

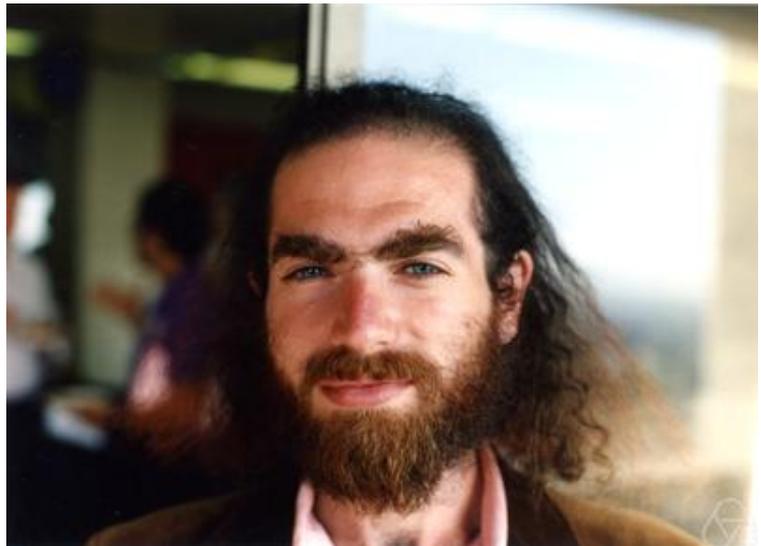
spé MP

POLYCOPIÉ D'EXERCICES

2024-2025



On finit toujours par trouver la solution !!



POLYNÔMES

Exo 1 Soit $P_0 = X^4 + 10X^3 + 50X^2 + 125X + 148$. Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$: $Q^2 + 3Q - 6 = P_0$.

Exo 2 Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Est-ce que f est polynômiale sur \mathbb{R} , sur $[3, 5]$, sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$?

Exo 3 Décomposer $P = X^{2^n} - 1$ en produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exo 4 Soit $P = \sum_{p=0}^9 X^{2^p}$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{18}$ les racines complexes de P . Expliciter $Q = \prod_{k=1}^{18} (X - \alpha_k^7)$.

Exo 5 Déterminer les racines de $x^4 - 2 * x^3 - 36 * x^2 + 162 * x - 189$ sachant qu'il admet une racine triple.

Exo 6 Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-2)^2(X+1)$.

Exo 7 Déterminer le pgcd de $X^n - 1$ et de $X^p - 1$, avec $1 \leq p \leq n$. (On commencera par effectuer la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$)

Exo 8 Déterminer les polynômes solutions de (*) : $P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0$.

Exo 9 Soit Δ définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

Calculer $\ker \Delta$. f est elle injective ? f est-elle surjective ?

Exo 10 Résoudre dans \mathbb{C}^3 le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xyz = -24 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Exo 11 Exprimer $P = \sum_{i=1}^n X_i^2$ et $Q = \sum_{i=1}^n X_i^3$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires

$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n X_i$, $\sigma_2 = \sum_{i < j} X_i X_j$, ..., $\sigma_n = \prod_{i=1}^n X_i$. Pour Q , on commencera par développer $\sigma_1 \times \sigma_2$

Exo 12 Soit Γ le graphe de f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$

(a) Construire Γ .

(b) Rappeler l'équation générale d'une droite de \mathbb{R}^2 dans son repère canonique.

(c) Former une CNS sur t_1, t_2, t_3 pour que les points $M_1 \begin{pmatrix} t_1 \\ f(t_1) \end{pmatrix}$, $M_2 \begin{pmatrix} t_2 \\ f(t_2) \end{pmatrix}$, $M_3 \begin{pmatrix} t_3 \\ f(t_3) \end{pmatrix}$ de Γ soient alignés.

Exo 13 Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que si $a + b\sqrt{c}$ est racine d'ordre s de P alors $a - b\sqrt{c}$ est racine d'ordre s de P .

Exo 14 Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur \mathbb{R} alors P' l'est aussi.

Exo 15 Soit P_n défini par $P_n = X^n - nX + 1$, montrer, lorsque $n \geq 3$, que P_n admet une unique racine a_n dans $[0, 1[$ et une unique racine b_n dans $]1, +\infty[$. Étudier les 2 suites (a_n) et (b_n) .

Exo 16 (a) Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P de degré $2n+1$ vérifiant :

$$P(1) = 1, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : P^{(k)}(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket : P^{(k)}(0) = 0.$$

(On pourra étudier l'application $\Phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par $\Phi(P) = (P(1), P'(1), \dots, P^{(n)}(1), P(0), \dots, P^{(n)}(0))$)

(b) Montrer que P est à coefficients entiers. (on commencera par donner une expression de P')

Exo 17 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples. Combien P_n a-t-il exactement de racines réelles ?

Relations Binaires

Exo 1 Soit $E = \mathbb{R}$ et soit \mathcal{R} la relation binaire sur E définie par : $x \mathcal{R} y$ si $x^3 - y^3 = x - y$.

- a) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
 b) Déterminer les classes d'équivalences ainsi que leur cardinal.

Exo 2 Soit $E = [0, 1]^2$. On définit la relation \preceq par

$$\forall ((x, y), (x', y')) \in E^2, (x, y) \preceq (x', y') \text{ si } [(x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')]$$

- a) Montrer que \preceq est une relation d'ordre. Est-elle totale ou partielle ? Comment s'appelle-t-elle ?
 b) Donner tous les éléments plus grands que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
 c) Démontrer que toute partie de E non vide admet une borne supérieure.
 d) Ce résultat subsiste-il si $E = [0, 1] \times]0, 1[$?

Exo 3 Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné. On suppose qu'il existe 2 éléments de E , a et b tels que $a \not\preceq b$ et $b \not\preceq a$ (a et b ne sont pas comparables)

Construire une relation d'ordre sur E : \preceq' telle que : $a \preceq' b$ et $\forall (x, y) \in E^2 : x \preceq y \implies x \preceq' y$.

Indication : Donner une explication fluviiale de la construction de \preceq' !

Exo 4 Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné. Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. On suppose que A est majoré et l'on note B l'ensemble des majorants de A . On suppose que B admet une borne inférieure. Montrer que A possède une borne supérieure.

Exo 5 Soit E un ensemble ordonné. Soit $(a, b) \in E^2$. Déterminer $\sup\{a, b\}$ dans les cas suivant :

- (a) $E = \mathbb{R}$ avec l'ordre usuel. (b) $E = \mathcal{P}(X)$ avec l'inclusion.
 (c) $E = \mathbb{N}^*$ avec l'ordre " a divise b ". (d) $E = \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ avec l'ordre usuel (on fera juste un dessin).

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Exo 1 Soit $H_n : 9 \mid 10^n + 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n \implies H_{n+1}$. Que peut-on dire de H_n ? Moralité ?

Exo 2 Mettre $[-1, 2]$ sous la forme $[a - r, a + r]$. Compléter $[1, 2] = \bigcap_{\dots} \dots, \dots [$

Exo 3 Montrer que $1,5323232\dots \in \mathbb{Q}$. Donner un exemple (sous forme décimale) de nombre irrationnel (on admet qu'un nombre réel est rationnel SSI son développement décimal est périodique). Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exo 4 Soient r, r' rationnels et α, α' irrationnels.

Que dire de $r + r'$, rr' , $r + \alpha$, $r\alpha$, $\alpha + \alpha'$, $\alpha\alpha'$, $\frac{r}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\alpha}{r}$?

Exo 5 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : \left| x - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \right| \leq \frac{1}{10^n}$. Conséquence ?

Exo 6 (a) Soit $a, b \geq 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

(b) En déduire que pour $a, b, c, d \geq 0$, on a $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$.

(c) En déduire par récurrence sur p que $\forall (a_1, \dots, a_{2^p}) \in (\mathbb{R}^+)^{2^p} : \sqrt[2^p]{a_1 \cdots a_{2^p}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{2^p}}{2^p}$.

(d) Montrer que $\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n a_{n+1}} \text{ avec } a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

(e) En déduire que $\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n : \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

Exo 7 Soit $n \geq 1$. Calculer $\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ en fonction de n .

Exo 8 Résoudre dans $\mathbb{R} : \lfloor 3x \rfloor = 2 \lfloor x \rfloor$.

Exo 9 Soit $P = (1 + x + x^2)^6 = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{12} x^{12}$. Déterminer $a_0, a_1, a_{12}, a_2, a_6$

Exo 10 Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence : A majoré et minoré $\iff \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq M$.

Exo 11 Soit A et B , inclus dans \mathbb{R} , non vides et majorés. On note $A + B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = a + b\}$.

- (a) Compléter $x \in A + B \iff \dots$
- (b) Montrer que $A + B$ est non vide et majoré.
- (c) Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exo 12 Soit f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Déterminer sans justification $f(\mathbb{R}), f(\mathbb{Q}), f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}), f([0, \pi]), f^{-1}([0, 1]), f^{-1}([-15, 0]), f^{-1}(\mathbb{N})$.

Exo 13 Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$

Exo 14 On considère la fonction suivante : $f(p, q) = p + \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$ de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} .

Écrire une fonction python **def f(p, q)** : qui renvoie la valeur de $f(p, q)$. Écrire une fonction python **def inv(N)** : qui renvoie la valeur du couple (p, q) tel que $f(p, q) = N$.

Montrer que f est bijective de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} . Calculer $f^{-1}(100)$. Représenter graphiquement f .

Écrire une fonction python **def inv2(N)** : qui renvoie la valeur du couple (p, q) tel que $f(p, q) = N$ et qui exploite la démonstration de la bijectivité.

NOMBRES COMPLEXES

Exo 1 Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Montrer que $|z|^2 = a^2 + b^2 \iff z = 0$ ou $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exo 2 Linéariser $\cos^5 x \sin^2 x$ et délinéariser $\sin 8t$.

Exo 3 (Polynôme de Tchebychev) Soit $n \in \mathbb{N}$

(a) Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R} : P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

On donnera une expression de P_n sous forme de somme de polynômes.

(b) Calculer P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 .

(c) Montrer que le polynôme P_n est unique.

(d) Calculer le degré, le coefficient dominant, les racines de P_n .

(e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$.

(f) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} : P_n(\cos z) = \cos(nz)$.

(g) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R} : P_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$.

Exo 4 Calculer une racine carré de $40 - 42i$.

Exo 5 Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Résoudre $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$.

Exo 6 Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que les points A, B et C d'affixes respectives $1, z^2$ et z^3 soient alignés.

Exo 7* Étudier la suite (q^{2^n}) selon $q \in \mathbb{C}$.

Exo 8 Résoudre $\sin z = 10$ dans \mathbb{C} . Montrer que \sin est surjective de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Résoudre dans \mathbb{C} , $\sin z = \sin \alpha$.

Exo 9 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[, P_n\left(\frac{1}{\tan^2 \theta}\right) = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1} \theta}.$$

Expliciter les racines de P_n et calculer leur somme.

Exo 10 Soient A, B et C 3 points du plan orienté d'affixe respective a, b et c . Montrer que le triangle (ABC) est équilatéral direct SSI $a + bj + cj^2 = 0$.

- Exo 1** Déterminer le nombre d'anagrammes des mots POIRE, KIWI, ANANAS. Généraliser.
-
- Exo 2** Déterminer une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, np \rrbracket$. On exhibera sa bijection réciproque.
-
- Exo 3** Soit E un ensemble non vide de n éléments. On cherche le nombre S_n de couple (A, B) tels que $A \cup B = E$ (attention : A et B ne sont pas forcément disjoints).
- Calculer ce nombre lorsque $n = 1, 2$.
 - Soit $A \subset E$ fixé de cardinal p . Combien y-a-t-il de couples (A, B) solutions de $A \cup B = E$?
 - En déduire S_n .
 - A l'aide de "patates", déterminer le nombre de triplets tels que $A \cup B \cup C = E$.
- Généraliser à $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s = E$.
-
- Exo 4** Soient n, N, r, b dans \mathbb{N}^* , avec $N = r + b$.
- On tire une à une et sans remise n boules d'une urne contenant N boules discernables.
- Calculer le nombres de résultats possibles.
 - Si l'urne contient r boules rouges et b boules blanches, calculer le nombres de résultats possibles comportant une boule rouge au j -ième tirage ($j \leq n$).
-
- Exo 5** Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.
- On tire simultanément 5 boules de l'urne.
 - Combien y a t-il de tirages possibles ?
 - Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
 - On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
 - En tenant compte de l'ordre, combien y a t-il de tirages possibles ?
 - Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?
-
- Exo 6** On lance 3 dés à 6 faces, discernables les uns des autres (par exemple 3 dés de couleur différente).
- Déterminer le nombre total de tirages.
 - Déterminer le nombre de tirages contenant au moins un 6.
 - Déterminer le nombre de tirages contenant au moins 2 faces identiques.
 - Déterminer le nombre de tirages tels que la somme des 3 dés soit paire.
 - Déterminer le nombre de tirages vérifiant les conditions 2 et 3.
-
- Exo 7** On considère un jeu de 52 cartes réparties en quatre couleurs : \clubsuit , \diamond , \heartsuit et \spadesuit . Chacune de ces couleurs est constituée de 13 hauteurs : du 2 au 10, valet, dame, roi, as. Dans ce jeu de 52 cartes, on choisit simultanément cinq cartes. Ces cinq cartes sont appelés une "main".
- Déterminer le nombre total de mains.
 - Déterminer le nombre de mains qui contiennent un carré (4 cartes de même hauteur).
 - Déterminer le nombre de de mains qui contiennent au moins un trèfle.
 - Déterminer le nombre de mains qui contiennent un brelan d'as (trois as exactement).
 - Déterminer le nombre de "full" (un brelan et une paire).
 - Déterminer le nombre de mains qui contiennent une double paire (deux cartes d'une même hauteur et deux autres cartes de même hauteur sans carré ni full).
 - Déterminer le nombre de "quintes" (cinq cartes qui se suivent, sans être de la même couleur).
-
- Exo 8** 1) $2n$ personnes doivent prendre place autour d'une table ronde. De combien de façons peuvent-elles s'asseoir ?
- 2) On suppose qu'il y a n hommes et n femmes. De combien de façons peuvent-elles s'asseoir en respectant l'alternance ?
-

- Exo 9** 1) Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre (A, B) de parties de E telles que $A \subset B$?
 2) Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre (A, B) de parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$?
 3) Écrire une fonction python **def parties(n)** : qui renvoie la liste des sous ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Écrire une fonction python **def nb(n)** : qui vérifie le 1).

Exo 10 Démontrer à l'aide d'un dénombrement que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exo 11 Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $S(n, p)$ le nombre de surjections de $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ dans $F = \llbracket 1, p \rrbracket$.

- Déterminer $S(n, p)$ lorsque $p > n$.
- Calculer $S(n, n)$, $S(n, 1)$, $S(n, 2)$ et $S(n, 3)$.
- Établir une relation entre p^n et les $S(n, p)$.
- On suppose que $p \leq n$. Montrer que $S(n, p) = p(S(n-1, p) + S(n-1, p-1))$.
- On admet (avec le 4. et les séries entières) que si que $p \leq n$, on a : $S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.
- En déduire la valeur des sommes suivantes : $A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n$ et $B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}$.

Exo 12 Déterminer le nombre a_n de manière de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 1×2 . En déduire a_{16} .

Exo 13 On note D_n le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments n'ayant pas de point fixe.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.

Écrire une procédure récursive **def D(n)** : en python qui renvoie D_n . en déduire D_6 .

2. Établir, par une preuve combinatoire, que pour tout $n \geq 2$,

$$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1}).$$

3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

4. En déduire la valeur de D_n .

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le tirage d'une permutation dans \mathcal{S}_n . On note p_n , la probabilité d'obtenir un dérangement. Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini.

Exo 14 Soient E, F et G 3 ensembles non vide. Déterminer une bijection de $G^{E \times F}$ dans $(G^E)^F$.

SUITES RÉELLES ET COMPLEXES

Exo 1 Montrer avec la définition "epsilonlesque" que (u_n) définie par $u_n = \frac{3n+5}{2n+7}$ converge vers $\frac{3}{2}$.

Exo 2 Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{3n}}$.

Calculer la limite par encadrement (sans calculer u_n) puis donner un équivalent de (u_n) .

Exo 3 Soit $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. Conclure et donner un encadrement de la limite à 10^{-1} près.

Écrire une fonction python **def val(h)** : qui renvoie la valeur approchée de la limite à h près.

Exo 4 Étudier la convergence (et la limite éventuelle) des suites suivantes :

$$\frac{\sin n}{n}, \quad \frac{n^2}{n+1} + (0,7)^n, \quad \sqrt{n^4 + n^2} - n^2 - n, \quad \frac{\ln(n+1)}{\ln n}, \quad \ln(e^n + 1) - n, \quad \frac{(\ln n)^a}{n^{a+1}} \quad (a \in \mathbb{R}),$$

$$(3^n + 7^n)^{1/n} \text{ (généraliser)}, \quad \frac{n^{10}(\ln n)^{20}}{2^n}, \quad \frac{n!}{2^{2^n}}.$$

Exo 5 Étudier la convergence de la suite : $\left(\frac{1}{2} \sin \frac{1}{n} + \frac{3}{5} \cos n\right)^n$

Exo 6 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \exists ! x_n \in]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ tel que $\tan x_n = x_n$.

Calculer la limite de (x_n) , un équivalent de (x_n) puis un développement asymptotique à 3 termes de (x_n) .

