pi^2}\sum_p \frac{\cos((2p+1)\omega t)}{(2p+1)^2}$$

Remarques :

- Les termes en cosinus de la série de Fourier correspondent à la partie paire de la fonction et les sinus à la partie impaire. On peut donc en déduire que les coefficients b_n sont nuls si la fonction est paire, les coefficients a_n sont nuls si la fonction est impaire.
- On peut noter que dans le cas d'un signal carré les termes décroissent lentement car les discontinuités de la fonction sont des phénomènes associés à des harmoniques de haute fréquence.
- On peut noter que la décroissance des raies est très rapide pour un signal triangle car il n'est pas nécessaire de prendre des termes de très haute fréquence pour retrouver l'allure de la fonction lors de la reconstitution à partir du spectre.

2 - Puissance moyenne d'un signal

Etudions maintenant la notion de puissance d'un signal et en particulier sa répartition entre les différentes composantes de la série de Fourier associée.

★ Valeur efficace

Par définition, la valeur efficace d'un signal $e(t)$ périodique est donnée par :

$$E_{eff} = \sqrt{\langle e^2(t)\rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\mathrm{d}t}$$

Dans le cas d'un signal sinusoïdal de valeur moyenne nulle et d'amplitude E, cette valeur efficace est $E_{eff} = E_0/\sqrt{2}$. Pour un signal créneau de moyenne nulle, la valeur efficace est égale à l'amplitude. Cette valeur efficace est parfois appelée RMS (de l'anglais *root mean square*). Que représente cette valeur efficace ?

Prenons l'exemple d'un circuit composé d'un générateur de force électromotrice $e(t)$ branché aux bornes d'un résistor de résistance R qui modélise un chauffage ou un éclairage. L'intensité $i(t)$ du courant qui circule dans le circuit est donnée par la loi d'Ohm : $i(t) = \dfrac{e(t)}{R}$. La puissance dissipée dans ce resistor à un instant t est par définition $\mathcal{P}(t) = v(t)i(t)$. On note $\mathcal{P}_m = \langle \mathcal{P}(t)\rangle$ la puissance moyenne.

- si la tension est continue (constante) de valeur E alors la puissance dissipée est constante et vaut

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_m = \frac{E^2}{R}$$

- si la tension est sinusoïdale d'amplitude E identique à la tension précédente, alors cette fois-ci :

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{R} = \frac{E^2}{R}\cos^2(\omega t)$$

  puis

$$\mathcal{P}_m = \langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{\langle e^2(t) \rangle}{R} = \frac{E^2}{2R}$$

Pour avoir la même puissance avec la tension sinusoïdale, il faut donc que l'amplitude de cette tension soit $\sqrt{2}E$, ou encore que sa valeur efficace soit égale à la valeur E de la tension constante. On peut donc conclure qu'un signal variable $e(t)$ périodique de période T délivre, sur une durée grande devant T, la même énergie qu'un signal constant égal à la valeur efficace de $e(t)$.

★ Conservation de la puissance
La tension périodique utilisée précédemment peut être décomposée en série de Fourier et on note :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

On peut montrer la formule de Parseval :

$$E_{eff}^2 = \langle e^2(t) \rangle = E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^2}{2}$$

ainsi, le carré de la valeur efficace d'un signal (bien souvent proportionnel à la puissance délivrée) est la somme des carrés des valeurs efficaces de sa valeur moyenne, de son fondamental et de ses harmoniques.

II) Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est la généralisation des séries de Fourier pour des signaux non-périodiques. L'étude de ces cas est intéressante car on les retrouve dans nombreux domaines de la physique. Cela permet également de comprendre le fonctionnement des logiciels de traitement du signal qui évaluent les coefficients de la série de Fourier par l'intermédiaire de la transformée de Fourier. L'aspect théorique n'est pas exigible mais les conclusions (qui seront reprises au cours des séances de TP) le sont.

