

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

PHYSIQUE - CHIMIE**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants, dont les sous-parties sont en grande partie indépendantes. Les données ainsi qu'une annexe sont regroupées en fin d'énoncé.

NB : toute démonstration illisible ou incompréhensible sera considérée comme fausse.

Problème 1 : Utilisation de supraconducteurs

Une onde électrique est soumise à de nombreux phénomènes dissipatifs lorsqu'elle transporte de l'énergie, ce qui engendre des pertes entre la centrale électrique et le lieu d'utilisation. De nombreux dispositifs sont mis en place pour limiter ces pertes mais elles existent toujours.

En 1911, Heike Kamerlingh Onnes, physicien néerlandais, et son équipe ont montré que la résistance électrique du mercure devient rigoureusement nulle en-dessous d'une certaine température, appelée température critique T_C . On parle alors de supraconducteur. Ces travaux lui valurent le prix Nobel de physique en 1913.

Ces derniers ont une température critique qui varie en fonction leurs propriétés. On donne dans la TABLE 1 quelques valeurs de températures critiques de certains matériaux supraconducteurs.

	Al	Hg	Pb	LaFeAs	YBa ₂ Cu ₃ O ₆
T_C (en K)	1	4,2	7,2	55	92

TABLE 1 – Températures critiques de quelques supraconducteurs.

Partie 1 : Effet Meissner

Lorsqu'un matériau supraconducteur est soumis à un champ magnétique uniforme, le supraconducteur expulse les lignes de champ magnétique. On parle d'effet Meissner.

I – Comparaison avec l'électromagnétisme classique

On se propose de réaliser une expérience mettant en évidence ce phénomène (FIGURE 1). On pose un aimant permanent sur un matériau supraconducteur. On fait alors baigner le supraconducteur dans du diazote liquide pour abaisser sa température en-dessous de sa température critique. Il devient alors supraconducteur et se met à rejeter les lignes de champ magnétique de l'aimant : le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur devient nul et l'aimant se met alors à léviter.

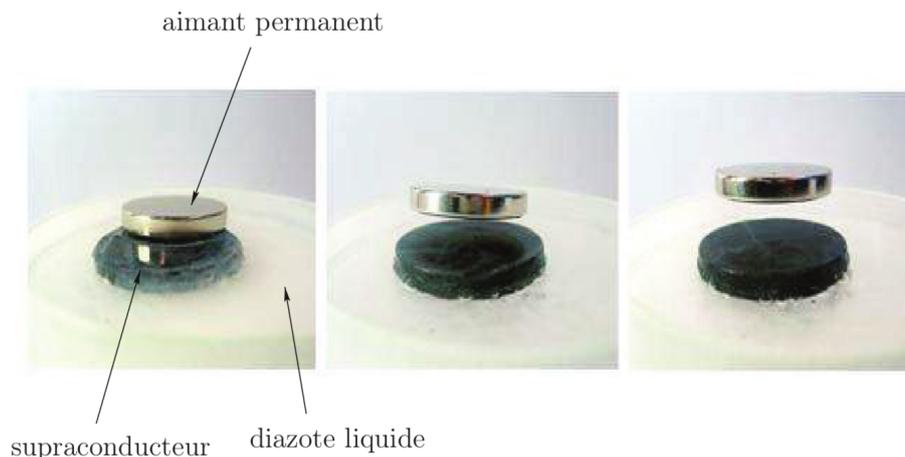


FIGURE 1 – Mise en évidence expérimentale de l'effet Meissner.

D'un point de vue microscopique, le supraconducteur crée des courants électriques qui s'opposent complètement à ce champ magnétique.

- Q.1** En l'absence de supraconduction et de basses températures, à quelle condition peut-on observer un phénomène d'induction ?
- Q.2** Au vu de l'expérience proposée, quelle est la différence fondamentale avec le phénomène d'induction évoqué à la question précédente ?

L'effet Meissner ne peut pas être décrit en utilisant la théorie électromagnétique classique. Cependant, d'un point de vue purement électrique, le supraconducteur présente une résistance électrique rigoureusement nulle et ressemble donc à un conducteur électrique parfait.

Dans les questions **Q.3** à **Q.5**, on s'intéresse à un conducteur électrique de conductivité γ soumis à un champ électrique \vec{E} .