C'est-à-dire $x_n = a_n + b_n + c_n + o(c_n)$ avec $c_n \ll b_n \ll a_n$.

Exo 7 Déterminer un équivalent simple de

$$\frac{n+1}{n+7}, \frac{n^2 - 1000n - 456}{n^2 + 30n + 798}, \frac{n + \sqrt{n} + (\ln n)^{10}}{n^2 + 7}, \sqrt{n^4 + 2n^2} - n^2 - 1, \ln(n+1), e^{n+1}, \arctan(n+1), \sqrt[3]{n+1}, \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}, \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \sum_{p=1}^n p!$$

Exo 8 Étudier la convergence de (u_n) définie par : $u_1 > 0$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$.

Exo 9 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n = 3$.

2) Déterminer la limite ℓ de la suite ainsi définie.

3) Trouver un équivalent de $x_n - \ell$ quand n tend vers l'infini.

Exo 10 Calculer u_n en fonction de n quand $u_0 = 6, u_1 = 26$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n$.

Exo 11 Calculer u_n en fonction de n quand $u_0 = a \in \mathbb{R}, u_1 = b \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = -4u_{n+1} - 16u_n$.

Exo 12 Calculer u_n en fonction de n quand $u_0 = 1, u_1 = 2$ et

$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 3 + 7n$ (penser aux équations différentielles).

Exo 13 Étudier la convergence et donner un équivalent de la suite $\left(\frac{j^n + 3in - 5 + 2i}{in^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{3})^n}\right)$, avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exo 14 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) et soit la suite (u_n) définie par $u_n = (1 + \frac{z}{n})^n$.

(a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0 : \operatorname{Re}(1 + \frac{z}{n}) > 0$.

(b) Montrer que la suite $(|u_n|)$ converge et déterminer sa limite en fonction de a et b .

(c) En déduire la convergence et la limite de (u_n) en fonction de z .

Exo 15 Étudier les suites récurrentes suivantes :

a) $u_{n+1} = u_n^3 + \frac{1}{4}$ et $0 < u_0 < 1$

b) $u_{n+1} = \frac{1}{u_n^2 + 3}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

c) $u_{n+1} = u_n^2 - 1$ et $u_0 \in \mathbb{R}$

Exo 16 Étudier avec 2 manières différentes la suite récurrente suivante : $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exo 17 Soit (u_n) telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{5n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exo 18 Soit (u_n) une suite bornée de \mathbb{R} . On considère pour tout entier n , l'ensemble :

$$A_n = \{u_p \text{ tel que } p \geq n\}.$$

(a) Écrire en extension A_n pour $u_n = (-1)^n, u_n = \frac{1}{2^n}$.

(b) Comment évolue A_n lorsque (u_n) converge vers ℓ ?

(c) Justifier l'existence de $\alpha_n = \inf A_n$ et $\beta_n = \sup A_n$.

(d) Étudier la monotonie des suites (α_n) et (β_n) . En déduire leur convergence respective vers 2 réels λ_0 et Λ_0 .

(e) Montrer que λ_0 est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) (on a de même pour Λ_0). Qu'a-t-on démontré avec ce résultat ?

(f) Montrer que toute valeur d'adhérence de (u_n) est entre λ_0 et Λ_0 .

Exo 19 Soit (u_n) de \mathbb{R} . On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) .

Montrer que V est soit vide soit un intervalle fermé de \mathbb{R} .

Exemple : Donner V lorsque $u_n = \ln n$ et $u_n = \cos(\ln n)$.

Exo 20 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 3, \dots$

Écrire une fonction python **def u(n)** : qui renvoie la valeur de u_n .

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exo 21 On considère l'équation $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{n}$.

(a) Montrer que, pour n assez grand, cette équation a exactement deux solutions positives

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

(b) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ ; donner un équivalent de $u_n - \ell$.

(c) La suite (v_n) converge-t-elle? Déterminer un équivalent de v_n .

(d) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de v_n .

FONCTIONS RÉELLES

Exo 1 Soit f continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Montrer que f admet un point fixe dans $[0, 1]$.

Exo 2 Déterminer des équivalents simples de :

a) $\frac{P'(x)}{P(x)}$ en α , racine double de P , fonction polynômiale non nulle.

b) $\frac{\cos 2x}{4x - \pi}$ en $\frac{\pi}{4}$.

c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.

d) $\frac{-3x+7}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ en 2.

Exo 3 Déterminer plusieurs petits o simples de : a) e^{-x^3} en $+\infty$. b) $\frac{(\ln x)^{100}}{x^3}$ en $+\infty$, en 0.

Exo 4 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

(a) Tracer f sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$.

(b) Étudier la continuité de f sur \mathbb{R}_+^* .

(c) En encadrant $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ à l'aide de x , montrer que f se prolonge par continuité en 0 (PPC).

(d) Tracer f sur \mathbb{R}_+ .

Exo 5 Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) = 0$ et f continue sur $]0, +\infty[$.

(a) Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

(b) On suppose de plus que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ telle que $f'(c) = 0$.

Exo 6 Soient f une fonction lipschitzienne de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^* . Montrer que $\frac{1}{f}$ l'est aussi.

Exo 7 Soit f dérivable de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $f \circ f = f$.

Montrer que si $y \in f([0, 1])$, alors $f(y) = y$. En déduire que $f = \text{id}_{[0,1]}$ ou f est constante.

Exo 8 Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $e^x = P(x)$ n'a qu'un nombre fini de racines.

Exo 9 Montrer très vite avec des moyens modernes que :

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : |\arctan x| \leq |x|$. (b) $\forall n \geq 1 : \frac{1}{3(n+1)^{2/3}} \leq \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \leq \frac{1}{3(n)^{2/3}}$.

Exo 10 Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$.

(a) Tracer sommairement f .

(b) f est prolongeable par continuité en 0? f ainsi prolongée est-elle de classe C^1, C^2, \dots sur \mathbb{R} ?

Exo 11 On considère l'équation fonctionnelle d'inconnue f :

$$(E) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x+y) = f(x) + f(y).$$

- (a) Calculer $f(0)$.
On pose $a = f(1)$.
- (b) Calculer $f(n)$ en fonction de a pour $n \in \mathbb{N}$; $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : f(nx) = nf(x)$.
- (c) En déduire $f(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$.
- (d) Montrer que si f est continue en 0 alors f est continue sur \mathbb{R} .
- (e) On suppose que f est continue sur \mathbb{R} . Déterminer les solutions de (E).
- (f) On suppose que f est croissante sur \mathbb{R} . Déterminer les solutions de (E).

Exo 12 On considère l'équation fonctionnelle d'inconnue f sur l'intervalle I :

$$(*) : \forall t \in I : f(t^2) = f(t) \text{ et } f \text{ continue sur } I.$$

Déterminer les solutions de cette équation quand $I = [0, 1]$, $I = [1, +\infty[$ et (difficile) $I =]1, +\infty[$.

Exo 13 Montrer que $2 \arccos \frac{3}{4} = \arccos \frac{1}{8}$.

Exo 14 Si $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.

- (a) Déterminer le plus petit réel x_n strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local.
- (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n)$ à l'aide des sommes de Riemann.

CONVEXITÉ

Exo 1 Montrer que si $\vec{AQ} = \vec{AM} + \vec{AN} + \vec{AP}$, alors Q est un barycentre de A, M, N, P .

Exo 2 Montrer que :

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \arctan x \leq x$. (b) $\forall x \in [-1, 1] \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} : e^{\lambda x} \leq \text{ch}(\lambda) + x \text{sh}(\lambda)$.
- (c) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n : \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Exo 3 Donner un exemple de fonction convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} non dérivable en 0, 1, et 2.

Exo 4 Soit f convexe sur un intervalle bornée $]a, b[$, montrer que f est minorée.

Exo 5 Soit f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exo 6 Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et calculer $f^{(n)}(0)$.
- (b) Étudier la convexité et tracer f .

Exo 7 Soit f convexe de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en tout point $]0, 1[$ et que f'_d et f'_g sont croissantes sur $]0, 1[$. En déduire que f est continue sur $]0, 1[$. L'est-elle forcément sur $[0, 1]$?

Exo 8 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R} . On suppose que f vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe sur \mathbb{R} .

Exo 9 Soit p un réel tel que $p > 1$.

- (a) Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : (\lambda x + \mu y)^p \leq (\lambda x^p + \mu y^p)(\lambda + \mu)^{p-1}$.
- (b) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

indication : On commencera par appliquer le (a) avec $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^p = 1$.

DÉVELOPPEMENTS LIMITES-ÉTUDES LOCALES

Exo 1 Donner le DL en 0 à l'ordre 6 des fonctions suivantes :

$$e^{2x}, \quad \ln(1+x^2), \quad \sqrt{1+x^3}, \quad \frac{1}{x-7}, \quad 3^x.$$

Exo 2 Donner le DL à l'ordre 3 de f définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ au voisinage de $0, 2, -1, +\infty, -\infty$.

Exo 3 Donner le DL en a à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

$$\tan x \text{ en } a = \frac{\pi}{4}, \quad \sqrt{x} \text{ en } a = 4, \quad \ln(x) \text{ en } a = e, \quad \arctan x \text{ en } a = 1, \quad e^{x^2} \text{ en } a = 2.$$

Exo 4 Soit $f(x) = (\sin x)^6$. Déterminer le DL de f en 0 à l'ordre 9 avec un minimum de calculs.

Exo 5 Soit f une fonction C^∞ sur \mathbb{R} et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$.

Exo 6 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2^x} - 2}{2^x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{3}{2}} \sqrt{x+1} - x^2 - \frac{x}{2}).$$

Exo 7 Déterminer un équivalent simple de

$$a) \frac{-\ln 2 + \sin x + \ln(1+e^x) + \cos x - e^x}{\arcsin x^2 - \tan^2 x} \text{ en } 0, \quad b) (1 + \frac{1}{x})^x - e \text{ en } +\infty.$$

Exo 8 Calculer les DL en 0 à l'ordre 4 de :

$$a) \sin x \sqrt{1+x} \quad b) \frac{\ln(1+x)}{1-x} \quad c) \cos(\sin x) \quad d) \sin(\cos x) \quad e) \frac{1}{1+x+x^2} \quad f) (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Exo 9 Soit f définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.

(a) Montrer que f admet un DL en 1 à tout ordre et donner celui d'ordre 2.

(b) En déduire que f peut se prolonger par continuité en 1 et montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 1 ; on déterminera localement la place de la courbe par rapport à la tangente en 1.

(c) Étudier f en 0.

(d) Étudier les variations de f et tracer le graphe de f .

Exo 10 Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = (x+1)e^{\frac{x+1}{x-2}}$

Étudier l'allure locale (asymptote et position) en $+\infty$.

Exo 11 Calculer le DL en 0 à l'ordre $2n+1$ de $\arcsin x$ (on donnera les coefficients du DL sans pointillés).

Exo 12 Soit f définie de $I =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ sur $J = f(I)$ par $f(x) = e^x \sin x$.

Montrer que f est bijective, que f^{-1} est C^∞ sur J . Calculer le DL de f^{-1} en 0 à l'ordre 3.

Exo 13 Étudier la nature de la suite (u_n) définie par $u_n = n \left(\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$.

Exo 14 Étudier la nature de la série de terme général $u_n = (\sqrt{n+\beta} - \sqrt{n-\beta})^\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exo 15 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arcsin^2 x}$$

SÉRIES NUMÉRIQUES RÉELLES ET COMPLEXES

Exo 1 Étudier, grâce à T.C., la nature des séries suivantes :

$$a) \left(\sum \cos \frac{\pi}{n} - 1 \right) \quad b) \left(\sum \frac{1}{\sqrt{n + \ln n}} \right) \quad c) \left(\sum \frac{7n^2 + n + 1}{2n^4 + n^3 + 5 + 4i} \right) \quad d) \left(\sum \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n} \right)$$

e) $\left(\sum \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}\right)$ f) $\left(\sum \frac{\sqrt[3]{2}}{n}\right)$ g) $\left(\sum \frac{2^n - 10n^2}{3^n + i^n + 2n^4 - 7 \ln n}\right)$ h) $\left(\sum e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$
i) $\left(\sum \ln\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right)\right)$ j) $\left(\sum \frac{1}{(\ln n)^n}\right)$ k) $\left(\sum \frac{1}{n \sqrt[n]{n^3}}\right)$ l) $\left(\sum \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$ m) $\left(\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$
n) $\left(\sum O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ o) $\left(\sum a^{-n^\alpha}\right)$ (selon $a > 0$ et $\alpha > 0$) p) $\left(\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}\right)$.

Exo 2 Étudier la nature des séries suivantes :

a) $\left(\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$ b) $\left(\sum \frac{n^2}{n^3+1} z^n\right)$ ($z \in \mathbb{C}$) c) $\left(\sum x^{-\sqrt{n}}\right)$ ($x > 0$)

Exo 3 **Séries de Bertrand** (HPTS)

(a) Étudier la nature des séries suivantes :

$\left(\sum \frac{\ln n}{n^4}\right)$, $\left(\sum \frac{(\ln n)^{37}}{n^{1,2}}\right)$, $\left(\sum \frac{\ln n}{n}\right)$ $\left(\sum \frac{1}{(\ln n)^2 \sqrt{n}}\right)$, $\left(\sum \frac{1}{n \ln n}\right)$ $\left(\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$.

(b) Généraliser à l'aide des exemples ci-dessus.

Exo 4 Étudier la nature de la série $(\sum u_n)$ où (u_n) est définie par $u_{n+1} = \frac{1}{n} \sin(u_n)$.

Exo 5 Calculer, après en avoir justifié l'existence, les sommes suivantes :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.

Exo 6 Soit $u_n = \ln(n+2) + a \ln(n+1) + b \ln(n)$. Déterminer les couples $(a, b) \in (\mathbb{R})^2$ tels que $(\sum u_n)$ soit convergente.

Dans ces cas là, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exo 7 Étudier la nature (absolument convergente-semi-convergente-divergente) des séries suivantes :

a) $\left(\sum (-1)^n \frac{n^4 + 123n^3 - n^2 + 7}{n^5 + 987n + 456}\right)$, b) $\left(\sum (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)$, c) $\left(\sum (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n}\right)$, d) $\left(\sum \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})\right)$

Exo 8 Convergence et somme de la série de terme général : $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}$.

Exo 9 Montrer que les suites $u_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ et $v_n = \sqrt{n} u_n$ sont convergentes.

Exo 10 Soit $u_n = \frac{j^n}{n^\alpha}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\alpha > 0$.

(a) Calculer pour $p \in \mathbb{N}$, $v_p = u_{3p+1} + u_{3p+2} + u_{3p+3}$ et en donner un équivalent.

(b) Montrer que $(\sum v_p)$ est convergente, puis que $(\sum u_n)$ est convergente.

(c) Que dire de la série $\left(\sum \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{n^\alpha}\right)$?

(d) Écrire une fonction python **def somme(n)** : qui renvoie la valeur de $\sum_{k=1}^n u_k$, pour $\alpha = 1$. On utilisera la manipulation des complexes du module **math** de python et notamment le nombre **1j** qui représente le "i" mathématiques.

Exo 11 Calculer, après avoir justifié l'existence, une valeur approchée des sommes suivantes :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{n!}$ à 10^{-2} près et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$ à 10^{-3} près.

Exo 12 Soit une suite (u_n) strictement positive et convergente vers 0.

On note $v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n}$ où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exo 13* Soit a une suite réelle croissante tendant vers $+\infty$. Montrer que l'on peut trouver une suite u à termes positifs telle que $\sum u_n$ converge et $\sum a_n u_n$ diverge.

Exo 14 Soit u une suite positive décroissante et tendant vers 0 et v la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n(u_n - u_{n+1}).$$

1) Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2) Montrer qu'elles ont la même somme en cas de convergence.

Exo 15 $u_n = n^\alpha \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\ln t}{1+t} dt$. Étudier la série de terme général u_n en fonction du réel α .

Exo 16 Étude de la suite réelle définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2}$. Donner un équivalent de u_n .

Exo 17 Soit $\sum u_n$ la série définie par $u_n = 0$ si n a au moins un "5" dans son écriture en base 10 et $u_n = \frac{1}{n}$ sinon. Donner u_n pour $n \in \llbracket 1, 26 \rrbracket$. Montrer que la série $(\sum u_n)_{n \geq 1}$ converge.

Exo 18 Existence et calcul (quand elle existe!) de la série double $\left(\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)$.

Exo 19 Démontrer que pour tout $x \in [-1, 1[$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

En déduire que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n} = 1 - \gamma$

(avec $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et γ la constante d'Euler définie par $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n]$).

Exo 20 Montrer qu'il existe une bijection entre $[0, +\infty[$ et $]0, +\infty[$ puis entre \mathbb{R} et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exo 21 Soit p_n le n -ième nombre premier (par exemple $p_{11} = 31$).

a) Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p_1^{i_1} \dots p_k^{i_k}} \right)_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k}$ est sommable et calculer sa somme S_k .

b) En déduire la nature de la série $(\sum \frac{1}{p_n})$.

Exo 22 (a) Déterminer un équivalent lorsque N tend vers $+\infty$ de la somme partielle d'ordre N de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

(c) En admettant qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln^2(N) + C + o_{+\infty}(1)$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$$

où γ est la constante d'Euler. On rappelle que $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right]$.

PROBABILITÉS - VARIABLES ALÉATOIRES

Exo 1 Ce jeu de casino se joue entre la "banque" et des joueurs. Il utilise un certain nombre de jeux de 52 cartes.