1 - Définition

La théorie de la transformée de Fourier montre qu'il est possible de reconstituer tout signal physique, même non-périodique, par superposition de signaux sinusoïdaux. La différence avec le cas des signaux périodiques est que les fréquences f (ou pulsations) des composantes sinusoïdales ne sont plus discrètes et prennent à priori toutes les valeurs de 0 à l'infini.
Le décomposition d'un signal non périodique s'écrit sous la forme :

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))\mathrm{d}\omega$$

$A(\omega)$ est la densité spectrale d'amplitude. Le spectre du signal est alors l'ensemble des fréquences pour lesquelles la densité spectrale est non nulle. Il comporte un continuum de fréquences entre une fréquence minimale et une fréquence maximale, d'où le nom de spectre continu. Il est très commun d'utiliser la notation complexe :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

(le facteur $\frac{1}{2\pi}$ sert de normalisation mais il dépend de la définition et peut donc être différent suivant les livres ou les exercices). La fonction $\widehat{f}(\omega)$ s'appelle la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$. De la même manière que pour les coefficients de Fourier, elle se calcule par une intégrale :

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{TF}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

Le calcul qui permet de reconstruire la fonction $f(t)$ à partir de sa transformée de Fourier s'appelle une transformée de Fourier inverse, et on a donc :

$$f(t) = \mathcal{TF}^{-1}\left[\widehat{f}(\omega)\right] = \mathcal{TF}^{-1}\left[\mathcal{TF}\left[f(t)\right]\right]$$

Remarques :

- Les transformée de fourier et transformée de fourier inverse permettent de passer d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle (ou réciproquement).
- Il est démontré que pour que la transformée de Fourier existe, le signal $f(t)$ doit posséder une énergie finie, ce qui signifie que l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) \mathrm{d}t$$
converge.
- On ne peut pas calculer la transformée de Fourier sur un signal périodique défini de $-\infty$ à $+\infty$ car dans ce cas l'énergie est infinie.

2 - Propriétés

Les propriétés de la transformée de Fourier sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Action temporelle			**Conséquence fréquentielle**
combinaison linéaire	$\alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t)$	$\alpha \cdot \widehat{f_1}(\omega) + \beta \cdot \widehat{f_2}(\omega)$	combinaison linéaire
contraction du domaine	$f(a \cdot t)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$	dilatation du domaine
translation	$f(t + t_0)$	$\widehat{f}(\omega) e^{j\omega t_0}$	modulation
modulation	$f(t) e^{jt\omega_0}$	$\widehat{f}(\omega - \omega_0)$	translation
produit de convolution	$(f \circ g)(t)$	$\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$	produit
produit	$f(t) \cdot g(t)$	$\frac{1}{2\pi} (\widehat{f} \circ \widehat{g})(\omega)$	produit de convolution

Pour rappel, le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes est une autre fonction notée généralement $f \circ g$ et définie par :

$$(f \circ g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - x) g(x) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(t - x) \mathrm{d}t$$

Une autre propriété importante de la transformée de fourier est la conservation de la puissance (ou de l'énergie) délivrée par un signal. Ainsi, l'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie (temporelle ou fréquentielle). C'est la généralisation de la formule de Parseval vue précédemment dans le cas des séries de Fourier :

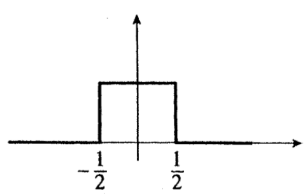
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

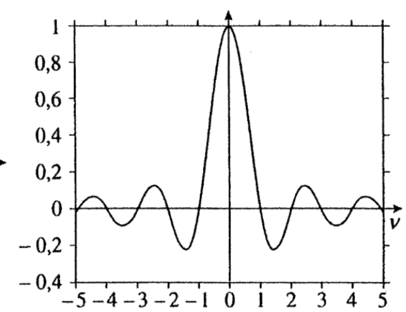
3 - Exemples

Voici quelques exemples importants car souvent rencontrés en physique :

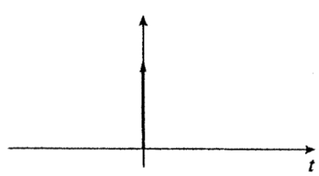
• **Fonction « porte »** (ou fenêtre rectangulaire)

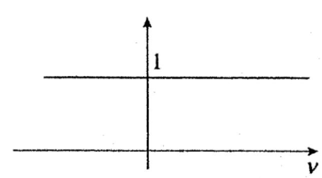
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| < 1/2 \\ 0 \text{ si } |t| > 1/2 \end{cases} \longleftrightarrow \mathrm{F}(\nu) = \mathrm{Si}\,(\pi\nu) = \frac{\sin\,(\pi\nu)}{\pi\nu}$$