Q.3 Rappeler la loi d'Ohm locale.

Q.4 Qu'appelle-t-on conducteur parfait ? Que peut-on en déduire sur le champ électrique en son sein ?

Q.5 À partir d'une des équations de Maxwell, en déduire que le champ magnétique \vec{B} à l'intérieur du conducteur parfait est forcément un champ stationnaire.

On se propose de modéliser le supraconducteur par une boucle de courant circulaire de rayon R , parcourue par un courant d'intensité I . On veut estimer l'ordre de grandeur de l'intensité I nécessaire pour faire léviter l'aimant d'une hauteur h , estimée d'après la FIGURE 1.

Q.6 Donner l'expression du moment magnétique $\vec{\mu}$ de la boucle de courant.

En présence d'un champ magnétique \vec{B} , la boucle de courant va subir une force

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \left((\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \right)$$

L'aimant permanent possède un moment magnétique $\mathcal{M}_1 = 10 \text{ A} \cdot \text{m}^2$. On donne l'expression du champ magnétique créé par un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ à une distance $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ de son centre :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3 \left(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_r \right) \vec{e}_r - \vec{\mathcal{M}} \right]$$

Q.7 Exprimer l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par l'aimant ressenti au niveau du supraconducteur.

Q.8 Estimer par un raisonnement simple l'ordre de grandeur de l'intensité I nécessaire pour observer la lévitation à une hauteur h de l'aimant de la FIGURE 1. On prendra une masse de 40 g pour l'aimant permanent.

II – Champ magnétique dans le supraconducteur

Pour expulser le champ magnétique, ce dernier doit être rigoureusement nul dans le supraconducteur contrairement à un conducteur parfait où on a seulement un champ stationnaire, a priori non nul d'après **Q.5**.

Pour expliquer cette différence, les frères London (1935) ont postulé que les électrons dans un supraconducteur ne suivent pas les mêmes lois que ceux du conducteur parfait. Ils montrèrent que la densité volumique de courant \vec{j} dans le supraconducteur s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}$$

avec \vec{B} le champ magnétique dans le supraconducteur, $\lambda = \sqrt{m/(\mu_0 n e^2)}$ une constante avec m la masse de l'électron, n la densité d'électrons supraconducteurs, e la charge de l'électron et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Q.9 Montrer que λ est homogène à une longueur.

Q.10 Déterminer la valeur numérique de λ pour $n = 10^{29} \text{ m}^{-3}$.

Dans toute la suite de cette partie, on se place en **régime permanent**.

Q.11 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le champ magnétique \vec{B} dans le supraconducteur s'écrit :

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

On s'intéresse maintenant à un supraconducteur d'épaisseur $2d$ selon la direction (Ox) et infini selon (Oy) et (Oz) . On choisit l'origine du repère orthonormé direct $(Oxyz)$ au milieu de la plaque. Le plan supérieur (respectivement inférieur) se situe en $x = d$ (respectivement $x = -d$). Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme tel que $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}} \vec{e}_z$. On supposera que le champ magnétique est continu au niveau de chaque interface $x = \pm d$. Le système est représenté FIGURE 2.

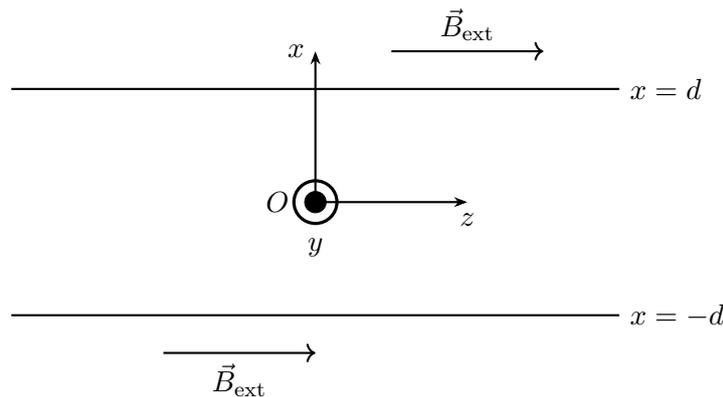


FIGURE 2 – Schéma du supraconducteur dans le champ magnétique.

Q.12 Montrer que le champ magnétique dans le supraconducteur est de la forme $\vec{B} = B(x) \vec{e}_z$.