Voici une règle simplifiée, pour un seul joueur. On utilise un seul jeu de 52 cartes. Chaque carte a une valeur :

- une de 2 à 10 : sa valeur faciale, ou nominale ;
- une figure (valet, dame ou roi) : 10 points ;
- un as : 1 ou 11 points, au gré du joueur.

Rappelons que les quatre enseignes sont $\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit$.

La banque commence par distribuer deux cartes au joueur.

Le joueur peut ensuite demander à la banque des cartes supplémentaires, une à une.

Il **gagne** s'il atteint exactement 21. Il **perd** s'il dépasse strictement 21.

Sinon, il peut s'arrêter quand il veut, avec un total inférieur strictement à 21. Alors la banque se distribue des cartes et s'arrête lorsque :

- soit son total dépasse strictement le total du joueur sans dépasser strictement 21, et alors le joueur perd ;
- soit son total dépasse strictement 21 (la banque saute) et alors le joueur gagne.

1. Donner la probabilité que les deux premières cartes distribuées au joueur fassent un total de 21. (On dit alors qu'il fait "Black jack").

2. Les deux premières cartes distribuées au joueur sont une dame de pique et un 5 de trèfle, et il demande une troisième carte.

Donner la probabilité pour qu'il perde aussitôt.

Dans chaque cas on commencera par donner un espace de probabilités fini correspondant à l'expérience aléatoire.

Exo 2 **Formule de Poincaré** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie quelconque d'événements. Montrer que :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Application :

Un monsieur distrait écrit n lettres à n personnes distinctes et ferme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses, qu'il inscrit ensuite au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'un destinataire au moins reçoive la lettre qui lui était destinée? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.

Exo 3 Une urne contient 15 boules : une noire, cinq blanches et neuf rouges.

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) A : " le tirage est tricolore".
- b) B : " parmi les boules tirées figurent exactement une noire et au moins une rouge".
- c) C : " les trois boules tirées sont de la même couleur".

2. On suppose que le tirage s'effectue successivement avec remise. Déterminer les probabilités des événements A, B, C définis ci-dessus.

Exo 4 Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 3 fois de suite une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres :

- 1) dans un ordre strictement croissant? 2) dans un ordre croissant au sens large?

Exo 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

1) On prélève en une fois une "poignée aléatoire" de p boules de l'urne (avec $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$).

- a) Soit $k \in \llbracket p, n \rrbracket$. Calculer la probabilité de l'évènement A_k : "le plus grand numéro de la poignée est k ".

b) En déduire
$$\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$

2) On tire successivement et sans remise p boules de l'urne. Déterminer la probabilité pour que la p -ième boule ait un numéro supérieur aux $p-1$ précédents.

Exo 6 Dans une classe, la proportion des étudiants ayant préparé l'examen vaut p ($0 < p < 1$). Ceux qui n'ont pas préparé l'examen réussissent avec une probabilité égale à $1/2$ tandis que ceux qui l'ont préparé réussissent avec une probabilité α ($\alpha \geq 0,99$).

Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas préparé l'examen?

Exo 7 Dans une population de grande taille, on note

- M l'évènement qu'un individu tiré uniformément présente une certaine maladie ;
- S celui qu'un tel individu soit sain.

On dispose

- d'un échantillon constitué d'individus malades ;
- d'un échantillon constitué d'individus sains ;
- d'une bonne estimation de la proportion $\mathbf{P}(M)$ de malades.

Une compagnie pharmaceutique met au point un test de dépistage simple mais imparfait.

On note

- T^+ l'évènement où le test indique que la personne est malade (test positif) ;
- T^- l'évènement complémentaire (test négatif).

La compagnie évalue ce test sur les échantillons d'individus malades et d'individus sains.

Elle obtient ainsi une bonne estimation de

- $\mathbf{P}(T^+/M)$ (sensibilité du test)
- $\mathbf{P}(T^-/S)$ (spécificité du test)

1. Calculer

- $\mathbf{P}(M/T^+)$ (valeur prédictive positive du test)
- $\mathbf{P}(S/T^-)$ (valeur prédictive négative du test)

en fonction des données $\mathbf{P}(M)$, $\mathbf{P}(T^+/M)$, $\mathbf{P}(T^-/S)$.

2. La compagnie rend public que $\mathbf{P}(T^+/M) = 95\%$, $\mathbf{P}(T^-/S) = 90\%$.

Qu'en pensez-vous sans en savoir plus ?

Qu'en pensez-vous sachant par ailleurs que $\mathbf{P}(M) = 2\%$?

Exo 8 Une personne a $n \geq 2$ clés mais une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne fonctionnent pas

Soit X "le nombre d'essais pour ouvrir la porte" qui est une variable aléatoire.

1. Calculer la loi de probabilité de X .

2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$.

3. Reprendre l'exercice mais cette fois sans éliminer celles qui ne fonctionnent pas.

Exo 9 Un journaliste a une liste de personnes à interviewer. Il doit en interviewer au moins cinq.

Les personnes de cette liste n'acceptent de parler qu'avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$, indépendamment les uns des autres.

1. Quelle est la probabilité qu'il puisse réaliser ces cinq interviews si la liste ne contient que cinq noms.

2. Et si elle en contient huit ?

Exo 10 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soient N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes.

On définit Z par $\forall \omega \in \Omega : Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega)$.

Montrer que Z est une variable aléatoire.

Exo 11 Un joueur parie une mise de 1 sur l'issue d'un lancer de trois dés à six faces. Il choisit un nombre de 1 à 6 avant de le lancer.

Si aucun dé ne donne ce nombre, le joueur perd sa mise.

Sinon, il garde sa mise, et obtient en plus une quantité de 1 pour chaque dé qui donne ce nombre.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X du gain algébrique final du joueur.

2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X . Le jeu est-il équilibré ?

3. Comment modifier la somme obtenue en plus lorsque trois dés donnent le nombre choisi pour que le jeu soit équilibré ?

Exo 12 Soit Z le nombre d'enfants d'une famille, X le nombre de filles et Y le nombre de garçons.

Nous supposons que la probabilité qu'une famille ainsi choisie possède k enfants dont n filles est donnée par :

$$p_{k,n} = \mathbf{P}(Z = k; X = n) = \frac{e^{-2} 2^k (0,52)^n (0,48)^{k-n}}{n!(k-n)!} \mathbb{1}_{\{0 \leq n \leq k\}}.$$

1. Montrer que les variables aléatoires Z et X ne sont pas indépendantes mais que Y et X le sont. Que dire de X , Y et Z ?

2. Donner la loi conditionnelle de X sachant $Z = k$. En déduire l'espérance de X sachant $Z = k$.

Exo 13 Un groupe de dix chasseurs guette le passage d'un vol de canards. Lorsque les canards passent en groupe, les chasseurs se mettent tous à tirer simultanément et chacun choisit au hasard le canard qu'il vise, indépendamment des autres.

On suppose que chaque chasseur touche son canard avec la même probabilité p .

Combien de canards, en moyenne, survivront aux tirs lorsque le vol se compose de 20 canards? Tracer la fonction qui à p associe cette moyenne. Calculer cette moyenne pour diverses valeurs de p .

Exo 14 On suppose que le couple de v.a. entières (X, Y) a une loi donnée par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 : \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{(1+i+j)!} \quad \text{où } \alpha > 0$$

(a) Que peut-on dire, sans calculs, des lois de X et Y ?

(b) Si $S = X + Y$, déterminer la loi de S et en déduire la valeur de α .

(c) Calculer $\mathbf{P}(X = 0)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) Sans calcul, donner l'espérance de S et en déduire celle de X . Pourrait-on obtenir ainsi la variance de X ? Calculer la covariance de (X, Y) et en déduire la variance de X .

(e) Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$ puis en déduire $\mathbf{P}(X > Y)$.

Exo 15 Le nombre de personnes entrant en une journée dans un bureau de poste est une variable aléatoire S suivant une loi de Poisson de paramètre λ . La probabilité qu'un arrivant soit une arrivante est p . On note X le nombre d'arrivantes dans une journée et Y le nombre d'arrivants. Calculer $\mathbf{P}(X = i, Y = j | S = n)$ et en déduire la loi de (X, Y) et les lois de X et Y .

X et Y sont-elles indépendantes ?

Exo 16 Soient deux urnes pouvant contenir $b \geq 2$ boules numérotées de 1 à b . A l'instant 0, les b boules sont toutes dans l'urne 2. A chaque instant n , une boule est choisie avec équiprobabilité et passe dans l'autre urne. On note X_n le nombre de boules contenues dans l'urne 1 à l'instant n . Calculer l'espérance de X_{n+1} conditionnée en $(X_n = i)$. Déterminer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_n)$.

Exo 17 On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles r_1, \dots, r_k . On note p_i la probabilité de réalisation de r_i , lors d'une épreuve. Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note X_i le nombre de réalisations de r_i au cours des n épreuves.

(a) Déterminer $\mathbf{Var}(X_1 + \dots + X_k)$.

(b) Déterminer la loi de X_i et sa variance.

(c) Même question pour $X_i + X_j$ avec $i \neq j$. En déduire $\mathbf{Covar}(X_i, X_j)$. Vérifier que ce résultat est compatible avec celui de la première question.

Exo 18 Au moment où chacun possède un tiers du marché de téléphone mobile, trois opérateurs A, B et C décide de mettre sur le marché un nouveau type de forfait annuel. A la fin de l'année, l'évolution des parts de marché se fait de la façon suivante :

- les clients de la compagnie A se répartissent indifféremment entre A, B et C l'année suivante.

- les clients de la compagnie B reste toujours fidèle à cette compagnie.

- les clients de la compagnie C seront l'année suivante clients de A avec une probabilité 1/12, de B avec une probabilité 7/12 et de C avec la probabilité 1/3.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, a_n , b_n et c_n les probabilités pour qu'à l'issue de la n -ième année, un consommateur décide de s'abonner chez A, B ou C pour l'année suivante.

- Déterminer une relation de récurrence entre a_n , b_n et c_n et a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} .
- En déduire l'expression de fonction de n de a_n , b_n et c_n et déterminer la limite de ces suites.

Exo 19 Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre du triangle ABC selon le protocole suivant :

- Lorsqu'à un instant donné, elle se situe en A, elle se fixe à l'instant suivant en B avec la probabilité 0,75 et en C avec la probabilité de 0,25.
- Lorsqu'à un instant donné, elle se situe en B, elle se fixe à l'instant suivant en A avec la probabilité 0,75 et en C avec la probabilité de 0,25.
- Si à un instant donné, elle se trouve en C, elle ira systématiquement en B à l'instant suivant.

On désigne par a_n , b_n et c_n les probabilités pour qu'à l'instant n , la particule se situe en A, B ou C.

- Déterminer une relation de récurrence entre a_n , b_n et c_n et a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} .
- En déduire l'expression de fonction de n de a_n , b_n et c_n et déterminer la limite de ces suites.

Exo 20 Soient X et Y deux VAR définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ . Déterminer la loi de $X + Y$.

Exo 21 Modèle de Galton-Watson

On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet trois descendants avec la probabilité $1/8$, un ou deux descendants avec la probabilité $3/8$ et aucun descendant avec la probabilité $1/8$, indépendamment de ses congénères.

À l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité $x_1 = 1/8$.

- Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
- On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, x_n la probabilité qu'à l'issue de la n -ième génération l'espèce ait totalement disparu. Donner une relation entre x_{n+1} et x_n .
- Étudier la suite et montrer qu'elle converge vers un réel que l'on déterminera. Interpréter ce résultat.

Exo 22 La rumeur

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p , c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1 - p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

- Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
- En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n .
- En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exo 23 Deuxième lemme de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants. On note $A =$

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right).$$

On suppose que $\left(\sum \mathbf{P}(A_n) \right)$ diverge et l'on souhaite prouver que $\mathbf{P}(A) = 1$.

- Caractériser le fait qu'un élément appartienne à A .
- Soient $n \leq N$. On note $E_{n,N} = \bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}$ et $E_n = \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}$.
 - Démontrer que (n étant fixé), $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(\mathbf{P}(E_{n,N})) = -\infty$.
 - En déduire que $\mathbf{P}(E_n) = 0$ puis que $\mathbf{P}(A) = 1$.

Application :

- On lance une pièce équilibrée, une infinité de fois. Montrer que l'évènement ["37 piles de suite" une infinité de fois] a une probabilité de 1.

Exo 24 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \frac{1}{1+X}$. Calculer $E(Y)$.

2. On suppose que $p = \frac{1}{2}$ et que $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = \frac{a^X}{2n}$.

Exo 25 **Déterminant.**

Soient $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On suppose que ces variables aléatoires ont la même loi suivante : elle sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$ avec

$\mathbf{P}(X_{i,j} = -1) = \mathbf{P}(X_{i,j} = 1) = \frac{1}{2}$. On note $M = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice. Quelle est l'espérance du déterminant de M ?

Exo 26 **Service de dépannage**

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenants sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à quatre reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance, sa variance.

(b) Calculer la probabilité de l'événement : « le client a au moins subi un retard ».

2. Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre m . On note Z le nombre d'appels traités en retard.

(a) Exprimer la probabilité conditionnelle de $(Z = k)$ sachant que $(Y = n)$.

(b) En déduire la probabilité de $(Z = k \text{ et } Y = n)$.

(c) Déterminer la loi de Z .

3. En 2013, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance?

ESPACES VECTORIELS

Exo 1 Soit $\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ (on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

(a) Montrer que \mathbb{K} est un corps.

(b) Montrer que \mathbb{K} est un \mathbb{Q} -EV et donner sa dimension.

Exo 2 Montrer que \mathbb{R} est un \mathbb{Q} -ev de dimension infinie.

Exo 3 L'ensemble des fonctions lipschitziennes (resp. monotones) de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est-il un \mathbb{R} -ev?

Exo 4 Soit E un K -ev et $(x, y) \in E^2$.

Compléter (x, y) liée $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$ (avec les symboles $\implies, \iff, \Leftarrow$)

Exo 5 Soit F et G 2 SEV de E tels que $F + G = E$. Que dire d'un vecteur x qui n'appartient pas à F ?

Exo 6 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, P l'ensemble des fonctions paires de E et I l'ensemble des fonctions impaires de E . Montrer que P et I sont des SEV de E et montrer que $P \oplus I = E$. Déterminer la décomposition des fonctions cos, exp, polynômes.

Exo 7 Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : d^0(P_n) = n$. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. HPTS

Exo 8 Soit f_a définie sur \mathbb{R} par $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exo 9 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit f_n définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \cos nx$ et soit g_n définie sur \mathbb{R} par $g_n(x) = \cos^n x$.

(a) Montrer que (g_0, g_1, \dots, g_n) est une famille libre de E .

(b) Calculer $\int_0^{2\pi} f_n(t)f_p(t)dt$. En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de E .

(c) Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$. A-t-on $f \in \text{vect}\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Exo 10 On pose $E = \mathbb{R}^2$. Soit $F/x + 2y = 0$ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , $G = \text{vect}(u)$ avec $u = (2, 3)$.

- Montrer que F et G sont des SEV de E .
- Déterminer une base et la dimension de F et G .
- Déterminer 2 supplémentaires de F et 2 supplémentaires de G .
- Déterminer l'expression analytique de l'homothétie de rapport 7.
- Déterminer l'expression analytique du projecteur p sur F parallèlement à G .
- Déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport à G parallèlement à F .
- Déterminer l'expression analytique des formes linéaires de noyau F .
- Déterminer l'expression analytique des endomorphismes f tels que $\ker f = \text{im} f = F$.

Exo 11 On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$, rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$.

Soit $F = \{P \in E \mid P(2) = 0\}$ et $G \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 9z = 0 \end{cases}$

- Donner la signification de " $G \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 9z = 0 \end{cases}$ ".
- Montrer que F est un SEV de E et en donner une base et la dimension. Déterminer une équation cartésienne de F dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E .
- Montrer que G est un SEV de E et en donner une base et la dimension.

Exo 12 On pose $E = \mathbb{R}^4$, rapporté à sa base canonique \mathcal{B}_0 . Soit $F/x + 2y + 3z + t = 0$, $G \begin{cases} x - y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$

- Déterminer une base et la dimension de F et G .
- Déterminer un supplémentaire de F et un supplémentaire de G .

Exo 13 Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

- Montrer que E est un \mathbb{R} -EV. Déterminer une base et la dimension de E .
- Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Montrer que E est une \mathbb{R} -algèbre.
- E munit des lois $+$ et \times est-il un corps?

Exo 14 Soit f définie de \mathbb{C}^3 dans \mathbb{C}^3 par $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$.

Déterminer rang, noyau et image de f .

En donner une base ainsi que des équations cartésiennes de chacun d'eux.

Exo 15 Soit $E = \mathbb{C}^3$ vu comme un \mathbb{R} -EV. Déterminer une base et la dimension de E .

Exo 16 Soit $p = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $q = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix} \right)$

et $r = \text{rg}((X-1)^2, (X-2)^2, (X-3)^2, (X-4)^2)$ Pourquoi a-t-on $r \leq 3$? Calculer p , q et r .

Exo 17 Exercices très classiques : à savoir faire par coeur !! Soit E un K -ev de dimension n et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Démontrer :

- Montrer que $\ker f^p \subset \ker f^{p+1}$ et que $\text{im} f^{p+1} \subset \text{im} f^p$.

(b) Montrer que $f^2 = 0 \iff \text{im } f \subset \ker f$.