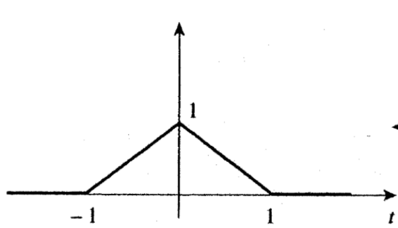
• **Dirac :** $\mathscr{F}(\delta) = 1$

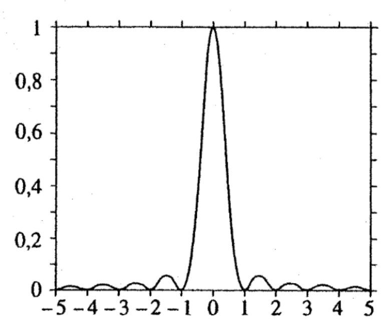




• **Fonction triangle** (ou fenêtre triangulaire)

$$\Lambda(t) = \begin{cases} -t+1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ t+1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases} \longleftrightarrow \mathrm{F}(\nu) = \left(\frac{\sin\,(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$$





III) Acquisition et analyse de signaux

1 - Numérisation et échantillonnage

★ Présentation des notions

Ces deux notions sont liées puisque la principale application de l'échantillonnage est aujourd'hui la numérisation d'un signal, mais son principe est bien plus ancien. Depuis plusieurs siècles, on étudie les phénomènes physiques en inscrivant, périodiquement, les valeurs relevées dans un registre (hauteurs d'eau lors des marées, position des étoiles, ...). L'échantillonnage de phénomènes physiques périodiques (ou non) a souvent permis l'établissement de lois de la physique.

Le traitement numérique d'un signal par ordinateur (ou par tout autre appareil) exige que le signal soit converti en une suite de nombres : c'est la numérisation. Cette conversion se décompose, sur le plan théorique, en deux opérations :

- l'échantillonnage prélève, le plus souvent à intervalles réguliers, la valeur du signal ;
- la quantification transforme une valeur réelle en une valeur prise dans une liste finie de valeurs valides pour le système (un code binaire).

Le nombre d'échantillons par unité de temps s'appelle cadence d'échantillonnage ou taux d'échantillonnage. Quand l'échantillonnage se fait à intervalle régulier, on parle de fréquence d'échantillonnage (notée F_e). Le pas d'échantillonnage est alors $T_e = 1/F_e$. Le nombre N de points acquis (et stockés en mémoire) sur une durée T_0 vaut alors :

$$N = \frac{T_0}{T_e} = T_0 \cdot F_e$$

Remarque : En général, un appareil d'acquisition (oscilloscope par exemple) ajuste automatiquement la fréquence d'échantillonnage pour que le nombre de points stockés en mémoire corresponde à sa capacité maximale N_{max}. Ainsi, si le temps d'acquisition augmente, la fréquence d'échantillonage diminue. La conséquence d'une fréquence d'échantillonnage trop faible (acquisitions trop espacées) est que des détails pertinents entre deux positions de capture peuvent être perdus. Il convient donc de choisir scrupuleusement le temps d'acquisition d'un signal (ou sa fréquance d'échantillonnage) pour ne pas perdre trop d'information. Il existe des règles que l'on verra par la suite.

★ Problèmes liés à la numérisation

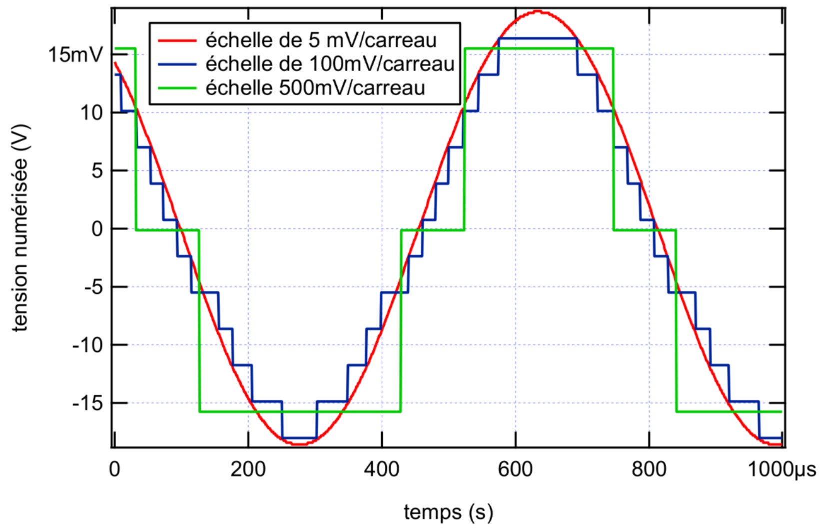
Malgré un choix optimal de la fréquence d'échantillonnage, le fait de transformer le signal analogique en un signal numérique n'est pas sans conséquence sur la qualité du signal. Cette transformation introduit forcément une dégradation de la qualité de l'information, le signal numérisé n'étant jamais parfaitement fidèle au signal original. Une cause de perte d'information possible est la quantification en amplitude. Chaque tension récupérée étant transformée en un code binaire, seuls certains niveaux de tensions peuvent être représentés numériquement. Un code binaire est une succession de 0 et de 1 appelés bits. Sur les oscilloscopes, la numérisation est faite en général sur $n = 8$ bits. Par exemple, si on associe à un point de tension acquis le code binaire 10101100, en valeur entière, il s'agit du niveau :