Pour une équation différentielle du type $f'' - f = 0$, les solutions générales peuvent se mettre sous la forme $f(\xi) = A \operatorname{ch}(\xi) + C \operatorname{sh}(\xi)$ où ch et sh sont respectivement les cosinus et sinus hyperbolique rappelés en annexe.

Q.13 Résoudre l'équation différentielle de la question **Q.11** et établir que $B(x) = B_{\text{ext}} \frac{\operatorname{ch}(\alpha)}{\operatorname{ch}(\beta)}$ avec α et β des expressions à déterminer en fonction de x , d et λ .

Q.14 Citer un autre phénomène électromagnétique décrit par une équation formellement équivalente. En déduire la signification physique de λ .

Q.15 Tracer l'allure de $B(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. En déduire à quelle condition sur d le champ magnétique moyen peut être considéré comme nul à l'intérieur du supraconducteur (effet Meissner).

Q.16 À partir de l'expérience FIGURE 1, vérifier si la condition précédente est bien vérifiée.

Q.17 Calculer l'expression littérale de la densité de courant volumique $\vec{j} = j(x) \vec{e}_y$.

Q.18 Tracer $j(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. Pour $d = 50\lambda$, comment peut-on qualifier la densité de courant dans le supraconducteur ?

Q.19 Estimer l'intensité du courant dans le supraconducteur pour un champ magnétique extérieur de 5×10^{-3} T. Comparer cette valeur à celle de la question **Q.8**. Conclure.

Partie 2 : Refroidissement du supraconducteur

Pour arriver à de telles températures critiques, le supraconducteur doit être refroidi en utilisant des procédés sophistiqués. Pour les supraconducteurs haute-température, type cuprates, les températures critiques sont facilement atteignables en utilisant du diazote liquide. Dans cette partie, on étudie le processus de Linde-Hampson de liquéfaction du diazote.

Le principe de la machine est représenté en FIGURE 3.

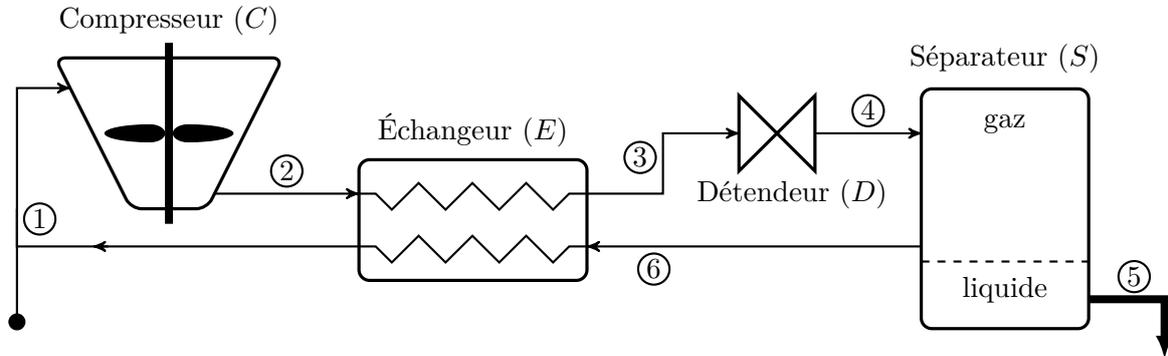


FIGURE 3 – Cycle de Linde-Hampson

- L'azote entre dans le compresseur C dans l'état 1 ($P_1 = 1,0 \text{ bar}$ et $T_1 = 290 \text{ K}$) pour y subir une compression isotherme qui l'amène à l'état 2 ($P_2 = 100 \text{ bar}$ et $T_2 = T_1 = 290 \text{ K}$)
- Il est alors refroidi à pression constante ($P_3 = P_2$) dans l'échangeur E jusqu'à T_3
- Il est ensuite détendu jusqu'à la pression atmosphérique ($P_4 = P_5 = P_6 = P_1 = 1,0 \text{ bar}$) dans le détendeur D . L'azote sortant du détendeur D est un mélange de gaz et de liquide.
- Le liquide 5 est extrait au niveau du séparateur S , qui renvoie la vapeur sèche saturante (état 6) dans l'échangeur thermique E . C'est ce fluide froid 6 – 1 qui permet de refroidir le fluide chaud 2 – 3.
- Le diazote gazeux est ramené à l'état 1 à la sortie de l'échangeur E .