(c) Montrer que $f \circ g = 0 \iff \dots \subset \dots$.

(d) $E = \ker f \oplus \text{im } f \iff \text{im } f = \text{im } f^2 \iff \ker f = \ker f^2$.

Prendre ces équivalences si E n'est plus supposé de dimension finie.

(e) On suppose que $f \circ g = 0$. Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$.

Si $\text{rg}(f) = 2$ et $n \geq 3$, montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ \varphi = 0$ et que $\text{rg}(f) + \text{rg}(\varphi) = n$.

Exo 18 Soit E un K -ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer qu'il existe g automorphisme de E et p projecteur de E tels que $f = g \circ p$.

Exo 19 Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n . On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

(a) Soit $\vec{a} \in E$. On suppose que $\forall \ell \in E^*, \ell(\vec{a}) = 0$. Montrer que $\vec{a} = 0$.

(b) Soit H un sev de E . Montrer que H est un hyperplan ssi il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Exo 20 Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $F = \{P \in E \text{ tel que } P(a) = 0\}$. Déterminer avec 3 démonstrations (base, isomorphisme et dualité) la dimension de F .

Exo 21 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On définit respectivement ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 par $\ell_1(x, y, z) = x + 2y + 7z$, $\ell_2(x, y, z) = 3x + 5y - 8z$, $\ell_3(x, y, z) = 4x + 2y + 9z$,

Montrer que $\mathcal{C} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est une base de E^* .

Exo 22 Soit a_0, a_1, \dots, a_n des réels 2 à 2 distincts; on note f_i l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans \mathbb{R} qui à P associe $P(a_i)$, montrer que la famille des f_i est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

Exo 23 On considère les polynômes
$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_n = \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{n!} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (P_k)_{k \in [0, n]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, P_i(j) \in \mathbb{Z}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}, P(j) \in \mathbb{Z}$. Montrer que les coordonnées de P sur la base $(P_k)_{k \in [0, n]}$ sont entières.

4) Soit Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\Delta(P(X)) = P(X+1) - P(X)$. Calculer $\Delta(P_n(X))$.

Exo 24 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E qui vérifient $E = \ker f + \ker g = \text{Im } f + \text{Im } g$ et démontrer que les deux sommes sont directes.

GÉOMÉTRIE AFFINE

Exo 1 Soit E un \mathbb{R} -ev. Soient A, B, C trois points de E et soit \mathcal{D} une droite affine E .

Déterminer et tracer $\{M \in E \text{ tels que } \vec{PM} = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} \text{ avec } P \in \mathcal{D}\}$.

Exo 2 Soient A, B, C trois points non alignés de \mathbb{R}^2 , soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et soit M le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$.

Donner une C.N.S. sur (α, β, γ) pour que :

(a) $M \in (AB)$.

(b) M appartienne à la médiane de (A, B, C) issue de B .

(c) M appartienne à la parallèle à la droite (BC) menée par le milieu du bipoint (AB) .

(d) M soit "dans" le triangle (ABC) .

Exo 3 Soit E un \mathbb{R} -ev. Soit \mathcal{F} un sous-ensemble de E tel que tout barycentre de points de \mathcal{F} soit encore dans \mathcal{F} . Montrer que \mathcal{F} est un S.E.A. de E .

Exo 4 Montrer que $\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ telle que } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2f(x) = -2x - 2 \right\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dont on déterminera un point et sa direction.

Exo 5 Déterminer l'équation du plan de l'espace \mathbb{R}^3 (rapporté à son repère canonique) parallèle à (yy') et passant par les deux points $A(0, -1, 2)$, $B(-1, 2, 3)$.

Exo 6 Déterminer les droites de l'espace \mathbb{R}^3 (rapporté à son repère canonique) parallèle à la droite (D) $2x = 3y = 6z$ et rencontrant les deux droites (D_1) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ et (D_2) $\begin{cases} y = 0 \\ z = -4 \end{cases}$.

MATRICES

Exo 1 Inverser les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 51+i & 3-i \\ 2 & 1+2i \end{pmatrix}$.

Montrer que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 6 & 11 & 0 \\ 13 & 14 & 15 & 17 \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} -26 & 47 & -1 & -16 \\ 209/4 & -385/4 & 2 & 33 \\ -57/2 & 105/2 & -1 & -18 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exo 2 Soit $E = \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{R}^n$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 2 à 2 distincts. Soit $\phi : \mathbb{R}_{p-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$. On pose \mathcal{B}_0 la base canonique de \mathbb{R}^n et $\mathcal{B}_1 = (1, X, \dots, X^{p-1})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

(a) Déterminer la matrice de ϕ dans les bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_0 : $A = M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0}(\phi)$.

(b) En déduire que si $n = p = 3$, A est inversible et donner un moyen de calculer A^{-1} . Généraliser.

Exo 3 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de E . Soit $A \in E$.

(a) Soit $(i_0, j_0, k_0, l_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$. Calculer $E_{i_0, j_0} E_{k_0, l_0}$, $E_{i_0, j_0} A$ et $A E_{i_0, j_0}$.

(b) En déduire $\text{Tr}(A E_{i_0, j_0})$.

(c) Montrer que φ définie de E dans $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ par $\varphi(A) : E \rightarrow \mathbb{K}$, $X \mapsto \text{Tr}(AX)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K} - \text{EV}$.

(d) Déterminer les matrices $A \in E$ telle que : $\forall M \in E, AM = MA$.

En déduire le centre de E : $\mathcal{C}(E) = \{A \in E \text{ tel que } \forall M \in E, AM = MA\}$

(e) Montrer que tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible.

Exo 4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^k)$. En déduire que si A est nilpotente alors $I_n - A$ est inversible et déterminer $(I_n - A)^{-1}$ en fonction de A .

Exo 5 Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associées à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exo 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } AM = MA\}$.

(a) Montrer que F est un \mathbb{R} -EV et que $\dim F \geq 2$.

(b) Déterminer la dimension et une base de F .

(c) Montrer que F est une \mathbb{R} -algèbre. Est-ce un corps ?

Exo 7* Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est positive si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et on note $A \succ 0$. On dit que A est monotone si elle est inversible (donc $p = q$) et que $A^{-1} \succ 0$.

1) Donner un exemple de matrice monotone.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la monotonie de A équivaut à la condition :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX \succ 0 \implies X \succ 0.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(c_1, \dots, c_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{pmatrix} 2+c_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+c_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2+c_n \end{pmatrix}$$

Montrer que A est monotone.

GROUPE SYMÉTRIQUE-DÉTERMINANTS-SYSTÈMES

Exo 1 Donner en extension S_5 .

Exo 2 Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 14 & 4 & 5 & 6 & 8 & 2 & 9 & 7 & 3 & 13 & 10 & 11 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

Décomposer σ en produit de cycles, en déduire sa signature. Calculer σ^{123654} . Généraliser. Décomposer σ en produit de transpositions.

Exo 3 a) Écrire une fonction python **def rajout(L,p)** : qui renvoie la liste des p listes obtenues à partir de L (qui a p-1 éléments) en insérant le nombre p partout entre les éléments de L.

b) Écrire une fonction python **def groupeSymetrique(n)** : qui renvoie le groupe symétrique S_n .

c) Écrire une fonction python **def orbite(n,s,x0)** : qui renvoie l'orbite de $x_0 : \{s^i(x_0), i \in \mathbb{N}\}$ par la permutation s de S_n .

d) Écrire une fonction python **def dec(s)** : qui renvoie la décomposition en produit de cycles disjoints de la permutation s de S_n

Exo 4 Soit s un p-cycle de S_n et soit σ une permutation de S_n . Déterminer $\sigma s \sigma^{-1}$

Exo 5 Montrer que toute permutation de \mathcal{A}_n peut s'écrire comme produits de 3-cycles.

Exo 6 Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $A^2 = -I_5$.

Exo 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})$. Montrer que $\det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$ et $\det(A\bar{A}) \in \mathbb{R}^+$.

Exo 8 Calculer a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ et b) $\det(A)$ où $A = (\text{pgcd}(i,j)) \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

Exo 9 Calculer $\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & a \\ 1 & -x & 0 & b \\ 0 & 1 & -x & c \\ 0 & 0 & 1 & d-x \end{vmatrix}$.

Exo 10 Soit $\sigma \in S_n$. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n et soit f définie par $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

(a) Calculer $\det(f)$.

(b) Définir analytiquement f.

Exo 11 Calculer $\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$

Exo 12 Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche à calculer $D_n(a, b) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & & & b \\ & \ddots & & \\ & & & \\ a & & & \alpha_n \end{vmatrix}$.

(a) On suppose $a \neq b$. Montrer que $P(x) = \begin{vmatrix} \alpha_1 + x & & & b + x \\ & \ddots & & \\ & & & \\ a + x & & & \alpha_n + x \end{vmatrix}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal

à 1. En déduire $D_n(a, b)$.

(b) En déduire $D_n(a, a)$.

Exo 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $D(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta_n = \det(A_n)$.

(a) Calculer $D(a_1, \dots, a_n)$.

(b) Calculer $\Delta_n \cdot D(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$. En déduire Δ_n .

(c) Calculer A_n^{-1} (à l'aide du pivot de Gauss)

Exo 14 Déterminer l'équation du plan de \mathbb{R}^3 passant par le point $A = (1, 2, 3)$ et dirigé par les deux vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 1)$ et $\vec{v} = (-1, 3, 4)$.

Exo 15 Calculer le déterminant de la matrice carrée d'ordre n de coefficients $|i - j|$.

Exo 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de permutations de \mathcal{S}_n qui n'ont dans leur décomposition en produit de cycles de supports disjoints (non triviaux) que des 3-cycles. En déduire la limite de la probabilité de tomber dans \mathcal{S}_n sur une permutation qui n'ont dans leur décomposition en produit de cycles de supports disjoints que des 3-cycles.

Exo 17 On munit l'ensemble Ω_N des permutations de $[[1, N]]$ de l'équiprobabilité P_N . Pour $i \in [[1, N]]$, on note : $B_i = \{\omega \text{ tel que } \omega(i) = i\}$. On note X_i la variable indicatrice de l'événement B_i et $X = X_1 + \dots + X_N$. Que représente X ? Déterminer son espérance et sa variance.

(Blocs exercices 18 à 22)

Exo 18 Soit E un \mathbb{R} -EV de dimension 4 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{id}_E$. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exo 19 (a) Soit $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $B \in GL_p(\mathbb{K})$ et $C \in GL_q(\mathbb{K})$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) + \text{rg}(C)$.

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} B & B \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i. Montrer à l'aide des transvections par blocs que $\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C - B \end{pmatrix}$

ii. Calculer A^{-1} quand A est inversible.

Exo 20 Soient $(A, C) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

(a) Dire dans quels ensembles de matrices appartiennent B et 0 .

(b) A l'aide des transvections par blocs, transformer M en $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

(c) A l'aide des blocs et des matrices équivalentes, montrer que $\text{rg}M = \text{rg}A + \text{rg}C$.

Donner un contre-exemple de ce résultat lorsque A n'est plus supposée inversible.

Exo 21 On note F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec $J_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que F est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Déterminer F et en déduire sa dimension.

(c) Soit p un projecteur de rang r d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel des endomorphismes de E commutant avec p .

Exo 22 Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$. On suppose que D est inversible et que $CD = DC$.

A l'aide des transvections par blocs, montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

A votre avis le résultat est-il encore vrai si D n'est plus supposée inversible ?

ANNEAUX-CORPS

Exo 1 Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$.

Exo 2 Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un élément a de A est nilpotent s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a^n = 0$.

a) Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A .

b) Soit I un idéal de A . On appelle radical de I , l'ensemble : $\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n \geq 1 : x^n \in I\}$. Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A .

Calculer dans \mathbb{Z} , $\sqrt{5040\mathbb{Z}}$.

Exo 3 (Entiers de Gauss)

On note $A = \mathbb{Z}[i]$, le plus petit anneau inclus dans \mathbb{C} et contenant i .

(a) Déterminer A . A est-il commutatif? intègre ?

On définit pour tout $z \in A$, $N(z) = \bar{z}z$

(b) Montrer que pour tout $z \in A$, $N(z) \in \mathbb{N}$ et que pour tout z et z' de A ,

$$N(zz') = N(z)N(z').$$

(c) Déterminer A^* .

(d) Démontrer que pour tout z dans \mathbb{C} il existe q dans A tel que $|z - q| < 1$.

(e) Montrer que $\forall (z, z') \in A^2$ tel que $z' \neq 0$, $\exists (q, r) \in A^2$ tels que
$$\begin{cases} z = z'q + r \\ N(r) < N(z') \end{cases}$$

Comment pourrait-on appeler cela? A-t-on unicité du couple (q, r) ?

(f) En déduire que tout idéal de A est principal (c'est-à-dire de la forme z_0A)

(g) Déterminer les éléments associés dans A à $1 + 2i$.

(h) Déterminer les diviseurs dans A de 5.

Remarque : Une étude arithmétique plus poussée de A permettrait de démontrer des résultats tel que si p est un nombre premier de \mathbb{N} alors il est somme de 2 carrés de \mathbb{N} SSI $p \equiv 1 \pmod{4}$ (exemple : $61 = 5^2 + 6^2$)

Exo 4 Soit P un plan euclidien et soient 2 points A et B du plan tel que $AB = 1$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est constructible à la règle et au compas s'il l'on peut effectuer à partir de A et B , une figure avec une règle (non graduée) et un compas pour faire apparaître 2 points M et N tel que $\overline{MN} = x$. Soit \mathcal{C} l'ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas. On suppose que $0 \in \mathcal{C}$ (c'est la figure vide!).

- (a) Montrer que $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \sqrt{2}$ sont éléments de \mathcal{C} .
- (b) Montrer que \mathcal{C} est un sous-corps de \mathbb{R} .
- (c) Montrer que \mathcal{C} est pythagoricien c'est-à-dire que si $x \in \mathcal{C}$ et x positif alors $\sqrt{x} \in \mathcal{C}$.
- (d) Expliquer (grossièrement) pourquoi $\sqrt[3]{2} \notin \mathcal{C}$ et $\pi \notin \mathcal{C}$.

RÉDUCTION-DIAGONALISATION

POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES ET DE MATRICES

Exo 1 Soit $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^\infty\}$. On définit Δ de E dans E par $\Delta(f) = f'$ et , pour $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n dans E par $f_n(x) = e^{nx}$.

- (a) Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.
- (b) Calculer $\Delta(f_n)$. Conséquence. En déduire que (f_0, \dots, f_n) est une famille libre de E .

Exo 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 7 \\ 7 & 3 & 11 \\ 11 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. Donner "sans calculs" une valeur propre et un vecteur propre de A .

Comment exploiter cela pour le calcul du polynôme caractéristique?

Exo 3 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini canoniquement par sa matrice A . Déterminer les valeurs propres , les vecteurs propres , les espaces propres et le polynôme minimal de f . Dire pour chaque cas si l'application f est diagonalisable et si oui donner la matrice de passage ainsi que son inverse et la formule de changement de base quand A prend les valeurs suivantes :

- a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- f) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

Reprendre cette étude en voyant f non plus dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mais dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

Exo 4 Déterminer une matrice 2×2 , non triangulaire et ayant 7 et -3 comme valeurs propres.

Exo 5 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le rang de A .

Donner "sans calculs" les espaces propres de f .

En déduire que A est diagonalisable. Déterminer le polynôme minimal de A et donner "sans calculs" A^k , pour $k \in \mathbb{N}$.

Exo 6 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x + ay + bz + ct, 3y + a'z + b't, 2z + a''t, 5t)$.

Déterminer une C.N.S. sur a, b, c, a', b', a'' pour que f soit diagonalisable.

Exo 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé et à racines simples ; montrer que (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est libre. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$; montrer que B est combinaison linéaire de la famille (I_n, A, \dots, A^{n-1}) .

Exo 8 Calculer $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exo 9 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\chi_f(X) = (X+1)^2(X-1)(X+3)$ et f non diagonalisable.

- (a) Déterminer le polynôme minimal de f ainsi que la dimension des espaces propres de f .
 (b) Déterminer les SEV F de E stables par f ? Que dire de \hat{f} , l'induit de f sur F dans chacun des cas?

Exo 10 Déterminer les SEV stables par f définie canoniquement sur \mathbb{R}^n par sa matrice A :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$

Exo 11 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à sa transposée.

Exo 12 Soit E un K -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable. Montrer que $E = \ker f \oplus \text{im} f$.

Exo 13 Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer J^p ($p \in \mathbb{Z}$).
 (b) En déduire M en fonction de J .
 (c) Calculer les valeurs propres de J puis celles de M .
 (d) En déduire $\det M$.
 (e) Généraliser.

Exo 14 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telle que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quand n tend vers l'infini vers une matrice A . A-t-on A diagonalisable?

Exo 15 Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension n . Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et l'on suppose que f et g sont diagonalisables.

Montrer qu'il existe une base de E telle que les matrices de f et de g soient diagonales dans cette base.

Exo 16 Soit E un \mathbb{R} -ev et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(f - 3\text{id}_E)^2 \circ (f - 2\text{id}_E) = 0$ et $(f - 3\text{id}_E) \circ (f - 2\text{id}_E) \neq 0$.

Montrer que f n'est pas diagonalisable.

Exo 17 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

- (a) Montrer que n est pair. Donner un exemple pour $n = 2$.
 (b) Existe-il une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale?
 (c) Existe-il une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale?
 (d) En déduire $\text{Tr}(A)$ ainsi que $\chi_A(X)$

Exo 18 Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.