$$N_u = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 = 53$$

Pour calculer la tension à laquelle correspond ce code, il est nécessaire de connaître N_u et le nombre entier N_0 associé au code de la position du niveau 0 d'amplitude ainsi que la dynamique D qui est le nombre de Volts de la plage d'observation de la tension (nombre maximal de carreaux multiplié par le nombre de Volts par carreau). La tension recherchée est alors obtenu par la formule :

$$u = (N_u - N_0)\frac{D}{2^n}$$

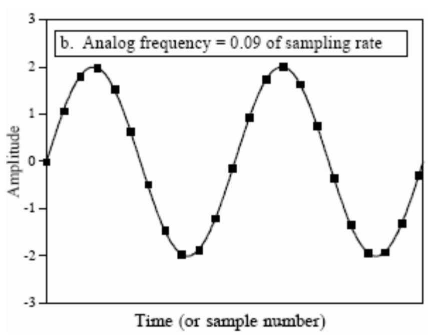
Il est essentiel, pour que la numérisation soit optimale, de faire en sorte que le maximum de codes possibles soient utilisés. Pour ça, à l'oscilloscope, il faut ajuster le bouton d'amplitude afin d'utiliser toute la dynamique de l'appareil (faire en sorte que le signal soit le plus grand possible). La figure suivante illustre ce principe. On a tracé pour un même signal, l'image numérique stockées en mémoire par l'oscilloscope, pour différentes échelles de numérisation.

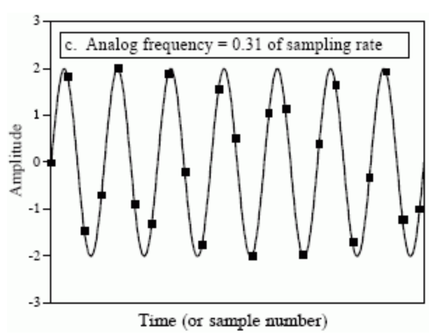


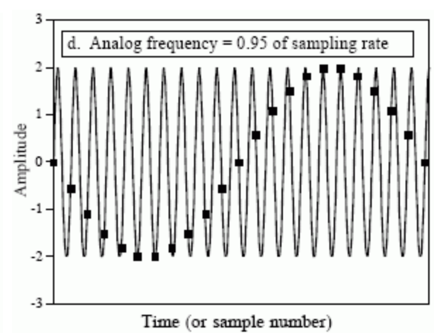
Sur la courbe de l'échelle 5 mV par carreau, le signal occupait les 8 carreaux d'amplitude et donc les 256 codes possibles de quantification. En revanche, pour les échelles 100 mV par carreau et 500 mV par carreau, la courbe est tassée vers le centre de l'écran et on utilise moins de 1 carreau de l'échelle d'amplitude. Ainsi, seuls quelques codes sont utilisés (12 avec l'échelle 100 mV/Carreau et 3 avec l'échelle 100 mV/Carreau). L'effet « continu par morceau » est alors de plus en plus visible et on comprend bien que les mesures faites sur de telles images du signal ne seront pas correctes.

★ Critère de Shannon

Pour choisir une fréquence d'échantillonnage qui soit suffisante, il faut que la connaissance des échantillons suffise pour calculer la valeur du signal dans tous les points intermédiaires. Claude Shannon a montré à quelle condition cela était possible, connaissant la fréquence maximale F_{max} du signal à étudier. Les figures ci-dessous montrent trois exemples d'échantillonnage.