Le détendeur D , le séparateur S , l'échangeur E et tous les circuits de liaison sont supposés parfaitement calorifugés. Lors du passage dans le séparateur et l'échangeur thermique, les transformations sont considérées comme isobares.

I – Premier et deuxième principes dans un écoulement

Prenons un fluide qui s'écoule en passant d'un état thermodynamique 1 à un état thermodynamique 2. Ce dernier échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme de travail et de transfert thermique. L'écoulement est considéré permanent dans toute la suite du problème.

Les principes appliqués à chaque organe s'écrivent :

$$\begin{cases} h_s - h_e = w_u + q \\ s_s - s_e = \frac{q}{T_{\text{ext}}} + s_c \quad \text{avec } s_c \leq 0 \end{cases}$$

Q.20 Quelle est la signification de chaque terme du système d'équations précédent ?

Q.21 Quelle hypothèse fondamentale permet d'établir ce système ?

II – Étude du cycle

Le diagramme enthalpique (P, h) du diazote est donné en annexe FIGURE A, à rendre avec la copie.

Q.22 Placer les points 1, 2, 5 et 6 sur le diagramme (P, h) en annexe.

Q.23 Par lecture graphique, déterminer pour ces points leurs enthalpies et entropies massiques.

II.A Validité du modèle du gaz parfait

Q.24 Pour un gaz parfait, comparer les isothermes et les isenthalpes dans un diagramme (P, h) .

Q.25 En déduire à partir du diagramme fourni, dans quel domaine de pression on peut considérer le diazote comme un gaz parfait.

II.B Transformation 1 → 2 dans le compresseur

Q.26 Comment se simplifie le deuxième principe pour une transformation isotherme réversible ? En déduire l'expression du transfert thermique massique q_{12} . Faire l'application numérique.

Q.27 En déduire le travail massique w_{12} fourni par le compresseur au système.

II.C Transformations 3 → 4 dans le détenteur et 4 → 6 dans le séparateur

On rappelle que l'étape 5 ne fait pas partie du cycle.

Q.28 Déterminer la nature de la transformation 3 → 4.

On note y la fraction massique en **diazote liquide**. À partir du point 4, le diazote est séparé en deux : le liquide d'enthalpie massique h_5 est extrait et le gaz d'enthalpie massique h_6 est envoyé dans l'échangeur thermique.

Q.29 Déterminer l'expression de h_4 en fonction de y , de l'enthalpie massique du liquide h_5 et celle du gaz h_6 .

II.D Transformations 2 → 3 et 6 → 1 dans l'échangeur

On peut montrer en utilisant le premier principe que :

$$h_3 - h_2 + (1 - y)(h_1 - h_6) = 0$$

Q.30 En déduire l'expression de y en fonction des enthalpies massiques h_1 , h_2 et h_5 . Faire l'application numérique.

Q.31 Calculer numériquement le travail pour extraire 1 kg d'azote liquide.

Q.32 En utilisant la **Q.30**, placer le point 4 sur le diagramme (P, h) fourni. En déduire l'enthalpie massique h_4 et l'entropie massique s_4 .

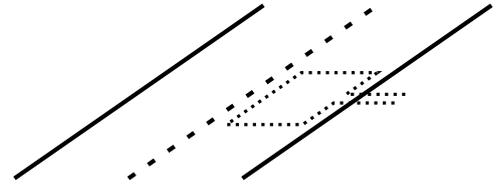
Q.33 Placer alors le point 3 sur le diagramme (P, h) fourni. En déduire l'enthalpie massique h_3 et l'entropie massique s_3 .

Q.34 Calculer la différence entre les entropies à l'entrée et à la sortie du détenteur. En déduire l'entropie massique créée. Préciser l'origine de l'irréversibilité si elle existe.

Q.35 Sachant que le prix du kWh (kilowatt-heure) en France en février 2024 était de 0,25 euros, déterminer l'énergie nécessaire et le coût pour liquéfier un volume de 10 L de diazote.

Problème 2 : Détection de véhicules par boucles inductives

Une méthode de détection des véhicules (utilisée pour l'ouverture de barrières automatiques ou le déclenchement de feux tricolores) utilise une boucle métallique rectangulaire enterrée dans la chaussée. Lorsque le châssis d'un véhicule en acier est placé au-dessus, l'inductance de cette boucle se trouve modifiée.