Exo 19 Soit E un \mathbb{C} -ev, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et soit enfin $Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $d^0 Q \geq 1$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = Q(g)$.

Exo 20 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ et $A \neq 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans les 2 cas on donnera le polynôme minimal de A .

Exo 21 Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$. On définit φ de E dans E par $\varphi(f) : x \mapsto xf'(x)$.

- (a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
- (b) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de φ .

Exo 22 L'application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à M associe $\text{tr}(M)I_n - M$ est-elle diagonalisable?

Exo 23 Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix}$.

Exo 24 Déterminer les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exo 25 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{ij} \in]0; 1[$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$.

- (a) Montrer que $|\det(A)| \leq 1$.
- (b) Montrer que 1 est valeur propre de A .
- (c) Soit b une valeur propre complexe de A . Montrer que $|b| \leq 1$ et que si $|b| = 1$, alors $b = 1$.

Exo 26 Soit $A \in \text{GL}_6(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = O$ et $\text{tr}(A) = 8$. Déterminer le polynôme caractéristique de A .

Exo 27 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

- (a) Justifier qu'il existe deux vecteurs colonnes X et Y non nuls tels que $A = XY^T$. En déduire un polynôme annulateur de A de degré 2.
- (b) Montrer que si $\text{tr}(A) \neq 0$ alors A est diagonalisable. Que dire si $\text{tr}(A) = 0$?

Exo 28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice $A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & (0) & (0) & b \\ & \ddots & & \ddots \\ (0) & a & b & (0) \\ (0) & b & a & (0) \\ & \ddots & & \ddots \\ b & (0) & (0) & a \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- (a) Justifier que A est diagonalisable.
- (b) Déterminer ses valeurs propres.
- (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que A soit inversible.

Exo 29 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}) \text{ soit diagonalisable.}$$

Exo 30 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit u l'application définie sur E par

$$u(M) = aM + bM^T$$

- (a) Vérifier que $u \in \mathcal{L}(E)$.
- (b) Montrer que u est diagonalisable.
- (c) Déterminer $\det(u)$ et $\text{tr}(u)$.

Exo 31 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} O_n & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ où O_n désigne la matrice nulle d'ordre n .

(a) Soit C la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser la matrice C .

(b) Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exo 32 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

E.V.N. - APPLICATIONS CONTINUES

Exo 1 Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit N sur E par $\forall x = (a, b) \in E$, $N(x) = \max_{t \in [0,1]} |a + bt|$.

(a) Montrer que N est une norme sur E .

(b) Calculer $N(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ et $N(3, -7)$.

(c) Dessiner, à l'aide de python, la sphère unité, $S(0, 1)$, pour cette norme.

Exo 2 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit 3 normes N_1, N_2, N_∞ sur E par $\forall P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in E$: $N_1(P) = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$, $N_2(P) = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2}$, $N_\infty(P) = \text{Max}\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\}$.

(a) Soit $P = (2X + 3)^5$. Calculer $N_1(P)$, $N_2(P)$ et $N_\infty(P)$.

(b) Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont des normes sur E .

(c) Comparer 2 à 2 ces normes : c'est-à-dire pour 2 normes N et \tilde{N} , chercher s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $N \leq \alpha \tilde{N}$ et s'il existe une constante $\beta > 0$ telle que $\tilde{N} \leq \beta N$ (faire les 6 cas).

(d) Soit (P_n) la suite de E définie par $\forall n \in \mathbb{N}$: $P_n = 3 - 7X + X^2 + \frac{1}{n}(X^2 + X^3 + \dots + X^{n^2+1})$.

Étudier la convergence de cette suite (P_n) selon la norme N_1, N_2 ou N_∞ .

(e) Soit u définie de E dans \mathbb{R} par $u(P) = a_0 + a_1 + \dots + a_k$ avec $P = a_0 + a_1X + \dots + a_kX^k$. Montrer que si E est munit de la norme N_1 alors u est continue sur E , mais que par contre si E est munit de la norme N_∞ alors u n'est pas continue sur E .

Exo 3 Soit $n \geq 1$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $\|P\|_2 = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2}$ avec $P = a_0 + \dots + a_nX^n$.

Montrer avec 2 méthodes qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall P \in E$: $\|P'\|_2 \leq c\|P\|_2$.

Exo 4 Soit $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$, muni de la norme infinie $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$. On considère A l'ensemble des fonctions polynômiales de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Déterminer uniquement à l'aide de dessins convaincants, les points adhérents et les points intérieurs de A .

Exo 5 Soit A le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 défini par $A = \{(a \cos \theta, 2a \sin \theta) \text{ avec } a \in [0, 1] \text{ et } \theta \in \mathbb{R}\}$.

a) Représenter A sur un dessin.

b) Montrer que A est compact et connexe par arc.

c) Déterminer les points adhérents, les points intérieurs de A et la frontière de A .

Exo 6 Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = y\}$ et soit f définie sur Ω par $f(x, y) = \frac{e^x - e^y}{x - y}$.

(a) Montrer que Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2

(b) Montrer que f est continue sur Ω .

(c) Étudier le prolongement par continuité de f sur \mathbb{R}^2 .

Exo 7 Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \int_0^1 \sin(e^{xt} + e^{yt}) dt$. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

Exo 8 Soit $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ et soit ϕ définie de E dans E par $\phi(f) = f'$.

(a) Montrer que ϕ n'est pas continue en 0 (application nulle).

(b) En déduire que ϕ n'est continue en aucun point de E .

Exo 9 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . Soit $A \subset E$, fermé et non vide. Soit $C \subset E$ un convexe. Soit $x \in E$.

a) Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a\|$.

b) Démontrer que \bar{C} est convexe.

c) Montrer à l'aide d'un dessin précis que $\underset{o}{C}$ est convexe.

Normes subordonnées exercices 10 à 12

Soit $u : (E, N) \longrightarrow (F, \|\cdot\|)$ **linéaire et continue** sur E , le réel, $\|u\| = \sup_{N(x) \leq 1} \{\|u(x)\|\}$ existe, on l'appelle **norme de u subordonnée** à N et $\|\cdot\|$.

$\|u\|$ est aussi notée parfois $\|u\|$.

Montrer que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|u\| N(x)$.

Exo 10 Soit $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et soit ϕ définie de E dans E par $\phi(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xf(x)$. Montrer que ϕ est continue sur E et calculer $\|\phi\|$.

Exo 11 Soit $n \geq 1$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme N_∞ (cf exercice 2). Soit $u : E \rightarrow E, P \mapsto P'$. Montrer que u est continue sur E . Calculer $\|u\|$.

Exo 12 Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ usuelle. Soit \mathcal{B}_0 sa base canonique et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, définie canoniquement par sa matrice A dans la base \mathcal{B}_0 .

Calculer $\|u\|$ lorsque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Reprendre cet exercice lorsque E est munit de la norme $\|\cdot\|_1$.

Exo 13 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) \geq 0$.

Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} ssi l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f'(x) = 0\}$ n'a aucun point intérieur.

Exo 14 Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme uniforme : $\|f\|_\infty$ et soit

$$A = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}.$$

(a) Montrer que A est fermé.

(b) Montrer que $\forall f \in A : \|f\|_\infty > 1$

(c) Calculer $d(O, A) = \inf_{f \in A} \|f - O\|_\infty$, avec O fonction nulle de E .

Exo 15 Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace pré-hilbertien réel.

(a) Montrer que pour tout $a \in E$, l'ensemble $A = \{x \in E \text{ tel que } (x|a) > 0\}$ est un ouvert de E .

(b) Montrer que pour tout sous-ensemble A de E , A^\perp est un fermé de E .

Exo 16 Soit E un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E et

$$A + B = \{x + y | (x, y) \in A \times B\}$$

1) Montrer que si A et B sont compactes il en est de même de $A + B$.

2) Montrer que si A est fermé et B compacte, $A + B$ est fermé.

3) Montrer que si A et B peuvent être fermés sans que $A + B$ le soit.

Exo 17 Soit (E, N) un evn de dimension finie. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|a\| = \sup_{N(x) \leq 1} N(a(x)) \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a^k. \text{ Montrer que la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et que sa limite est un projecteur.}$$

Exo 18 $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on considère sur E le produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ et la norme associée. On définit

de E dans \mathbb{R} l'application : $u : f \mapsto \int_0^1 t^2 f(t) dt$, montrer que u est une forme linéaire continue et déterminer sa norme subordonnée.

Exo 19 Ensemble de Cantor

Soit K l'ensemble des réels x de $[0, 1]$ qui admettent une écriture décimale (propre ou impropre) qu'avec des 0 ou des 9. Exemple : $0,91 \in K$ et $0,391 \notin K$.

- Dire si ces éléments sont dans K : 0 ; 1 ; $0,1$; $0,2$; $0,9$; $0,8$; $0,91$.
- Donner un exemple rationnel non décimale et un exemple d'irrationnel de K (on rappelle (et on admet) que x est rationnel ssi son écriture décimale est ...)
- Montrer que K est inclus dans 2 segment de longueur $1/10$.
- Montrer que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ où K_n est une réunion finie de segments que l'on déterminera.
- En déduire que K est compact.
- Déterminer les points intérieurs à K . Que peut-on dire de $[0, 1] - K$?
- Déterminer la frontière de K .
- Montrer que pour tout x de K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \neq x$ dans K tel que $|x - y| \leq \varepsilon$. En déduire les points isolés de K .
- Montrer que K n'est pas dénombrable.

Exo 20 Soit f définie et dérivable de I un intervalle non réduit à un point dans \mathbb{R} . On souhaite montrer le théorème de Darboux : $f'(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

- On considère $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$, où $\Delta = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$. Montrer que $F(\Delta)$ est un intervalle.
- En déduire le théorème.

FRACTIONS RATIONNELLES-DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES**Exo 1** Soit $F = \frac{(X-1)(X+2)^8}{(X-3)^2(X-5)^4(X-7)}$.

- Que dire de $1, -2, 3, 5, -7$?
- Que vaut $d^0(F)$?
- Écrire sans la calculer la décomposition en éléments simples de F .

Exo 2 Soit $F = \frac{X^3 - 8}{(X-2)(X+5)}$.

- Donner les pôles et les racines de F .
- Écrire sans la calculer la décomposition en éléments simples de F .

Exo 3 Soit $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible et soit c une racine simple de Q .

- Démontrer que le coefficient λ de $\frac{1}{X-c}$ dans la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{K}(X)$ vaut $\lambda = \frac{P(c)}{Q'(c)}$.
- En déduire la décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^{2n} - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.
- Calculer la décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^{2n} - 1}$ dans $\mathbb{R}(X)$ en fonctions des nombres $\cos \frac{k\pi}{n}$.

Exo 4 Décomposer en éléments simples les fractions suivantes :

- $F = \frac{X^3}{X^2 - 1}$, dans $\mathbb{C}(X)$
- $F = \frac{X+1}{X^3 - 7X + 6}$, dans $\mathbb{C}(X)$
- $F = \frac{1}{X^4 - 1}$, dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$

(d) $F = \frac{1}{X^3 + 1}$, dans $\mathbb{R}(X)$

(e) $F = \frac{X}{(X-1)(X^2 + X + 3)}$, dans $\mathbb{R}(X)$

Exo 5 Calculer la dérivée n-ième de f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Exo 6 Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

(a) $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} \right)$

(b) $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n+3}{(n+1)(n+2)(n+5)} \right)$

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Exo 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^1 |nx| dx$.

Exo 2 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $\frac{\ln x}{x}$ b) $\arctan x$ c) $(x^2 + x + 1)e^x$ d) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ e) $\frac{1}{t^4+4}$

Exo 3 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $\frac{1}{(x-i)^2}$ b) $\frac{1}{x-i}$

Exo 4 Calculer : a) $\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$ b) $\int \frac{x^4}{x^{10} + 1} dx$ c) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 4)} dx$

Exo 5 Calculer : a) $\int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^n} dx$ ($n \in \mathbb{N}$) b) $\int_1^2 \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} dx$ c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+2}}{1 + \sqrt[3]{x+2}} dx$

d) $\int_0^\pi \sin^8 x dx$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos x} dx$ f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

g) $\int_1^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$.

Exo 6 Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos x} dx$

Exo 7 (Hyper classique : Intégrales de Wallis) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

(a) Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

(b) Calculer I_n en fonction de n sans pointillés.

(c) Déterminer la limite de la suite (I_n) .

(d) Montrer que $(nI_n I_{n-1})_{n \geq 1}$ est une suite constante.

En déduire un équivalent simple de I_n (en $+\infty$).

(e) Si on admet qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $n! \sim \lambda \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Calculer λ .

Exo 8 Soit f de classe C^1 sur $[a, b]$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin n t dt$.

Exo 9 Montrer sans calculs que $\forall n \geq 1 : \int_1^n \ln t dt \leq \ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln t dt$. En déduire (sans Stirling) un équivalent de $\ln(n!)$. Retrouver ce résultat avec Stirling.

Exo 10 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt$.

(a) Calculer I_0, I_1, I_2 .

(b) Calculer I_{n+2} en fonction de I_n . En déduire I_n .

(c) Montrer que $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

(d) Déterminer la limite et un équivalent simple de I_n .

Exo 11 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{2x}^{3x} \frac{e^t - 1}{t^2} dt$.

Exo 12 On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f .

(b) Étudier les variations de f .

(c) Étudier les branches infinies de f .

(d) Étudier avec soin les points "spéciaux" du domaine de f .

On admet (facile avec Python) qu'il existe $a \approx 1,9$ tel que f est convexe sur $[0, a]$ et concave sur $[a, +\infty[$.

(e) Tracer f .

Exo 13 Soit $p > 1$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que l'on a l'inégalité : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

En déduire que $\forall a_i > 0$ et $\forall b_i > 0, \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$

2) En déduire que :

$$\forall (f, g) \in (C^1([0, 1], \mathbb{R}^{+*}))^2, \int_0^1 f(t)g(t)dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exo 14 Soit f une application continue sur $[a, b]$ à valeurs strictement positives, montrer qu'il existe une subdivision de $[a, b]$ tel que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t)dt$, calculer la limite de la suite $u_n = \frac{1}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n))$.

Exo 15 Étudier élémentairement (qu'avec le pgm de terminale) la convergence de la suite : $\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}$.

Exo 16 Soit a un réel et H la fonction réelle définie sur \mathbb{R} par :

$$H(x) = a \cos(x) + \sin(x) + 2$$

(a) Montrer que l'équation $a \cos(x) + \sin(x) = -2$ admet des solutions ssi $|a| \geq \sqrt{3}$.

(b) On prend $a = \sqrt{2}$ et on définit la fonction F par

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{H(t)}$$

i. Calculer $I = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{2} \cos(t) + \sin(t) + 2}$ en effectuant le changement de variables $u = \tan \frac{t}{2}$.

Exo 17 Pour tout $a \in]-1; 1[$, on pose $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \cos(x))}{\cos(x)} dx$.

(a) Montrer que F est dérivable sur $]-1; 1[$.

(b) Calculer $F'(a)$ en effectuant le changement de variables $u = \tan \frac{x}{2}$.

(c) Après avoir justifié qu'il existe $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $a = \cos(2\theta)$, montrer que

$$F'(\cos(2\theta)) = \frac{2\theta}{\sin(2\theta)}$$

(d) En déduire $F(a)$.

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES - FONCTIONS INTÉGRABLES

Exo 1 Étudier l'intégrabilité des fonctions :

a) $x \rightarrow \arccos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ sur $]0, 2[$.

b) $x \rightarrow \frac{\cos(x^2+1)}{\sqrt{x^4+1}}$ sur \mathbb{R} .

c) $x \rightarrow \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ sur $[1, +\infty[$.

d) $x \rightarrow \frac{1}{e^{\sin x} - \cos x}$ sur $]0, 1[$.

e) $t \rightarrow \frac{t-1}{\ln t}$ sur $]0, 1[$.

f) $t \rightarrow \frac{e^{-xt}}{t} \sin t$ sur $]0, +\infty[$.

g) $x \rightarrow \pi - 2 \arctan x$ sur $[0, +\infty[$.

h) $u \rightarrow u^6 e^{-u^2}$ sur $]0, +\infty[$.

i) $x \rightarrow \cos(x^2)(\ln x)^2$ sur $]0, 1[$.

j) $x \rightarrow \frac{e^{ix}}{x^2+ix+1}$ sur \mathbb{R} .

Exo 2 Étudier l'intégrabilité des fonctions et calculer les intégrales :

a) $\int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt$ ($a > 0$).

b) $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2+t+1} dt$.

c) $\int_{[1, +\infty[} \frac{\arctan t}{t^2} dt$.

Exo 3 Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que I_n existe et donner une relation entre I_{n+1} et I_n (on écrira l'égalité $1 = t^2 + 1 - t^2$).

b) En déduire l'expression (sans pointillés) de I_n en fonction de n .

Exo 4 Étudier selon α l'intégrabilité et calculer quand c'est possible l'intégrale : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$.

Exo 5 Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$

Montrer que f est C^∞ sur \mathbb{R} et qu'elle vérifie l'équation différentielle : $y' = y(y-x)$.

Exo 6 Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exo 7 (**Intégrale de Laplace**) Soit la transformation $f \mapsto F$ avec F définie par $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$.

Calculer F et son domaine lorsque f est définie par $f(t) = e^{at}$.