Les deux premiers signaux sont correctement échantillonnés bien que ce ne soit pas évident sur le deuxième signal. On se rend bien compte du phénomène de sous-échantillonnage avec le troisième exemple : le signal initial n'est pas du tout reconstitué et il est évident qu'une analyse de Fourier basée sur ces échantillons donnera des résultats faux. Pour pouvoir s'affranchir de ce problème, il faut que

$$F_e > 2F_{max}$$

c'est le théorème de Shannon.

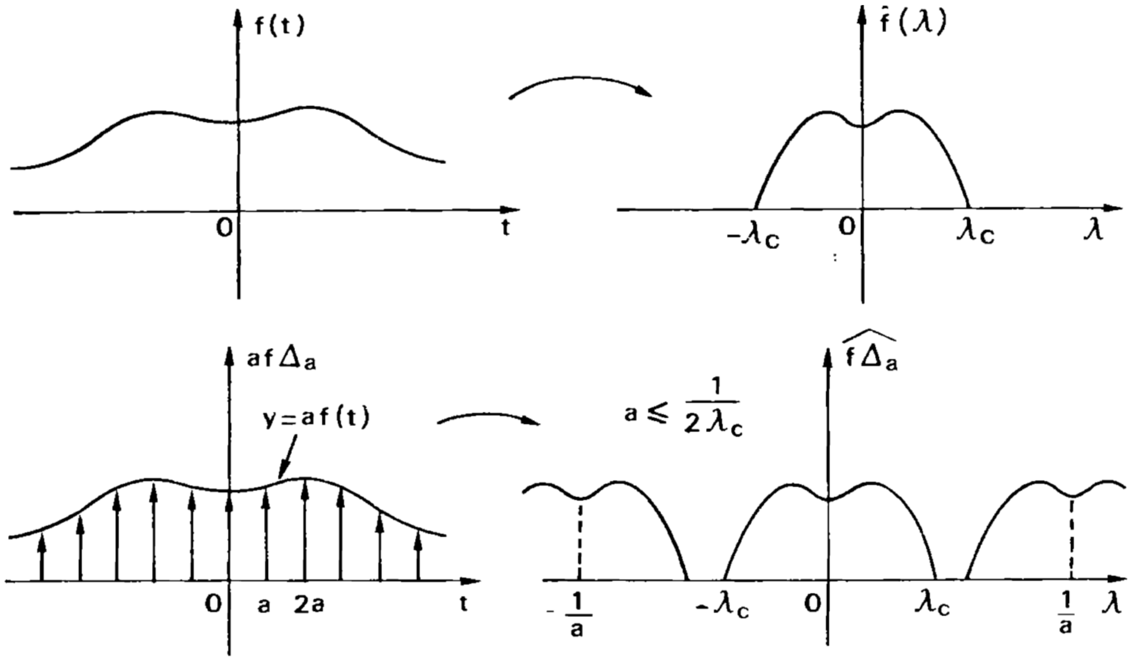
2 - Analyse des signaux numérisés

★ Effet de l'échantillonnage sur le spectre

On peut voir un échantillonnage comme la multiplication du signal que l'on cherche à étudier par un peigne de Dirac temporel de période T_e que l'on note $Ш_{T_e}(t)$ (prononcer "cha"). On peut montrer que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est un autre peigne de Dirac :

$$\mathcal{TF}\left[Ш_{T_e}(t)\right] = \frac{1}{T_e} Ш_{1/T_e}(f)$$

Par propriété, la transformée de Fourier d'un produit est le produit de convolution des transformées de Fourier. La transformée de Fourier du signal numérisé est donc la convolution de la transformée de Fourier du signal initial avec un peigne de Dirac. Cela est illustré sur les figures ci-dessous.