La boucle est composée de n spires rectangulaires identiques de largeur $D = 2$ m et de longueur $G = 1$ m bobinées en série FIGURE 4. Celles-ci sont réalisées avec un fil de cuivre de section $s = 1,5$ mm².

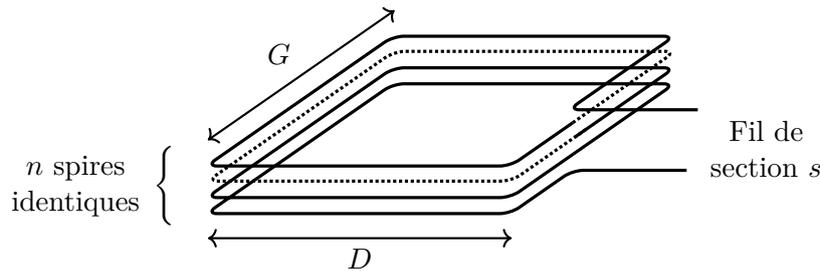


FIGURE 4 – Représentation de la boucle enterrée. Une des spires est représentée en pointillés.

I – Inductance de la boucle

L'objectif de cette partie est de déterminer l'inductance L de cette boucle.

Q.1 Donner la relation entre l'inductance L d'un circuit, l'intensité I qui le traverse et le flux propre Φ à travers sa surface.

Considérons un fil infini d'axe (Oz) et de rayon e parcouru par un courant d'intensité I dans le sens z croissant (FIGURE 5). Le vecteur densité de courant, noté \vec{j} , est supposé uniforme dans une section du fil. En coordonnées cylindriques, tout point M est repéré par ses coordonnées (r, θ, z) dans la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

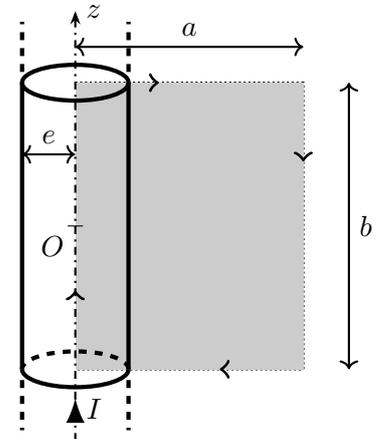


FIGURE 5 – Fil infini.

Q.4 Déterminer, par un raisonnement judicieux, les expressions de $\vec{B}(M)$ en un point M situé à l'extérieur du fil ($r > e$), puis en un point M situé à l'intérieur du fil ($r < e$).

Q.5 Représenter l'allure de la norme de $\vec{B}(M)$ en fonction de r , en précisant littéralement les coordonnées du (des) point(s) particulier(s).

Q.6 Exprimer, en fonction de μ_0 , I , a , b et e , le flux ϕ_f du champ magnétique créé par ce fil à travers la surface orientée grise définie sur la FIGURE 5.

Pour calculer l'inductance propre d'une spire, les effets de bords sont négligés. Dans un souci de simplification, le flux produit par chaque côté de la spire sera assimilé au flux ϕ_f , calculé à la question précédente.

Q.7 Dédurre des réponses précédentes, l'expression de l'inductance L_1 d'une spire en fonction de μ_0 , D , G et e (considérer que la perméabilité magnétique du bitume vaut μ_0).

Q.8 Calculer la valeur numérique de L_1 .

Les spécifications techniques d'un constructeur de tels systèmes de détection précisent que l'inductance totale de la boucle doit être comprise entre 70 et 500 μH . Pour des spires ayant les dimensions prises dans ce problème, le constructeur recommande d'en câbler 3 à 5 en série.

Q.9 Exprimer l'inductance L d'une boucle composée de n spires en fonction de n et L_1 .

Q.10 Calculer les valeurs minimale et maximale de n .

II – Détection d'un véhicule

Lorsqu'un véhicule se positionne à une distance h au-dessus de la boucle, la face inférieure de son châssis est le siège de courants induits par le champ magnétique créé par la boucle. Ces courants induits produisent à leur tour un champ magnétique induit $\vec{B}_i(M)$; il est possible de montrer que celui-ci est identique à celui produit par un circuit symétrique de la boucle par rapport au plan du châssis (FIGURE 6).