Donner 2 autres "types" de fonctions f pour lesquels F admet un domaine non vide.

Exo 8 Soit f_n définie par $f_n(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f_n(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$.

(a) Tracer f_1, f_2 sur $]0, 1[$.

Soit f définie sur $]0, 1[$ par $f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$.

(b) Montrer que f est intégrable et calculer $\int_{]0, 1[} f$. (Rappel : $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n) = \gamma$).

Exo 9 Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t^2} dt$.

Exo 10 Déterminer un équivalent de (u_n) définie par $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t} dt$.

Exo 11 Déterminer un équivalent de $u_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n dx$.

Exo 12 Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t}{n})^n e^{-2t} dt$,

puis (v_n) définie par $v_n = \int_0^n (1 + \frac{t}{n})^n e^{-2t} dt$.

Exo 13 Convergence de $\int_0^{+\infty} (x+1 - \sqrt{x^2+2x+2}) dx$.

Exo 14 Soit $f_n : t \mapsto \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(b) Soit $I_n = \int_{\mathbb{R}^+} f_n$. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n . En déduire I_n .

Exo 15 Soit $f_n : x \mapsto (1 + \frac{x^2}{n})^{-n}$ pour $n \geq 1$.

(a) Montrer que f_n est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x)$.

(c) Retrouver la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exo 16 Déterminer un équivalent simple de $\int_x^{+\infty} \frac{t^2+1}{t+3} e^{-t^2} dt$ lorsque x tend vers l'infini.

Exo 17 Calculer la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Exo 18 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x^2+n^2)^{3/2}}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$ et montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$.

Exo 19 On pose, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Calculer $\int_0^n t^{x-1} (1 - \frac{t}{n})^n dt$ sous forme factorisée. En déduire que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x n!} x(x+1) \cdots (x+n)$.

Exo 20 Intégrabilité et calcul de l'intégrale de $f : x \mapsto \frac{1}{2 + \lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ sur $]0, 1]$.

Exo 21 $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$, montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}^+ et calculer son intégrale sur \mathbb{R}^+ .

Exo 22 Nature de $\int_1^{+\infty} \left[\left(\frac{\ln x}{\ln(x+1)} \right)^{\sqrt[3]{x}} - 1 \right] dx$

INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Exo 1 Soit J la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$\forall x \in \mathbb{R}, J(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$. Montrer que J est C^∞ sur \mathbb{R} et donner la dérivée n -ième sous forme d'intégrale.

En déduire que J est solution de l'équation différentielle $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$.

Exo 2 Soit $H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$

(a) Montrer que H est définie sur \mathbb{R} .

(b) Montrer que H est continue sur \mathbb{R} .

(c) Montrer que H est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donner sa dérivée sous forme d'intégrale.

(d) Montrer que H est solution de l'équation différentielle : (E) : $2y' + xy = 0$

(e) En déduire une expression simple de $H(x)$.

Exo 3 Soit F définie par $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda t} dt$.

(a) Montrer que F est définie sur \mathbb{R}^+ .

(b) Montrer que F est C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

(c) En déduire $F(\lambda)$ sur $]0, +\infty[$.

(d) On admet que F est continue en 0. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exo 4 Soit F définie par $F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt$

(a) Déterminer le domaine de définition D de F . Montrer que F est paire.

(b) Montrer que F est C^1 sur $] -1, 1[$ et calculer sa dérivée (à l'aide de la règle de Bioche).

(c) En déduire $F(x)$ pour x dans $] -1, 1[$.

(d) Calculer $F\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $F(x)$. En déduire $F(x)$ pour tout $x \in D$.

Exo 5 Soit f une fonction C^∞ sur $[a, b]$ et soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$.

a) Montrer que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = (x - x_0)^m h(x)$ avec $h(x) = \int_0^1 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(tx_0 + (1-t)x) dt$.

b) Montrer que h est C^∞ sur $[a, b]$ et que $\forall k \in \mathbb{N} : h^{(k)}(x_0) = \frac{k!}{(m+k)!} f^{(m+k)}(x_0)$.

c) **Application** : Montrer que g définie par $g(0) = \frac{1}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^* : g(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ est C^∞ sur \mathbb{R} .

Exo 6 Soit f définie par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x t dt$

(a) Déterminer le domaine de définition D de f .

(b) Montrer que f est C^∞ sur D et calculer sa dérivée n -ième.

(c) On pose lorsque c'est possible : $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\varphi(x+1) = \varphi(x)$.

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ est décroissante.

(d) Montrer que φ est constante, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

Exo 7 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_0^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$.

Exo 8 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$. (On cherchera à faire disparaître le n en dehors de l'intégrale)

Exo 9 Étudier la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x \tan \theta) d\theta$.

Montrer que f est de classe C^2 sur un domaine que l'on définira, en déduire variations, convexité étude aux bornes et le graphe et f .

Exo 10 Soit $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+1)} dx$.

1) Déterminer le domaine de définition D de I . Montrer que I est C^1 sur D .

2) On admet que I est solution de l'équation différentielle $y'' - y = \frac{\pi}{2}$ sur $D \cap \mathbb{R}_+^*$. En déduire la valeur de $I(\alpha)$ pour tout $\alpha \in D$.

Exo 11 Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) \neq 0$. Donner un équivalent de $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+tx} dx$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Exo 12 Soit f et φ dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ intégrables sur \mathbb{R} . On suppose φ nulle à l'extérieur de $[0, 1]$.

On pose $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\varphi(x-u) du$. Montrer que F est continue et intégrable sur \mathbb{R} et calculer son intégrale sur \mathbb{R} . On admettra le théorème de Fubini pour les intégrales :

Soient a, b, α et β des réels, si f est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$,

alors on a la **Formule de Fubini** : $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t) dx \right) dt$.

Exo 13 On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$ en fonction de $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$.
- (b) Expliciter I_n en fonction de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- (c) En déduire la valeur de $H(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$.
- (d) Montrer que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur son domaine.

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS - C.S.-C.U.-C.A.-C.N.

Exo 1 Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-nx} \sin x$.

- (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur \mathbb{R}^+ .
- (b) Montrer que pour tout x réel : $|\sin x| \leq |x|$. En déduire que (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

Exo 2 Soit $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (\cos x)^n \sin x$.

- (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- (b) Calculer $\|f_n - g\|_{\infty, [0, \frac{\pi}{2}]}$ où g est la limite simple de (f_n) .
En déduire l'étude de la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exo 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et soit $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto n^\alpha (\cos x)^n \sin x$.

- (a) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- (b) Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt$. En déduire la limite de la suite (I_n) .
Quel lien y a-t-il avec la convergence uniforme ?

Exo 4 Soit la suite (f_n) définie par $f_n(x) = f(nx)$ avec f définie et continue dérivable de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ avec $f(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, on suppose de plus que f' ne s'annule qu'une seule fois.

- (a) Tracer f , f_1 , f_2 et f_{10} .
- (b) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0, +\infty[$.
- (c) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, +\infty[$.
- (d) Soit $a > 0$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exo 5 A quelle condition $P - Q$ est borné sur \mathbb{R} lorsque P et Q sont deux polynômes ?

Soit (f_n) une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f . Que dire de f et des f_n ?

Exo 6 Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$.

Exo 7 Soit pour tout entier n la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^+ par $f_n(x) = \frac{n^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-nx}$.

- 1) Déterminer le domaine D de convergence simple de cette suite de fonctions.
- 2) Y a-t-il convergence uniforme sur D ?
- 3) Sinon, quels sont les ensembles sur lesquels il y a convergence uniforme ?

Exo 8 Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[-1, 1]$ telle que $\forall n \geq 2 : \int_{-1}^1 t^n f(t) dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exo 9 Montrer avec soin que $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t \cos(nt^2) e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t \cos(nt^2) e^{-nt} dt$.

Exo 10 On considère $(\sum u_n)$ avec u_n définie par $u_n(x) = \frac{(-1)^n (x^2 + 1)}{nx^2 + n + 1}$.

- (a) Montrer que $(\sum u_n)$ converge simplement (CS) sur \mathbb{R} .

(b) Montrer que $(\sum u_n)$ est non absolument convergente (CA) sur \mathbb{R} .

(c) Montrer que $(\sum u_n)$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

Exo 11 Étudier convergence simple, convergence normale puis convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ de la série de fonctions :

$$\left(\sum_{n \geq 2} \frac{x e^{-nx}}{\ln n}\right).$$

Exo 12 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} vérifiant $f(1) = 0$. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions de terme général $f_n(x) = x^n f(x)$.

A quelle condition nécessaire et suffisante, la série des f_n converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Exo 13 Ensemble de définition D de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n(1+x^n)}$.

Calculer $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ et étudier la continuité de f sur D .

Exo 14 Soit F définie par $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que F est C^∞ sur $]0, +\infty[$.

(c) Étudier la dérivabilité de F en 0.

(d) Tracer le graphe de F .

Exo 15 Montrer que S définie par $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt{n}} e^{-n}$ est C^1 sur $[0, +\infty[$. Sur quel ensemble f est-elle C^2 ?, C^∞ ?

Exo 16 Soit la série de fonctions $(\sum u_n)_{n \geq 1}$ avec $u_n(t) = \frac{1}{n + n^2 t^2}$

(a) Étudier la convergence simple de $(\sum u_n)$.

On définit sur $D = \mathbb{R}^*$: $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$.

(b) Montrer que g est C^1 sur D et calculer (sous forme de série) $g'(t)$.

(c) Déterminer la limite de g en 0 et un équivalent simple de $g(t)$ en 0.

(d) Déterminer la limite de g et un équivalent simple de $g(t)$ en $+\infty$.

(e) Tracer le graphe de g .

Exo 17 Soit f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + nx}$

(a) Montrer en faisant plusieurs cas que f est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_*^-$.

(b) Calculer $f(p)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_*^- : f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}$.

(d) En déduire un équivalent de $f(x)$ en -1 .

(e) Tracer f .

Exo 18 Soit $P(x)$ définie s'il existe par $P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right)$ et noté $P(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

Montrer que P est définie et continue sur \mathbb{R} . Étudier la dérivabilité de P .

Exo 19 Soit F définie par $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de F .

(b) Montrer que $\forall x \in D$ et $x \neq 0 : F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.

(c) Montrer que F est de classe C^1 et étudier le comportement de F en 1.

Exo 20 En écrivant x^{-x} comme une somme infinie, montrer que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$. En déduire à l'aide de Python sa valeur approchée à 10^{-10} près.

Exo 21* Soit F définie par $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3}$.

- Montrer que F est définie et strictement croissante sur \mathbb{R}
 - Montrer que F est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
 - Déterminer les limites à gauche et à droite de F en $a = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, $q \geq 1$.
 - Tracer F .
-

Exo 22 Soit S la fonction définie quand c'est possible par la formule : $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^n}{1-t^n}$.

- Déterminer le domaine de définition de S .
 - Trouver un équivalent de $S(t)$ quand t tend vers 1 (on écrira $S(t)$ avec une série double).
-

Exo 23 1] Soit une suite (f_n) d'applications de $[a, b]$ (un segment de \mathbb{R}) dans \mathbb{R} toutes k -lipschitziennes. Montrer que si (f_n) converge simplement vers f sur $[a, b]$ alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

2] Soit une suite (f_n) d'applications de $]a, b[$ (un segment de \mathbb{R}) dans \mathbb{R} toutes convexes sur $]a, b[$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers f sur $]a, b[$ alors (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment compris dans $]a, b[$.

Exo 24 La transformée de Laplace d'une variable aléatoire réelle et positive X est la fonction L_X définie sur \mathbb{R}^+ par $L_X(t) = \mathbf{E}(e^{-tX})$.

- Expliquer pourquoi cette définition a un sens, déterminer la transformée de Laplace d'une variable de Bernoulli de paramètre p .
- Étudier la convexité et la monotonie de L_X . Montrer que L_X est continue sur \mathbb{R}^+ . Déterminer la limite de L_X en $+\infty$.
- Que dire de L_{X+Y} lorsque X et Y sont deux v.a. indépendantes et positives.

SÉRIES ENTIÈRES

Exo 1 Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière. On suppose que la suite (a_n) converge vers 3. Calculer le rayon de convergence de $(\sum a_n z^n)$.

Exo 2 Calculer le rayon de convergence des séries entières :

- a) $(\sum \frac{2^n}{5^n + 4^n} z^n)$ b) $(\sum \ln(n) z^n)$ c) $(\sum n! z^{n^2})$ d) $(\sum a_n z^n)$ où a_n est la des diviseurs de n
-

Exo 3 Calculer le rayon de convergence et l'étude au bord (dans \mathbb{R}) des séries entières :

- a) $(\sum \frac{n^n}{n!} x^n)$ b) $(\sum \frac{(2n)!}{n^n n!} x^{2n})$ c) $(\sum ([\lambda^n] x^n) (\lambda \in \mathbb{R}))$ d) $(\sum \frac{(2n)! n^{2n}}{n^n n! (3n)!} x^n)$
-

Exo 4 Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières :

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$. c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^3 + 3n^2 + 4n - 5)x^n$. d) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\theta)x^n$.
- e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} x^n$. f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 4n^2 - 6n + 7}{(n+1)!} x^n$.
-

Exo 5 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)(n-2)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(3n)!} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} \quad (\text{discuter selon } x),$$

Exo 6 Calculer (à l'aide d'une S.E.) une valeur approchée de $I = \int_0^1 e^{-t^2} dt$ à 10^{-2} près.

Exo 7 Déterminer le développement en série entière (DSE) des fonctions suivantes (ne pas oublier de calculer le rayon de convergence) :

- a) $\frac{x+1}{(x^2+1)(x-3)^2}$ b) $(x^2+3x+1)e^x$ c) $\sin^2 x$ d) $\arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$
e) $(x^2+1)\ln(1+3x)$ f) $\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$
-

Exo 8 Déterminer par la méthode de l'équation différentielle le développement en série entière (ne pas oublier de calculer le rayon de convergence) de la fonction f définie par : $f(x) = (\arcsin x)^2$.

Exo 9 Soit (E) : $4xy'' + 2y' - y = 0$. Déterminer les solutions développables en séries entières. Écrire ces solutions à l'aide des fonctions usuelles. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* , sur \mathbb{R}_-^* puis sur \mathbb{R} .

Exo 10 (a) Montrer que f définie sur \mathbb{R} par $f(0) = 1$ et $\forall x \neq 0 : f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et calculer $f^{(10)}(0)$.
(b) Montrer que g définie sur \mathbb{R}^+ par $\forall x \geq 0 : g(x) = \cos \sqrt{x}$, est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^+ .

Exo 11 Soit F définie par $F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{itx}}{\cosh t} dt$, montrer que F est développable en série entière.

Exo 12 (a) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction (de t) : $t \mapsto \ln(1 + xe^{-t})$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(b) On définit alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+ : F(x) = \int_0^{+\infty} \ln(1 + xe^{-t}) dt$.

Montrer que F est développable en S.E. en 0 et déterminer ce développement.

Exo 13 $f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1+x \sin^2 t) dt$, domaine de définition de f , continuité sur ce domaine ? Déterminer un développement en série entière de f sur $] -1, 1[$.

Exo 14 Soit (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ et soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

On note R le rayon de convergence de la série $(\sum a_n x^n)$.

(a) Calculer a_n pour $n \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$

(b) Montrer sans calculer a_n que $R > 0$.

(c) En écrivant $a_n x^n = x a_{n-1} x^{n-1} + x^2 a_{n-2} x^{n-2}$, calculer $f(x)$.

(d) En déduire a_n en fonction de n .

(e) Calculer R .

Exo 15 Déterminer le développement en série entière (DSE) de f définie par $f(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

Exo 16 On considère l'équation différentielle : $xy'' + y' + y = 0$.

(a) Déterminer une solution développable en série entière, h au voisinage de 0 telle que $h(0) = 1$.

(b) Montrer que h ne s'annule qu'une seule fois sur $]0, 2[$.

Exo 17 I) Ensemble de définition de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$.

Calculer $f(-1)$ et $\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x} dx$.

Donner un équivalent de f en 1.

Exo 18 Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} : |e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1$.

Exo 19 $\forall n \geq 1, \forall z \in \mathbb{C} : |e^z - (1 + \frac{z}{n})^n| \leq e^{|z|} - (1 + |\frac{z}{n}|)^n$.

Exo 20 Déterminer le nombre de façons de payer 100 Euros avec des pièces de 1, 2, 3 Euros. Écrire une fonction python pour obtenir ce nombre.

(**Indication** : développer en série entière $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$)

Exo 21 Soit J la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, J(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$.

Montrer que J est développable en série entière.

Exo 22 Soit $f \in C^\infty]a, b[, \mathbb{R}$. On suppose que f est bornée sur $]a, b[$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]a, b[, f^{(n)}(x) \geq 0$

1) Montrer que $\forall x \in]a, b[, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) \leq 2 \frac{\|f\|_\infty n!}{\delta^n}$.

2) En déduire que f est développable en série entière au voisinage de chacun des points x_0 de $]a, b[$. Que peut-on dire du rayon de convergence ?

3) Application : Montrer que \tan est développable en SE en 0. Que vaut son rayon de convergence ?

Exo 23 Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x-x^2}$ de 2 manières différentes.

Exo 24 Soit f une fonction égale à une série entière sur $] -R, R[$ ($R > 0$). Montrer que f est développable en série entière en tout point $x_0 \in] -R, R[$.

