SPE MP ······ 2024-2025 | PROGRAMME DE COLLE 2

2. $\mathbb{N}$ - $\mathbb{Z}$ - $\mathbb{Q}$ - $\mathbb{R}$:

Récurrence - division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
Partie entière d'un réel.
● Définition et caractérisation de la borne supérieure (et inférieure).
Densité de A dans $\mathbb{R}$.
Cardinaux de $E \cup F$, $E \times F$, E^F, $\mathcal{P}(X)$.

1. COURS ET EXERCICES SUR $\mathbb{C}$

Trigonométrie
Écritures d'un complexe : z, $\rho e^{i\theta}$, $a+ib$.
● Passage de l'un à l'autre avec l'une des fonctions Arccos, Arcsin (et Arctan) **et sa démonstration**.
Formules d'Euler généralisées : $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$....
Interprétation géométrique des complexes, construction du polygone à n côtés (avec $n \leqslant 6$)
● Racine n-ième de l'unité, équation $z^n=a$, racine carré.
Similitudes directes
Définition de l'exponentielle complexe, sin cos,ch,sh : $e^z=e^ae^{ib}$ avec $z=a+ib$...
Propriétés principales

2. COURS ET EXERCICES SUR LE DÉNOMBREMENT

1. **Cardinal d'un ensemble fini**
   ● Si $f : X \longrightarrow Y$ avec $|X|=|Y|$ alors
   [f est bijectif] $\iff$ [f est injectif] $\iff$ [f est surjectif] **et sa démonstration**.
   Opération sur les ensembles finis : Soient E et F deux ensembles finis.
   (a) Si $E \cap F = \emptyset$ (on dit que E et F sont disjoints) alors : Card$(E\cup F)$ =Card$E$ + Card$F$.
   Généralisation : si $A_1, A_2, ..., A_p$ sont des parties de E, 2 à 2 disjointes, alors
   Card$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p)$ =CardA_1 + Card$A_2 + \cdots +$ CardA_p.
   (b) ● Card$(E\cup F)$=Card$E$ + Card$F$ − Card$(E\cap F)$ **et sa démonstration**.
   (c) $|E \times F| = |E| \cdot |F|$, généralisation avec $|E_1 \times E_2 \times ... \times E_p|$
2. **p-listes** :
   Soit E un ensemble fini, et $p \in \mathbb{N}^*$.
   Définition : Une p-liste de E (ou un p-uplet) est un élément de E^p
   Si Card$E=n$, nombre de p-listes de E et **conséquence** : $|\mathcal{F}(E,F)|$.
   Si Card$E=n$, et $p \leqslant n$, nombre de p-listes d'éléments distincts de E.
   On note parfois ce nombre A_n^p et on parle d'arrangements de E.
   conséquence : Nombre d'applications injectives de X_p à p éléments dans Y_n à n éléments.
   A savoir : pour $n \geqslant 1$, $A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)$.
   Permutation de n éléments , nombre de permutations de n éléments.
3. **Combinaisons** :
   (a) Si Card$E=n$, nombre de parties à p éléments (distincts) de E notation $\binom{n}{p}$.
   ● Formule de Pascal **et sa démonstration (que) combinatoire** .
   Formule du binôme de Newton **et sa démonstration (récurrence ou combinatoire)**
   ● Formule de Vandermonde **et sa démonstration** :
   $$\forall (a,b,n) \in \mathbb{N}^3 \quad : \quad \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$
4. **Applications faites en classe à savoir refaire**
   (a) Si X_p a p éléments et Y_n n éléments, nombre des applications strictement croissantes de X_p dans Y_n.
   (b) Si X_p a p éléments et Y_n n éléments, alors le nombre des applications croissantes de X_p dans Y_n.
   (c) $|S|$ avec $S=\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{N}^p$ tel que $x_1+\cdots+x_p=n\}$.
   Nombre de façons de ranger k boules indiscernables dans b boites discernables.

Prévisions : Suites réelles et complexes.