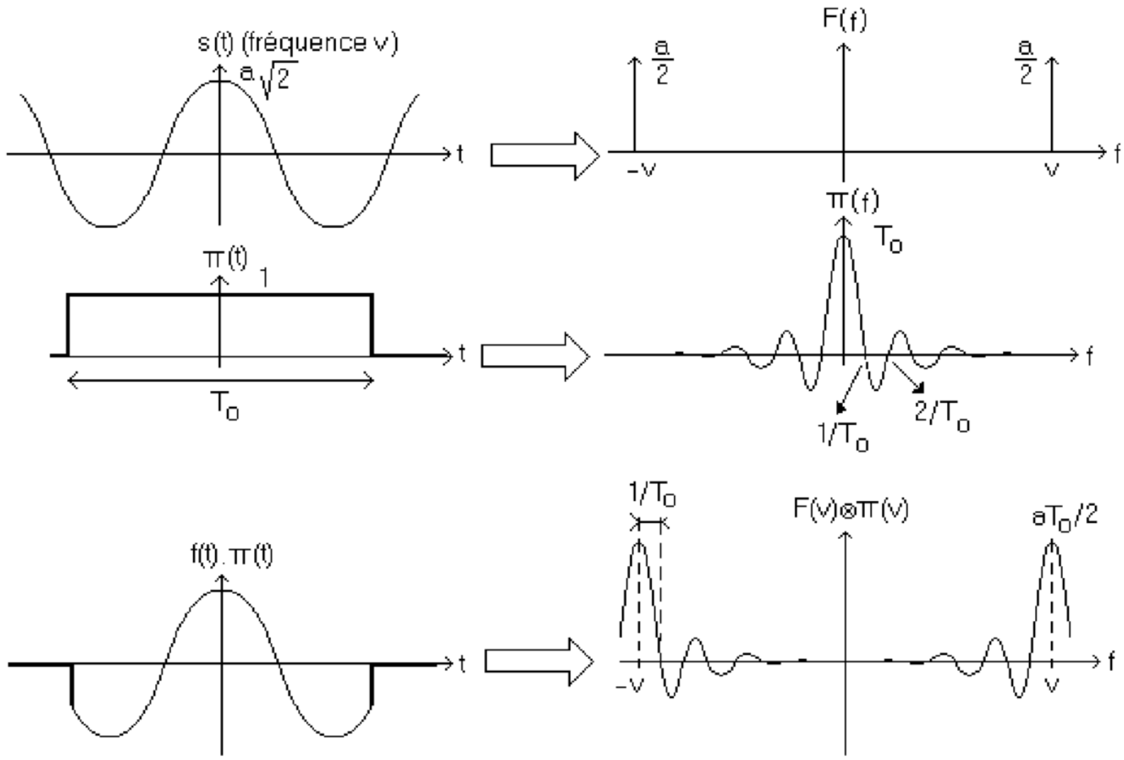
Sur les figures, a représente la période d'échantillonnage et λ_C est la fréquence maximale du spectre du signal. On voit donc que le fait d'échantillonner un signal revient à périodiser son spectre.

Remarques :

- Le signal est bien reconstruit si les différentes copies du spectre ne se recouvrent pas. D'après le schéma, il faut pour cela que $\lambda_C \leq \frac{1}{2a}$, soit $F_{max} \leq \frac{F_e}{2}$. On retrouve le critère de Shannon. Dans le cas contraire, on parle de recouvrement de spectre.
- Bon nombre de signaux périodiques ont un spectre non borné (triangles, créneaux...). Dans ce cas, il y aura toujours repliement, mais essentiellement pour les harmoniques de rang élevé qui sont souvent noyées dans le bruit.

★ Phénomène de fenêtrage, résolution en fréquence

On a vu dans ce qui précède qu'il n'est pas possible de déterminer la transformée de Fourier d'un signal physique sur un intervalle temporel non borné pour des considérations de puissance. Qui plus est, lors d'un TP, l'analyse d'un signal se fait à l'aide d'un oscilloscope le plus souvent. En pratique, un signal doit donc être tronqué pour être restreint à une fenêtre d'observation. Cette opération de troncation revient à multiplier le signal par une fonction porte (Π). Si on travaille avec une sinusoïde (ou une raie quelconque d'un spectre), le fait de tronquer le signal temporel va ainsi transformer la raie initiale en un sinus cardinal. On pourra toujours reconstruire l'amplitude des raies du spectre, mais la résolution en fréquence est bien entendu altérée. On note que plus la fenêtre de troncation sera large, plus la raie centrale sera fine.



Pour le calcul d'une transformée de Fourier à l'oscilloscope, la fenêtre choisie n'est pas forcément rectangulaire. Dans le cas général, on multiplie le signal par une fenêtre dite de pondération (ou d'apodisation). Il existe beaucoup de formes de fenêtres dont on choisira le profil afin d'obtenir une transformée de Fourier avec une forme optimale en fonction de ce que l'on veut faire. On trouve des fenêtres qui donnent des pics :

- fins (rectangulaire, hanning) ce qui est intéressant quand on veut résoudre en fréquence (observer deux fréquences proches dans un spectre)
- larges (flattop) ce qui est intéressant pour obtenir une estimation satisfaisante de l'amplitude d'un pic.

Voici quelques exemples de fenêtres courantes et les transformées de Fourier associées.