SPE MP ······ 2024-2025 | PROGRAMME DE COLLE 3

1. UN EXERCICE SUR LE DÉNOMBREMENT :
2. COURS & EXERCICES SUR LES SUITES DE $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

Suites de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

$*$ Convergence-Divergence-Divergence vers $\pm\infty$.

$*$ Théorèmes Généraux : somme-produit-quotient de suites convergentes, valeur absolue.............

● $*$ Critère séquentiel pour la limite et pour la continuité de f :
f converge vers ℓ en a **SSI** toute suite (u_n) qui converge vers a vérifie $(f(u_n))$ converge vers ℓ (valable avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$).

$*$ Sommes de Riemann (admis).

$*$ Suites de $\mathbb{Z}$.

$*$ Densité et suites de $\mathbb{Q}$.

● $*$ Théorème de Cesàro : (HPTS mais à savoir démontrer)
Si (u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$ converge aussi vers ℓ.

● $*$ Théorème de la limite monotone.

$*$ Suite adjacentes. Segments emboités.

$*$ Théorème d'encadrement.

$*$ Définition des **valeurs d'adhérence** d'une suite, **Caractérisations** :
i) $\forall \varepsilon > 0 : \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\}$ est infini.
ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists \geqslant N$ tel que $|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$

$*$ **Théorème** : Si (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite converge aussi vers ℓ.

● $*$ **Théorème de Bolzano-Weierstrass** (l'une des démonstrations au choix de l'étudiant doit être parfaitement sue)

$*$ **Critères séquentiels** :
Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (aux bords de I, I étant un intervalle), si $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, alors pour toutes suites (u_n) de I telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = \ell$, **ainsi que la réciproque**. Les étudiants doivent être capable de faire les 9 cas selon a et ℓ réel ou $\pm\infty$.

$*$ Comparaisons des suites : O ; o (ou <<) ; $\sim$

$*$ Croissances comparées (+les démonstrations) :
$(\ln n)^a = o(n^b)$, $n^b = o(q^n)$, $q^n = o(n!)$ avec $a, b > 0$ et $q > 1$
$\dfrac{1}{n!} = o(\dfrac{1}{q^n})$ $\dfrac{1}{q^n} = o(\dfrac{1}{n^b})$ $\dfrac{1}{n^b} = o(\dfrac{1}{(\ln n)^a})$, , avec $a, b > 0$ et $0 < q < 1$

$*$ Formule de Stirling (admise provisoirement)

$*$ **Suites récurrentes** : Bien insister sur la stabilité d'un intervalle (pour la bornitude, la monotonie...). Limites possibles. Tracé sur le graphe de f des valeurs de la suite (escalier ou escargot).

$*$ **Suites complexes** : Intervention de la partie réelle, imaginaire, du module et de l'argument. Repasse du chapitre : valeur d'adhérence- ● **BW (Bien savoir le démontrer)** - O,o,$\sim$...

$*$ Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Prévisions : Fonctions de la variable réelle et DL.