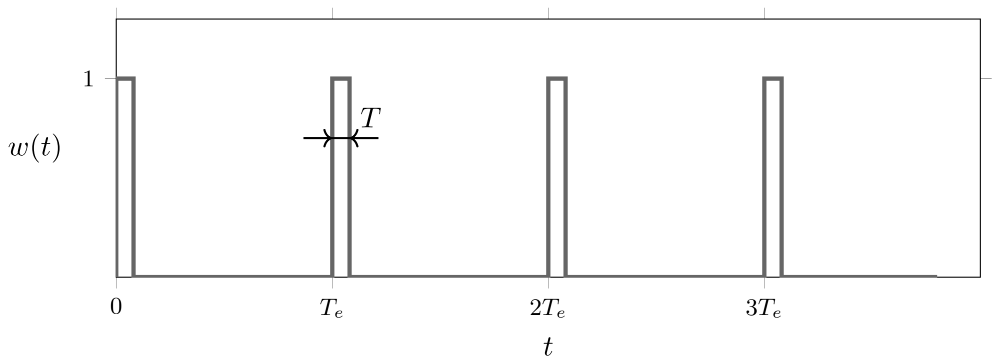
DM 1
Électronique, physique statistique

Exercice 1 : Échantillonnage d'un signal électronique

On note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

Q.1 On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) \times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée ci-dessous. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$. On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = 1/T_e$.



Q.2 Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = \frac{4}{3}f_0$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

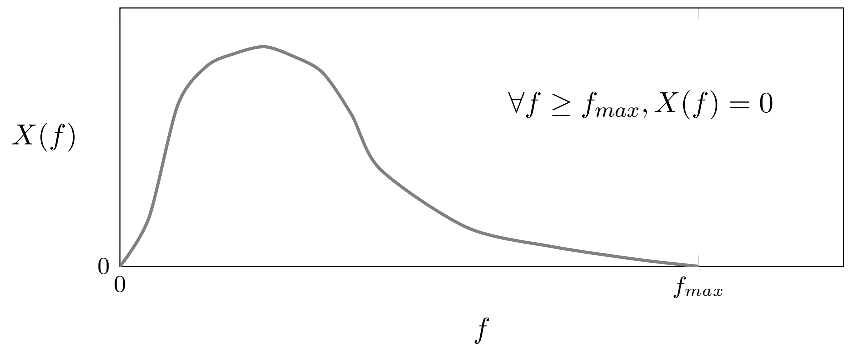
Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t)$$

Q.3 Représenter, par analogie avec la première question, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = \frac{4}{3}f_0$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 2$). Montrer que, dans l'un des cas, les motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

Q.4 En s'inspirant des questions 2 et 3, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée *critère de Shannon-Nyquist*.

On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté ci-dessous, fait apparaître une fréquence maximale f_{max}.



Q.5 Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de f_{max} et f_e.

Q.6 Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.

Q.7 La durée d'enregistrement d'un CD audio est de $\Delta t = 75\,\text{min}$. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44{,}1\,\text{kHz}$ et avec résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.

Exercice 2 : Moteur thermique

Une mole d'air décrit un cycle moteur $1-2-3-4-5-1$ totalement réversible. Dans l'état 1, $T_1 = 300\,\text{K}$ et $P_1 = 1{,}0\,\text{bar}$. Le cycle est le suivant :

$1 \longrightarrow 2$: compression adiabatique avec $V_2 = V_1/10$

$2 \longrightarrow 3$: échauffement isochore avec $T_3 = 1190\,\text{K}$

$3 \longrightarrow 4$: échauffement isobare avec $T_4 = 1500\,\text{K}$

$4 \longrightarrow 5$: détente adiabatique

$5 \longrightarrow 1$: refroidissement isochore

On suppose que l'air est un gaz parfait d'exposant adiabatique $\gamma = 1,4$ constant. On donne la constante des gaz parfait : $R = 8{,}31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Q.1 Recopier et compléter, en justifiant, le tableau suivant (indiquer sur la copie les formules littérales pour ces grandeurs).

Grandeur	1	2	3	4	5
T (en K)	300		1190	1500	
P (en bar)	$1,0$				
V (en L)					

Q.2 Représenter ce cycle dans un diagramme de Clapeyron.

On appelle Q_1 la chaleur reçue par le gaz au cours d'un cycle ($Q_1 > 0$) et Q_2 la chaleur cédée par ce gaz au cours d'un cycle ($Q_2 < 0$).

Q.3 Déterminer Q_1 et Q_2. Faire le calcul littéral puis donner les valeurs numériques.

Q.4 Quel est le rendement r de ce moteur ? Faire l'application numérique. Comparer au rendement d'un moteur ditherme réversible fonctionnant entre deux sources de chaleur de température T_1 et T_4.

Exercice 3 : Loi de curie

Q.1 Expliquer qualitativement ce qu'on entend par basse et haute température pour une particule à deux niveaux d'énergie $\pm\varepsilon$. On prendra comme critère $x \ll y \Longleftrightarrow x \leq y/10$.

On considère $N \gg 1$ atomes d'argent, tous dans leur état fondamental dont on prendra l'énergie égale à 0 ($E_0 = 0$). Ces atomes possèdent un moment magnétique permanent $\vec{m}$ dont la composante m_z sur Oz ne peut prendre que deux valeurs : $\pm m$. Placés dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u_z}$, il acquièrent une énergie magnétique dont l'expression est : $\varepsilon = -\vec{m} \cdot \vec{B}$.
Pour les applications numériques, on prendra $m = 1{,}0 \times 10^{-23}\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2$ et $B = 1\,\mathrm{T}$.

Q.2 Déterminer deux températures caractéristiques T_b et T_h telles que :

- Si $T \leq T_b$ on est dans l'approximation basse température
- Si $T \geq T_h$ on est dans l'approximation haute température.

Donner les valeurs numériques de T_b et T_h. Commentaire.

On définit le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ d'une assemblée de N atomes comme la somme des moments magnétiques individuels $\vec{m_i}$ des différents atomes qui la constitue.

Q.3 Calculer la valeur moyenne $\overline{\mathcal{M}_z}$ de $\vec{\mathcal{M}}$ pour une température T.

Q.4 Approximer cette valeur aux hautes températures, commenter. Même question pour des forts champs magnétiques.

Selon la loi de Curie, établie expérimentalement, $\overline{\mathcal{M}_z}$ est de la forme :

$$\overline{\mathcal{M}_z} = \frac{\alpha}{T} B$$

où α est une constante et B la composante du champ magnétique sur Oz.

Q.5 Compte-tenu des questions précédentes, montrer que l'on retrouve la loi de Curie et déterminer la constante α.

Pour certaines substances ferromagnétiques, le champ magnétique engendré par les atomes prend des valeurs notables et ne peut plus être négligé par rapport au champ extérieur $\vec{B}$. L'expression du moment magnétique moyen $\overline{\mathcal{M}_z}$ est la même que précédemment à condition de remplacer B par $B + \lambda\overline{\mathcal{M}_z}$ où λ est une constante.

Q.6 Grâce à une interprétation graphique, montrer que le moment magnétique moyen est non nul même en absence de champ magnétique, dans une certaine gamme de température.

Q.7 Un aimant est un corps ferromagnétique. Que se passe-t-il quand on chauffe un aimant ?