Exo 25 Peut-on piper 2 dés de telle sorte que la variable aléatoire "somme des 2 dés" soit uniformément réparti sur l'intervalle $[[2, 12]]$, (*indication : on utilisera les fonctions génératrices*).

Exo 26 On jette à répétition un dé à 6 faces jusqu'à ce que le 6 sorte et on somme toutes les valeurs sorties strictement avant cet évènement. Pour modéliser cela, on se donne une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ indépendantes et uniformes sur $[[1, 6]]$ et on pose

$$N = \inf\{ i \geq 1 : X_i = 6 \}, S = \sum_{i=1}^{N-1} X_i \text{ et } p = \frac{1}{6}.$$

Les calculs se feront d'abord en fonction de p .

1. Donner la loi de N , montrer que N est fini presque sûrement.

2. Calculer la fonction génératrice G_N de N . Retrouver le fait que N est fini presque sûrement. En déduire l'espérance et la variance de N .

3. (a) Calculer la loi de $(X_i)_{1 \leq i \leq k-1}$ conditionnellement à $N = k$, pour $k \geq 1$.

(b) Montrer sans calculs que , pour $k \geq 1$ et $0 \leq t \leq 1$,

$$\mathbf{E}(t^{X_1 + \dots + X_{k-1}} / N = k) = \left(\frac{t + t^2 + \dots + t^5}{5} \right)^{k-1}.$$

4. Calculer la fonction génératrice G_S de S .

5. Calculer l'espérance et la variance de S .

Exo 27 On jette indéfiniment une pièce de monnaie, la probabilité d'apparition d'un "Face" étant p .

On note T_n le temps d'attente du n -ième "Face".

(a) Déterminer les lois de T_1, T_2 et T_n .

(b) Déterminer la loi de $T_{n+1} - T_n$ conditionnée à $(T_n = i)$. En déduire la loi de $T_{n+1} - T_n$. Déterminer l'espérance de T_n .

(c) Montrer que $T_{n+1} - T_n$ et T_n sont indépendantes. Déterminer la variance de T_n et sa fonction génératrice.

(d) On note T le temps d'attente pour avoir au moins un "Face" et un "Pile", V le nombre de "Face" et D le nombre de "Pile" à cet instant.

i. Quelle est la loi de T et son espérance ?

ii. Quelle est la loi de (V, T) . En déduire la loi de V et son espérance.

Exo 28 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_k par

$$f_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{2n-k}{n} \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

(a) Trouver le rayon de convergence de f_k .

(b) Montrer que $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(c) Trouver une relation simple entre f_0 et f_1 , puis en déduire f_1 .

(d) Établir la relation

$$f_{k+1}(x) = -\frac{x}{4}f_{k-1}(x) + f_k(x)$$

(e) En déduire f_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exo 29 On pose $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(2n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(2n)$.

(b) Montrer que la série de terme général $(-1)^{n+1} \frac{S_n}{2n+1}$ est convergente. On note S sa somme.

(c) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} S_n x^{2n}$. Montrer que f est définie sur $] -1; 1[$ et que

$$\forall x \in] -1; 1[, (1+x^2)f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2} + x \arctan x$$

(d) Calculer S .

Exo 30 Le nombre d'accidents N durant une semaine dans une usine est une variable aléatoire d'espérance m et de variance σ^2 .

Pour tout accident, le nombre d'ouvriers X blessés lors de cette accident est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance τ^2 . Tous ces événements sont supposés indépendants.

1. Donner la fonction génératrice de nombre Y d'ouvriers blessés par semaine, en l'exprimant à l'aide des fonctions génératrices de N et X .

2. En déduire la valeur des espérance et variance de Y en fonction de m , σ^2 , μ et τ^2 .

Exo 31 Deux joueurs lancent deux dés équilibrés.

On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales.

On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et Y_1 et Y_2 celles associées au deuxième joueur.

a) Quel événement A doit on calculer ?

b) Montrer que $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14)$

c) Déterminer la fonction génératrice de la variable à valeurs naturelles $Z = 14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2$.

d) En déduire la valeur de $\mathbf{P}(A)$.

Exo 32 X, Y et Z désignent trois variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ et suivant une même loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On considère la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} X & X & X \\ Y & Y & Y \\ Z & Z & Z \end{pmatrix}$$

(a) Démontrer à l'aide des fonctions génératrices que $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$. Quelle est la loi, l'espérance et la variance de $S = X + Y + Z$?

(b) Quelle est la probabilité pour que M soit la matrice d'un projecteur ?

(c) Soit T la variable aléatoire désignant le nombre de valeurs propres de la matrice M . Vérifier que $T(\Omega) = \{1, 2\}$. Donner la loi, l'espérance et la variance de T .

(d) Quelle est la probabilité pour que M soit diagonalisable ?

Exo 1 On considère \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique.

Orthonormaliser (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (4, 5, 6)$, $x_3 = (7, 8, 0)$.

Exo 2 Soit $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$. On munit E de la forme $\varphi : (f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

(a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

(b) Montrer qu'il existe, pour ce produit scalaire, une famille orthogonale de polynômes $(P_0, P_1, \dots, P_n, \dots)$ de E telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d^0(P_n) = n$ et P_n unitaire (on confond polynôme et fonction polynomiale). Étudier l'unicité de ces polynômes.

(c) Calculer P_0 , P_1 , P_2 et P_3 .

(d) En déduire une suite orthonormale de E .

Exo 3 On considère \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire canonique. Soit F le SEV de \mathbb{R}^4 défini par les équations cartésiennes : $F \begin{cases} y + z + t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

(a) Quelle est la dimension de F ? Déterminer F^\perp .

(b) Soit $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$. Calculer $d(\vec{u}, F)$.

Exo 4 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$.

(a) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E .

(b) Montrer que la base canonique est OTN pour ce produit scalaire.

(c) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, calculer $\|A\|$.

(d) Soit $(A, B) \in E^2$, montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(e) Soit $A \in E$, symétrique. Montrer que $(\text{Tr}A)^2 \leq n\text{Tr}(A^2)$.

Exo 5 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ sur \mathbb{R} , munit du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Soit $F = \{f \in E \text{ polynômes sur } [0, 1]\}$. Calculer F^\perp et $d(f, F)$ pour toute $f \in E$.

Exo 6 Soit $A \in \mathcal{O}(n)$ et soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A . On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

(a) Exprimer $a_{i,j}$ comme un produit scalaire en fonction de e_i , e_j et f .

(b) En déduire que $\left| \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$.

Exo 7 On considère \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique et orienté. Soit $(\vec{a}, \vec{b}) \in (\mathbb{R}^3)^2$ tel que $\vec{a} \neq 0$. Résoudre et discuter l'équation $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$.

Exo 8 Soit f définie de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 (muni de son produit scalaire canonique) par

$$f(x, y, z) = (2x - y + 3z, x + y + 6z, 3x - 2y + 3z).$$

Déterminer f^* , $\ker f$, $\ker f^*$, $\text{Im} f$ et $\text{Im} f^*$.

Exo 9 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. b) Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t} dt$.

Exo 10 Soit E un **PHR** de dimension quelconque et soit p un projecteur de E .

Alors on a :

p est un projecteur orthogonal **si et seulement si** $\boxed{\forall x \in E : \|p(x)\| \leq \|x\|}$.

Exo 11 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T = -A$.

Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible. Montrer que si n est pair alors $\det A \geq 0$.

Exo 12 On considère \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique et orienté. Déterminer les éléments géométriques de f définie canoniquement par sa matrice A dans la base canonique :

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Exo 13 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(A) = p$ et soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'il existe une unique matrice $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ qui minimise l'ensemble des réels :

$$\left\{ \|AX - B\|_2, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \right\}. \text{ (Problème des moindres carrés)}$$

(b) Montrer que $A^T A X_0 = A^T B$.

(c) En déduire la "moins mauvaise" solution du système : $\mathcal{S} \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Exo 14 Former la matrice, dans la base canonique orientée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathbb{R}^3 , de la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendré par le vecteur $\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} + \vec{k}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exo 15 Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ sur le plan d'équation : $x - y + 2z = 0$

Exo 16 Soit E un espace préhilbertien réel; montrer que toute forme linéaire de la forme $f(x) = \langle x | a \rangle$ est continue sur E .

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

La forme ℓ définie par $\ell(P) = P(0)$ est-elle continue?

Existe-t-il Q tel que $\ell(P) = \langle P | Q \rangle$ pour tout P ?

Si H est le noyau de ℓ , déterminer H^\perp .

Mêmes questions si $E = \mathbb{R}_2[X]$

Exo 17 Soit E un \mathbb{R} -EV euclidien orienté de dimension n et soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

(a) Soit \mathcal{B} une base **OTND**. Montrer que le réel $\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ ne dépend pas de \mathcal{B} , OTND.

On pose alors $\Delta(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

(b) Montrer que $|\Delta(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)| \leq \|\vec{x}_1\| \cdots \|\vec{x}_n\|$. Étudier les cas d'égalité.

Exo 18 Soit f canoniquement associé à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique.

Déterminer f^* ainsi que les éléments propres de f et de f^* .

Exo 19 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien.

Prouver l'égalité $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker } u$. Que peut-on en déduire pour le rang de $A^T A$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exo 20 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien telle que $u^2 = 0$.

a) Prouver l'égalité $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im } u^*$.

b) Prouver l'égalité $\text{Im}(u + u^*) = \text{Im } u + \text{Im } u^*$.

Exo 21 Soit $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $f \in C^0(E, \mathbb{R})$ telle que $\forall (u, v) \in E^2, u \perp v \implies f(u+v) = f(u) + f(v)$.

1) On suppose que f est paire. Montrer l'existence de $g \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\forall u \in E, f(u) = g(\|u\|^2)$.

Montrer que g est linéaire. En déduire la forme de f .

2) On suppose que f est impaire. On admet que f est linéaire. En déduire la forme de f .

3) Donner l'expression de f dans le cas général.

Exo 22 Soit A une matrice carrée d'ordre n , montrer que A est symétrique définie positive SSI il existe B inversible telle que $A = B^T B$.

Exo 23 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})^{++}$ tel que $A = OS$.
En déduire que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exo 24 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que : $(\text{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\text{tr}(A^2)\text{tr}(B^2)$.

Exo 25 * Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$. Montrer que : $(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$

Exo 26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Discuter l'existence et l'unicité de $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exo 27 * Soit $H = \ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} , \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < +\infty \right\}$ muni de son produit scalaire canonique.

Déterminer la "forme" des formes linéaires et continues sur H .

Exo 28 Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T \times B)$$

- (a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est l'unique produit scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel la base canonique est orthonormée.
- (b) Prouver que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ respectivement des matrices symétriques et anti-symétriques sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- (c) Étant donné $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$$

GÉOMÉTRIE AFFINE EUCLIDIENNE

Exo 1 Exo nouille : On coupe un spaghetti en 3. Les 3 morceaux peuvent-ils former un triangle ?

Exo 2 Comment couper, avec une règle (non graduée) et un compas, un segment donné en 5 segments égaux.

Exo 3 Montrer que dans un triangle, le centre de gravité G , l'orthocentre H , le centre du cercle circonscrit I sont alignés. La droite engendrée par ces 3 points s'appelle la droite d'Euler. Le centre du cercle inscrit Ω est-il toujours sur cette droite ?

Exo 4 Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. On note

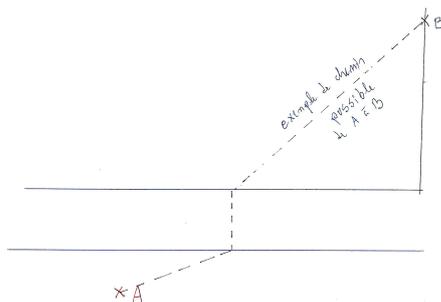
$$\hat{A} = |(\widehat{AB}, \widehat{AC})|, \hat{B} = |(\widehat{BC}, \widehat{BA})|, \hat{C} = |(\widehat{CA}, \widehat{CB})|.$$

On note R le rayon du cercle circonscrit et S la surface du triangle ABC .

- (a) Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.
- (b) Montrer que $\sin \hat{A} = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. En déduire que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
- (c) Montrer que $R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}} = \frac{b}{2 \sin \hat{B}} = \frac{c}{2 \sin \hat{C}}$.

Exo 5 Tracer à la règle et au compas le cercle inscrit d'un triangle.

Exo 6 Une personne doit se rendre de A vers B . Sur la terre il marche droit et dans l'eau il nage perpendiculairement aux rives. Quel est le plus court chemin ?



Exo 7 Soient ABC un triangle isocèle en A, D le milieu de BC, E le pied de la perpendiculaire menée de D à (AC), F le milieu de DE. Montrer que (AF) \perp (BE).

Pour les exercices 8 à 12, E désigne un espace vectoriel euclidien, de dimension 3 rapporté à un repère OTN $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Sauf indication contraire, les coordonnées des points, des vecteurs et les équations de droites et de plans sont donnés dans le repère \mathcal{R} .

Exo 8 Calculer l'aire du triangle de \mathbb{R}^3 défini par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exo 9 Calculer la distance de $A(1, 3, 2)$ au plan P représenté paramétriquement par :
$$\begin{cases} x = 7 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 - \lambda + 2\mu \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases}$$

Exo 10 Former l'équation cartésienne du plan perpendiculaire au plan (P) : $x + y + z + 4 = 0$ et contenant la droite $\mathcal{D} \begin{cases} 2x - y + z + 4 = 0 \\ -z + 1 = 0 \end{cases}$

Exo 11 Déterminer la perpendiculaire commune (c'est la droite qui coupe perpendiculairement deux droites non coplanaires (on admet l'existence et l'unicité d'une telle droite) de $\mathcal{D} \begin{cases} x + y + z + 4 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ et de $\mathcal{D}' \begin{cases} x - y = -1 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Exo 12 Déterminer le centre et le rayon du cercle suivant :
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 10z = 0 \end{cases}$$

Exo 13 Soient C_1 et C_2 , 2 cercles de E non coplanaires et admettant 2 points communs et distincts : A et B. Montrer qu'il existe une unique sphère \mathcal{S} telle que $C_1 \subset \mathcal{S}$ et $C_2 \subset \mathcal{S}$.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES-SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Exo 1 Résoudre l'équation différentielle : $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$.

Exo 2 Soit (E) l'équation différentielle : $x(1 - x)y' + y = x$.

(E) admet-elle des solutions sur $] -\infty, 1[$, $]0, +\infty[$, \mathbb{R} ?

Exo 3 Soit $\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } f \text{ soit dérivable et solution de } xy' = 2y\}$.

Déterminer $\dim \mathcal{S}$ et une base de \mathcal{S} .

Exo 4 Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) + f(x)) = 0$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exo 5 Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^{2x}(x + 1)$.

Exo 6 Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = (x^2 + 3)e^x + \sin x$.

Exo 7 Résoudre, en cherchant des solutions DSE, l'équation différentielle : $xy'' - y' + 4x^3y = 0$.

Étudier les problèmes de raccord.

Exo 8 Soit (E) : $x^2y'' - 2xy' + 2y = x + 1$

(a) Déterminer les solutions polynômiales de l'équation homogène. En déduire un système fondamental.

(b) Résoudre l'équation (E).

Exo 9 Déterminer les fonctions dérivables f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = f(2 - x)$

Exo 10 Soit $a : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.

Soit x une fonction, solution de l'équation différentielle : $x'(t) = a(t)x(t)$

(a) Montrer que x est bornée.

(b) Montrer que x admet une limite quand t tend vers $+\infty$.

Exo 11 Résoudre le système différentiel :
$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -2x + 2y + 2z \\ z' = 6x - 3y + 5z \end{cases}$$

Exo 12 Résoudre le système différentiel :
$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^{-t} \\ y' = -x + 5y + t - 1 \end{cases}$$

Exo 13 Résoudre le système différentiel :
$$\begin{cases} x' = x - 2y + e^{3t} \\ y' = 2x + 5y + t + 1 \end{cases}$$

Exo 14 Résoudre par au moins 2 méthodes différentes le système différentiel :
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = 2x - 5y + 4z \end{cases}$$

Exo 15 (très classique à l'écrit) Soit p une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\forall x \in [0, 1] : p(x) < 0$.
Soit (E) l'équation différentielle sur $[0, 1] : y'' + p(x)y = 0$.

(a) Que dire d'une fonction g solution de (E) pour laquelle qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = g'(c) = 0$? Que vaut le wronskien de 2 solutions de (E)?

Soit f une solution non nulle de (E).

(b) On suppose que f admet une infinité de racines dans $[0, 1]$.

- i. Construire une suite convergente (α_n) de $[0, 1]$ telle que les α_n sont 2 à 2 distincts et $\forall n \in \mathbb{N} f(\alpha_n) = 0$.
- ii. Montrer que f est nulle. Conclure.

(c) Montrer que f ne peut admettre plus d'une racine dans $[0, 1]$.

(d) En choisissant une fonction p simple, donner un exemple de solution sans racine et un exemple de solution avec 1 racine.

Exo 16 Intégrer l'équation différentielle : $x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$ On pourra effectuer le changement de fonction inconnue $z = \frac{y}{x}$. On étudiera notamment les solutions sur \mathbb{R} .

Exo 17 Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$4tx'' + 2x' - x = 0$, donner l'expression analytique de ces solutions et résoudre complètement l'équation différentielle.

Exo 18 Résoudre le système différentiel :
$$\mathcal{S} \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + z \\ z' = y + z \end{cases}$$

Exo 19 Trouver les solutions sur \mathbb{R} de $y'' + y = |x|$.