Considérons, dans un premier temps, une des spires enterrées et sa spire «miroir».

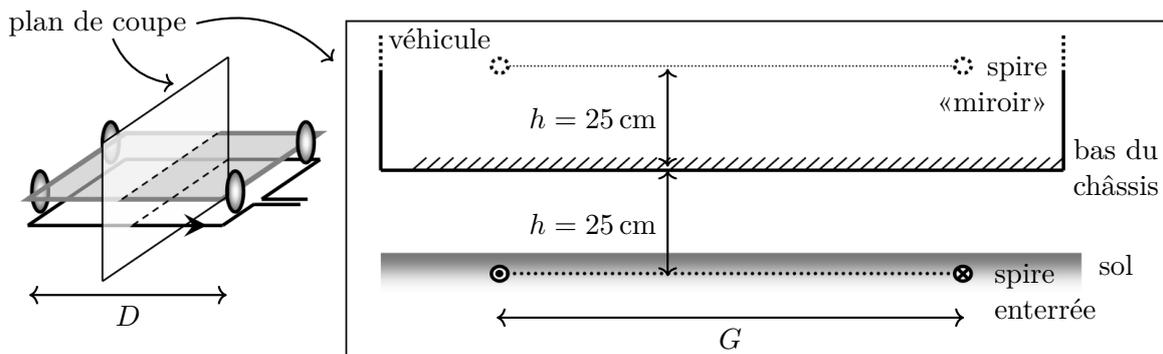


FIGURE 6 – Spire et son «miroir» dans le plan de coupe.

La carte du champ magnétique induit $\vec{B}_i(M)$ dans un plan de coupe (cf FIGURE 6) perpendiculaire au plan de la route et au grand côté (D) de la spire est représentée sur la FIGURE 7. Ce champ magnétique $\vec{B}_i(M)$, génère à son tour un flux ϕ_i à travers la spire enterrée et modifie par conséquent son inductance d'une quantité $\Delta L_1 = L'_1 - L_1$.

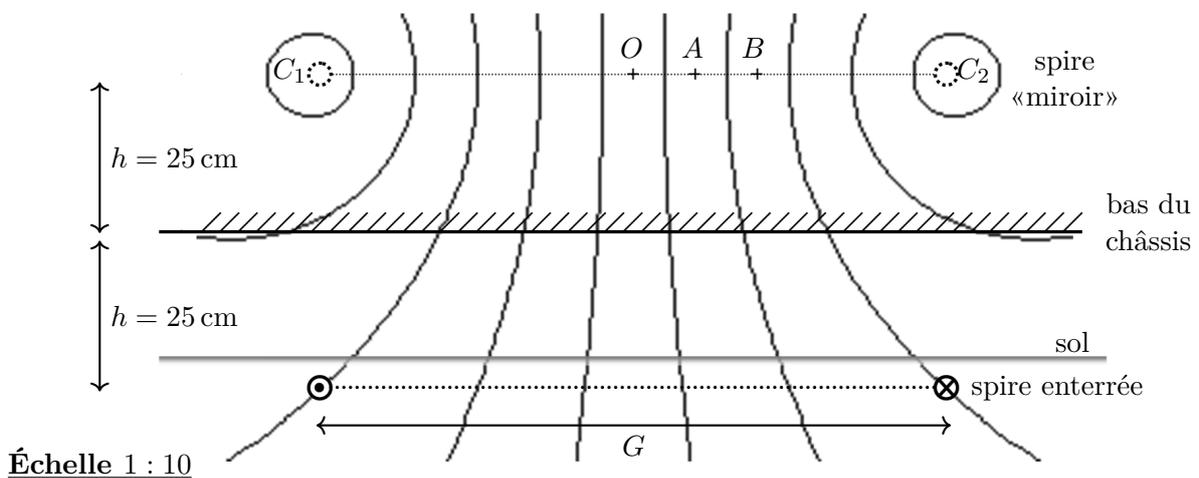


FIGURE 7 – Lignes de champ produites par la spire «miroir» dans le plan de coupe.

Q.11 Dans quel sens faut-il orienter la spire «miroir» pour que cette modélisation soit conforme à la loi de Lenz? Répondre en reproduisant sur votre copie les spires et l'allure de la carte de champ puis compléter l'orientation de la spire miroir et des lignes de champ.

Dans toute la suite, afin de simplifier les calculs, la spire est assimilée à deux fils infinis parallèles ($D \gg G$). Les effets de bords seront donc négligés et seules les contributions des deux côtés de longueur D seront prises en compte. Le champ magnétique qu'ils créent sera assimilé à celui de deux fils infinis parallèles espacés de G .

Q.12 Calculer les valeurs numériques de la norme de $\vec{B}_i(M)$ en O , A et B , lorsque $I = 1$ A, en utilisant la FIGURE 7 et son échelle, pour déterminer les distances nécessaires.

Q.13 Quelle propriété vérifie le flux du champ magnétique le long d'un tube de champ? La démontrer soigneusement, à l'aide d'un schéma explicatif.

Q.14 En déduire une estimation de la valeur numérique du flux ϕ_i créé par $\vec{B}_i(M)$ à travers la spire enterrée.

Q.15 Déterminer la variation relative $\Delta L_1/L_1$ de l'inductance d'une spire. En déduire la variation relative $\Delta L/L$ de l'inductance de l'ensemble de la boucle lors du passage d'un véhicule. Commenter l'ordre de grandeur des résultats obtenus.

Afin de détecter cette variation d'inductance, la boucle inductive est branchée en parallèle avec un condensateur de capacité C (FIGURE 8). Celle-ci ne se comporte pas comme une inductance pure et présente une résistance r due à la résistivité du fil qui la constitue.

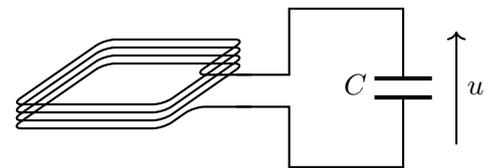


FIGURE 8

On donne : $L = 100 \mu\text{H}$, $n = 3$, $D = 2$ m, $G = 1$ m, $s = 1,5 \text{ mm}^2$.

Q.16 Rappeler l'expression de la résistance d'un barreau conducteur de longueur ℓ et de section s , constitué d'un métal de conductivité σ . En déduire la valeur numérique de la résistance r de la boucle.

Dans toute la suite du problème, la boucle est modélisée par une bobine idéale d'inductance L (en l'absence de véhicule) en série avec une résistance r . Le dispositif décrit sur la FIGURE 8 peut donc être modélisé par le circuit de la FIGURE 9, ci-contre :

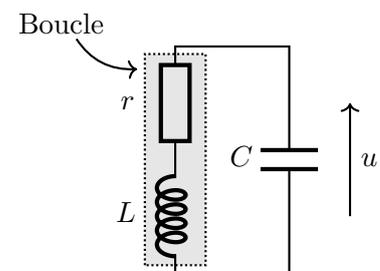


FIGURE 9

Q.17 Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u . En déduire le facteur de qualité Q et la fréquence propre f_0 du circuit.

Q.18 Le facteur de qualité peut-il être amélioré en augmentant le nombre de spires n ?

Cette fréquence est ensuite mesurée par un fréquencemètre électronique qui délivre une tension proportionnelle à f_0 et permet de déterminer ses variations; un signal de commande est produit lorsque celles-ci dépassent un seuil fixé.

Le constructeur précise que la valeur de f_0 doit être comprise entre 10 et 90 kHz et que le seuil de détection de la variation de fréquence peut être réglé entre 0,01% et 2%.

Q.19 Calculer la gamme de valeurs dans laquelle la capacité C doit être choisie. Commenter.

Q.20 Exprimer la variation relative de la fréquence d'oscillation $\Delta f_0/f_0$ en fonction de celle de l'inductance de la boucle $\Delta L/L$. Lorsqu'un véhicule se place au dessus de la boucle inductive, f_0 diminue-t-elle ou augmente-t-elle? La valeur de $\Delta L/L$ calculée en **Q.15** donne-t-elle lieu à une variation de fréquence compatible avec les spécifications du constructeur? Commenter ce résultat.