Exo 20 Résoudre l'équation différentielle vectorielle $X''(t) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X(t)$.

Exo 21 Déterminer les solutions polynômiales de $(x^2 - 3)y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = 0$, en déduire toutes les solutions de cette équation différentielle. Déterminer les solutions sur \mathbb{R} .

Exo 22 (a) Résoudre sur $]0; +\infty[$ à l'aide de la méthode de variation des constantes l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

On fera intervenir dans la solution les expressions suivantes $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$

(b) En déduire une expression valable pour $x > 0$ de $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{dt}{1+t^2}$.

(c) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exo 23 Résoudre le système différentielle (S) défini par

$$(S) \begin{cases} x' = x + y - 3 \\ y' = -2x + 3y + 1 \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Exo 24 Soit (E) l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y - 1 = 0$$

(a) Méthode 1 : Montrer que (E) admet une unique solution développable en série entière. La calculer puis résoudre (E).

(b) Méthode 2 : Résoudre (E) en posant $u(x) = x^2 y(x)$.

GROUPES & ARITHMÉTIQUE

Exo 1 On considère le groupe $(\mathbb{Q}, +)$. Soit $A \subset \mathbb{Q}$, de cardinal fini. Montrer que $\langle A \rangle \neq \mathbb{Q}$.

Exo 2 Montrer que si $\tau = (1\ 2)$ et $s = (1\ 2\ \dots\ n)$ alors $\langle \tau, s \rangle = \mathcal{S}_n$ (le groupe symétrique).

Exo 3 Donner tous les groupes à 4 éléments (à isomorphisme près).

Exo 4 Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tel que } n \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer que G est un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Exo 5 On pose $G =]-1, 1[$. On munit G de la loi $*$ définie par $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$.
Montrer que $(G, *)$ est un groupe isomorphe à un groupe célèbre.

Exo 6 Soit G un groupe abélien et x, y 2 éléments de G d'ordre respectif n et p . On suppose que $n \wedge p = 1$. Déterminer l'ordre de xy .

Application : déterminer à isomorphisme près tous les groupes de 6 éléments (on admettra que pour tout nombre premier p divisant le cardinal d'un groupe fini, il existe un élément x de G d'ordre p).

Exo 7 Montrer sans récurer que pour tout entier naturel n , $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111.

Exo 8 Problème du cuisinier chinois.

Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composée de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager équitablement et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors trois pièces. Mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués. Le cuisinier recevrait alors quatre pièces. Dans un naufrage ultérieur, seul le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés et le partage laisserait cinq pièces d'or à ce dernier. Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exo 9 Déterminer l'opposé et l'inverse de $\overline{33}$ dans $\mathbb{Z}/73\mathbb{Z}$.

Exo 10 Soit p premier. Résoudre dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, l'équation $x^{-1} = x$.

Démontrer le théorème de Wilson : n est premier SSI $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$.

Exo 11 Résoudre les équations suivantes : $x^2 + x + \overline{7} = 0$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ et $x^2 - \overline{4}x + \overline{3} = 0$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exo 12 Résoudre le système suivant : $\begin{cases} \overline{3}x + \overline{6}y = \overline{5} \\ \overline{5}x + \overline{2}y = \overline{3} \end{cases}$ dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2$.

Exo 13 Montrer dans \mathbb{Z} que x et y premiers entre eux implique $x + y$ et xy premier entre eux.

Exo 14 Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$ dans $(\mathbb{N})^2$.

Exo 15 Soit (u_n) définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Montrer que pour tout $n \geq 2, u_n < u_{n+1}$. En déduire que $u_n \wedge u_{n+1} = 1$ pour tout n . Que pensez vous de la résolution de l'équation $u_n x + u_{n+1} y = 1$? Calculer $u_n \wedge u_p$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exo 16 On note φ la fonction indicatrice d'Euler. Étant donnés k et n deux entiers naturels, on note $k \wedge n$ leur plus grand diviseur commun.

(a) Soit d un diviseur positif de $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'entiers k vérifiant

$$k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad k \wedge n = d$$

En déduire que

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

(b) On note T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ divise } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $D = \text{diag}(\varphi(1) \dots \varphi(n))$.

Déterminer la matrice $T^T D T$ puis en déduire le déterminant de la matrice S de coefficient général $s_{ij} = i \wedge j$.

Exo 17 Résoudre dans \mathbb{N}^3 , l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

Exo 18 Soit p un entier premier et n un entier. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Déterminer le cardinal de E , le nombre de droites vectorielles, d'hyperplans. Déterminer le nombre de famille libre à k éléments, le nombre de bases. Déterminer le cardinal de $GL_n(\mathbb{K})$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le nombre de projecteurs de E .

Exo 19 Soit K un corps fini. Montrer qu'il existe un nombre premier p et un entier n tel que $\text{card}(K) = p^n$. En déduire qu'il n'existe aucun corps ayant 6 éléments.

Exo 20 a) Montrer que si $m|n$, avec $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, alors $\varphi(m)|\varphi(n)$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1 : n = \sum_{d|n, 1 \leq d \leq n} \varphi(d)$

c) Convergence et somme de la série $(\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)q^n}{1-q^n})$, selon les valeur de q .

Exo 21 Notons $U(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

(a) Déterminer le cardinal de $U(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})$.

(b) $U(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})$ est-il un groupe cyclique ?

Exo 22 Résoudre dans \mathbb{Z} les systèmes suivants

$$(S_1) \begin{cases} 3x \equiv 2 & [5] \\ 5x \equiv 1 & [6] \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2) \begin{cases} x + y \equiv 4 & [11] \\ xy \equiv 10 & [11] \end{cases}$$

Exo 23 Soit p_n le n -ième nombre premier (par exemple $p_{11} = 31$).

a) Montrer que la famille $(\frac{1}{p_1^{i_1} \dots p_k^{i_k}})_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et calculer sa somme S_k .

b) En déduire la nature de la série $(\sum \frac{1}{p_n})$.

Exo 24 Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ un entier naturel non nul, décomposé en produit de facteurs premiers. On note $\phi(n)$ (et on l'appelle Indicatrice d'Euler) le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n . On se propose de démontrer que $\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{p_r})$.

Soit $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$ muni de la probabilité uniforme.

1) Si d est un diviseur de n , on note D_d l'ensemble des multiples de d dans Ω . Calculer $p(D_d)$.

2) Montrer que $D_{p_1}, D_{p_2}, \dots, D_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3) En déduire la formule pour $\phi(n)$.

Exo 1 f définie par $f(x, y, z) = \frac{x + y}{x^2 - y^2 + z^2}$ admet-elle une limite en $(2, -2, 0)$?

Exo 2 L'application $(x, y) \mapsto \text{Max}(|x|, |y|)$ est-elle continue sur \mathbb{R}^2 , de classe C^1 ?

Exo 3 Soit f de classe C^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^p ; déterminer $\frac{d}{dx}(f(x, 2x))$ et $\frac{\partial}{\partial x}(f(x^y, y^x))$.

Exo 4 Soit f définie par $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$, sur quel domaine f est-elle continue, où admet-elle des dérivées partielles premières, où est-elle C^1 ?

Exo 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout élément $A \in E$ on pose $\exp(A) = \sum_{p \geq 0} \frac{A^p}{p!}$.

Montrer que la fonction exp est différentiable en tout point et exprimer sa différentielle en A.

Exo 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $\|P\|_2 = \sqrt{\int_0^1 P(t)^2 dt}$. On définit la fonction $f : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 \sin(tP(t)) dt \end{pmatrix}$

Montrer que f est différentiable en tout point de E et déterminer sa différentielle en un point P.

Exo 7 Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = -f(y, x)$. Quelle relation y a-t-il entre les dérivées partielles de f ?

Exo 8 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Étudier la continuité, la C^1 -tude de f ? Calculer les dérivées partielles secondes en $(0, 0)$. Que peut-on en déduire ?

Exo 9 Soit f définie par $f(x, y) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \text{ch} 2y}$ a) Déterminer le domaine D de f. b) Peut-on prolonger f par continuité sur \mathbb{R}^2 ? c) Calculer $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (Laplacien)

Exo 10 Soit f définie pour $x \neq y$ par $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$. a) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur \mathbb{R}^2 . b) f est-elle de classe C^1 , de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 ?

Exo 11 Soit f de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x, x)$. Montrer que h est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer $h'(x)$.

Exo 12 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 et soit $s \in \mathbb{R}$.

f est dite s-homogène si $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall \lambda > 0 : f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^s f(x, y, z)$.

(a) Donner un exemple non nul (!) avec $s = 4$.

(b) Montrer l'équivalence suivante : f est s-homogène ssi

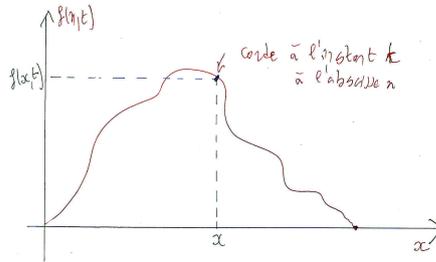
$$\forall (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 : x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = s f(x_0, y_0, z_0)$$

Exo 13 Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x + y + 1$.

Indication : On pourra montrer que l'on peut définir une fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto g(u, v)$ telle que $f(x, y) = g(u, v)$ avec $u = x + y$ et $v = x + 2y$.

Exo 14 On considère l'équation des cordes vibrantes : $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

Cette équation s'applique aux petites vibrations d'une corde tendue, flexible (corde de violon par exemple) initialement tendue le long d'un axe x et mise en mouvement. f(x, t) représente le déplacement d'un point d'abscisse x à l'instant t. La constante a^2 a pour valeur $\frac{\tau}{\mu}$ où τ est la tension (constante) de la corde et μ est la masse (constante) par unité de longueur de la corde. On suppose qu'il n'y a pas de forces extérieures agissant sur la corde et que celle-ci ne vibre que par élasticité.



(a) Résoudre cette équation aux dérivées partielles.

On pourra montrer que l'on peut définir une fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto g(u, v)$ telle que $f(x, t) = g(u, v)$ avec $u = x - at$ et $v = x + at$.

(b) Chercher la solution de l'équation avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad f(0, t) = f(5, t) = 0, \quad f(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 5 \sin \pi x.$$

On interprétera physiquement les conditions aux limites. En déduire le mouvement de la corde dans le temps.

Exo 15 (exercice écrit ccinp)

On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur \mathbb{R}^2 .

Q6. Établir que l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

Q7. Démontrer que f possède un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Q8. A l'aide de la matrice hessienne, démontrer que f admet un extrémum local en (x_0, y_0) .

Est-ce un minimum ou un maximum ?

Q9. (le petit plus !) Est-il global ? (on pourra utiliser les coordonnées polaires)

Exo 16 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = xy + yz + zx$. Trouver la valeur maximale et la valeur minimale de f sur $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Exo 17 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + x^3 + y^2$.

(a) Déterminer les points critiques de f .

(b) Étude en $(0, 0)$. Est-ce un extrémum ? Dessiner les zones de \mathbb{R}^2 où f est positive et où f est négative.

(c) Étudier l'autre point critique (dire s'il est local, global, stricte ou non).

Exo 18 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2y + y + x$.

Dessiner les lignes de niveau $\{f(x, y) = k, k \in \mathbb{R}\}$ de f . Étudier les extrémums de f .

Exo 19 Déterminer les extrémums (selon les cas dire s'ils sont locaux ou globaux, strictes ou non) des fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

(b) $f(x, y) = x^n + y^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

(c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(d) $f(x, y) = e^{x \sin y}$

(e) $f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

(g) $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz - y + z$

Exo 20 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

a) Étudier les extrémums locaux de f .

b) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que f admet un maximum M et un minimum m sur D .

c) Soit $(x, y) \in D$. Montrer que si $f(x, y) = M$ ou $f(x, y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.

d) En déduire les valeurs de M et m .

Exo 21 Étudier la fonction $h : t \mapsto -t \ln t$.

Déterminer les bornes et les extremums (absolus) éventuels de $-\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i)$ sur

$$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}.$$

Exo 22 Déterminer les triangles dont la somme des cosinus des 3 angles est maximale.

Exo 23 Soit $k \in]0, 1[$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq k$. On définit :

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (y + f(x), x + f(y))$$

Montrer que φ est une bijection de classe C^1 de \mathbb{R}^2 dans lui-même.

Exo 24 Soit $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+y^n}$. Déterminer le domaine de définition Δ de f puis étudier la continuité sur Δ . f est-elle C^1 sur Δ ?

Exo 25 Un industriel veut faire fabriquer un réservoir de forme rectangulaire, de volume 4, sans couvercle dont le fond est un rectangle de cotés x et y et de hauteur z . Il veut que la somme des aires des 5 rectangles à découper soit de surface minimale.

(a) Faire un dessin de la boîte.

(b) Montrer que le problème se ramène à la recherche du minimum d'une fonction f (que l'on déterminera) ne dépendant que de x et de y dans le domaine $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$.

(c) Montrer que Δ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

(d) Montrer que f a un unique minimum local en un unique point (a, b) de Δ .

(e) On pose $F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq \frac{2}{3}, y \geq \frac{2}{3} \text{ et } xy \leq 12 \right\}$
et $F_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > \frac{2}{3}, y > \frac{2}{3} \text{ et } xy < 12 \right\}$.

i. Montrer que F est un compact de \mathbb{R}^2 et que F_0 est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Représenter graphiquement F dans un repère cartésien.

ii. Montrer que si $(x, y) \in \Delta - F_0$ alors $f(x, y) > f(a, b)$. Puis montrer que le minimum trouvé en (a, b) est un minimum global sur Δ . En déduire la solution du problème de l'industriel.

Exo 26 Soit f définie par $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}$. Préciser le domaine de définition de f , étudier la continuité de f , f est-elle C^1 sur tout ouvert inclus dans son domaine de définition?

Exo 27 Soit f définie par $f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t-y)^2 + x^2} dt$, déterminer le domaine de définition de f , calculer f . On admet que $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xv)}{v^2 + 1} dv$ est C^2 sur \mathbb{R}_+^* et que l'on peut dériver sous le signe somme.

Exo 28 Soit S la surface d'équation $z = x^3 + y^2 + xy$. Déterminer le plan tangent au point $M(1, 2, 9)$.

Exo 29 Calculer pour tout $|z| < 1$, $L(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

SURFACES - NAPPES PARAMÉTRÉES

Exo 1 Donner l'équation du cylindre de direction $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et de base (ou de directrice) la courbe d'équation :

$$(\gamma) \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}. \text{ On commencera par donner une représentation paramétrique de } (\gamma).$$

Déterminer la distance du cylindre à l'origine.

Exo 2 Soit f l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$.

- (a) En quels points de \mathbb{R}^3 la différentielle de f est-elle de rang 1 ?
- (b) En déduire qu'en tout point (x_0, y_0, z_0) telle que $f(x_0, y_0, z_0) = 1$, la surface $(\mathcal{S}) : f^{-1}(\{1\})$ possède un plan tangent dont on donnera une équation.

Soit \mathcal{P} le plan d'équation $x = 0$ et $\mathcal{S}_0 = f^{-1}(\{0\})$.

- (c) Dessiner $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_0$, \mathcal{S}_0 , $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ et \mathcal{S} .
-

Exo 3 Soit \mathcal{H} l'hélice $\mathcal{H} \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$.

- (a) Déterminer une représentation paramétrique du lieu des milieux des cordes de l'hélice \mathcal{H} .
 - (b) Déterminer l'équation du plan tangent en tout point régulier.
 - (c) Montrer que cette nappe est incluse dans une surface d'équation $F(x, y, z) = 0$.
-

Exo 4 Déterminer l'ensemble des points \mathcal{S} qui sont à égales distances des 2 droites

$$\mathcal{D} \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}' \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} .$$

Exo 5 Déterminer les droites tracées sur la surface \mathcal{S} d'équation : $xy + yz + zx + xyz = 0$.

F I N

TABLE DES MATIÈRES

POLYNÔMES	2
RELATIONS BINAIRES	3
\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}	3
NOMBRES COMPLEXES	4
DÉNOMBREMENT	5
SUITES DE \mathbb{R} ET \mathbb{C}	6
FONCTIONS RÉELLES	8
CONVEXITÉ	9
DÉVELOPPEMENTS LIMITES - ÉTUDES LOCALES	10
SÉRIES NUMÉRIQUES DE \mathbb{R} ET \mathbb{C}	10
PROBABILITÉS	12
ESPACES VECTORIELS	17
GÉOMÉTRIE AFFINE	19
MATRICES	20
GROUPE SYMÉTRIQUE - DÉTERMINANTS - SYSTÈMES	21
ANNEAUX - IDÉAUX - CORPS	23
RÉDUCTION - DIAGONALISATION - POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES	24
E.V.N. - APPLICATIONS CONTINUES	27
FRACTIONS RATIONNELLES - DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES	29
INTÉGRATION SUR UN SEGMENT	30
FONCTIONS INTÉGRABLES	32
INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE	33
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS - C.S.-C.U.-C.A.-C.N.	35
SÉRIES ENTIÈRES	37
PRODUITS SCALAIRES	41
GÉOMÉTRIE AFFINE EUCLIDIENNE	43
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS	44
GROUPES & ARITHMÉTIQUE	46
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES - CALCUL DIFFÉRENTIEL	48
SURFACES	50
TABLE DES MATIÈRES	52