Données

Constantes fondamentales

Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Constante de Planck : $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Données physico-chimiques

Masse volumique du diazote : $\rho_{\text{N}_2} = 8,1 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Conductivité du cuivre : $\sigma_{\text{Cu}} = 6,0 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Formulaire d'analyse

Cosinus hyperbolique : $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Sinus hyperbolique : $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{rot}} f = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

● ● ● FIN ● ● ●

Annexe du DS

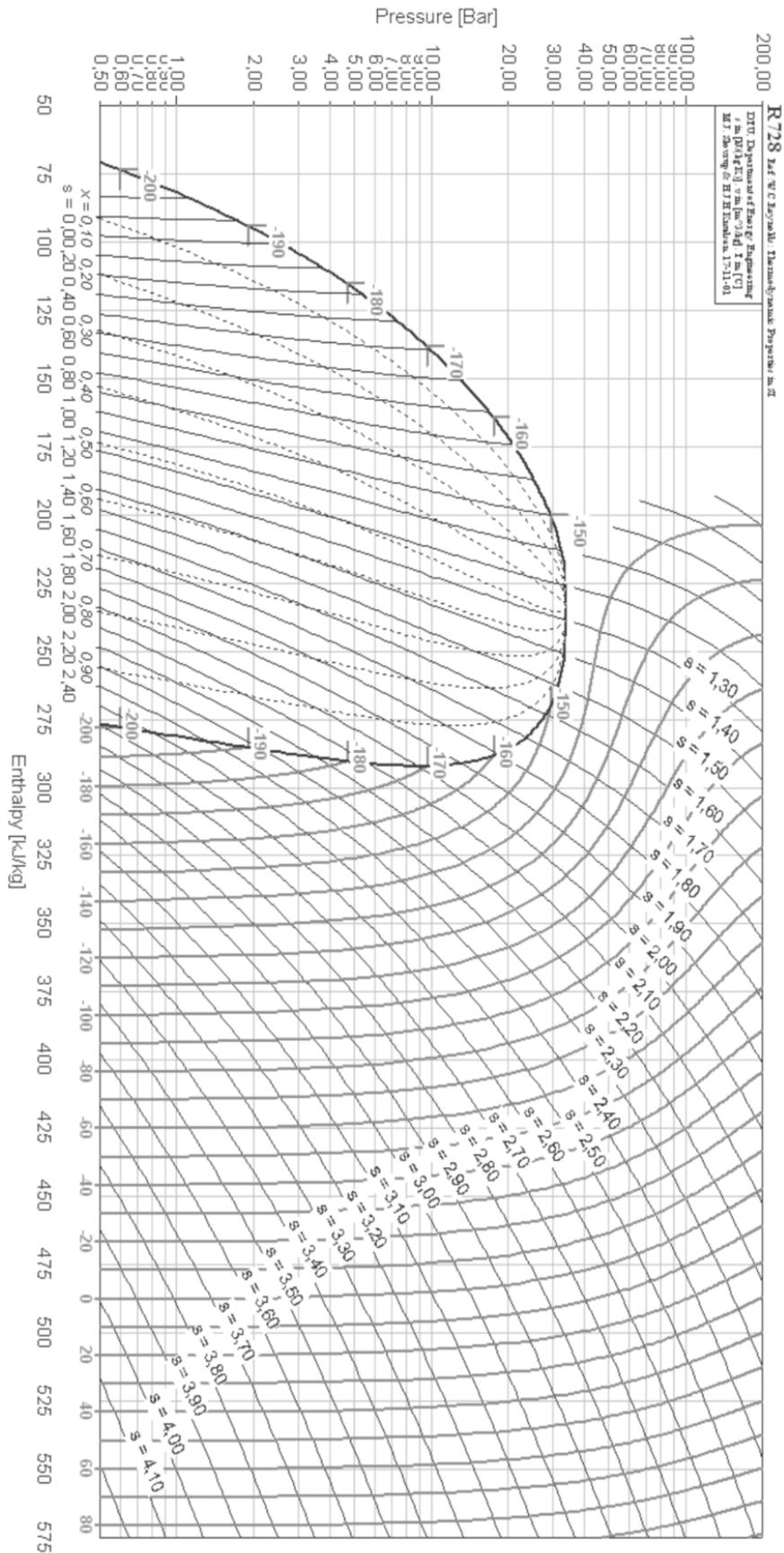


FIGURE A – Diagramme enthalpique du diazote. Les entropies massiques s sont en $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, les volumes massiques en $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ et les températures en degrés Celsius.