

DM 2

Thermodynamique

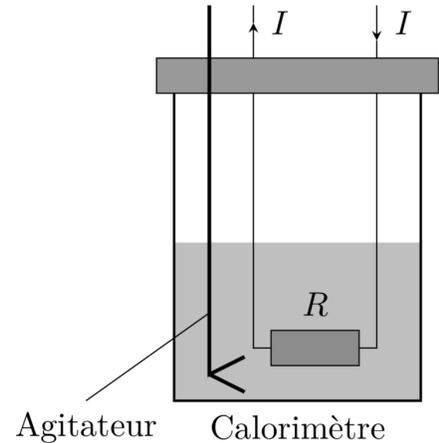
Exercice 1 : Étude d'un calorimètre

Un calorimètre est constitué d'une enceinte dans laquelle sont placés un agitateur (A) et une résistance électrique R reliée à un circuit extérieur, permettant d'y faire circuler un courant électrique. On désigne par C la capacité thermique totale de ces accessoires. L'agitateur permet d'homogénéiser la température Θ (en $^{\circ}\text{C}$) du contenu de l'enceinte.

Toutes les phases condensées sont supposées idéales. On néglige la capacité thermique de l'air enfermé dans le calorimètre devant celle de l'eau et des accessoires. On donne la capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée constante :

$$c_{eau} = 4,18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Le calorimètre contient initialement une masse $m_1 = 95 \text{ g}$ d'eau liquide et le dispositif est en équilibre thermique à la température $\Theta_1 = 20^{\circ}\text{C}$. On suppose dans un premier temps que le calorimètre est parfait, c'est à dire que ses parois sont adiabatiques. Aucun courant ne circule dans la résistance. Après avoir ajouté une masse $m_2 = 71 \text{ g}$ d'eau à la température $\Theta_2 = 50^{\circ}\text{C}$, on constate que la température finale du dispositif se stabilise à $\Theta_f = 31,3^{\circ}\text{C}$.



Q.1 À l'aide du premier principe, déterminer C en fonction m_1 , m_2 , Θ_1 , Θ_2 , Θ_f et c_{eau} . En déduire la valeur en eau μ du calorimètre, définie par $C = \mu c_{eau}$. Faire l'application numérique.

Le calorimètre est entièrement vidé de l'eau qu'il contient et on y introduit une masse $m_0 = 83 \text{ g}$ d'éthanol de capacité thermique massique c_0 . À partir de $t = 0$, on fait circuler un courant électrique d'intensité $I = 1,40 \text{ A}$ constante dans la résistance $R = 5,0 \Omega$ dont la valeur est indépendante de la température.

Q.2 Faire un bilan énergétique pendant l'intervalle de temps dt et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\Theta(t)$.

Q.3 On constate que la température s'est élevée de $9,2^{\circ}\text{C}$ au bout de $\tau = 120 \text{ s}$. En déduire la capacité thermique massique c_0 de l'éthanol.

En fait, le calorimètre n'est pas parfait et il faut tenir compte des "fuites thermiques". Entre les instants t et $t + dt$, le contenu du calorimètre cède au milieu extérieur une énergie thermique δQ pouvant s'écrire :

$$\delta Q = K (\Theta(t) - \Theta_a) dt$$

où $K = 0,48 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ est une constante, $\Theta(t)$ la température dans l'enceinte à l'instant t et Θ_a la température de l'atmosphère extérieure, supposée constante. On suppose qu'à $t = 0$, $\Theta(0) = \Theta_1 = \Theta_a = 20^{\circ}\text{C}$.

Q.4 Comment est modifiée l'équation différentielle de la **Q.2** ?

Q.5 En déduire $\Theta(t)$ et en donner une représentation schématique en fonction du temps. Quelle est la température limite atteinte par le contenu de l'enceinte ? Faire l'application numérique.

Exercice 2 : Thermodynamique dans un REP

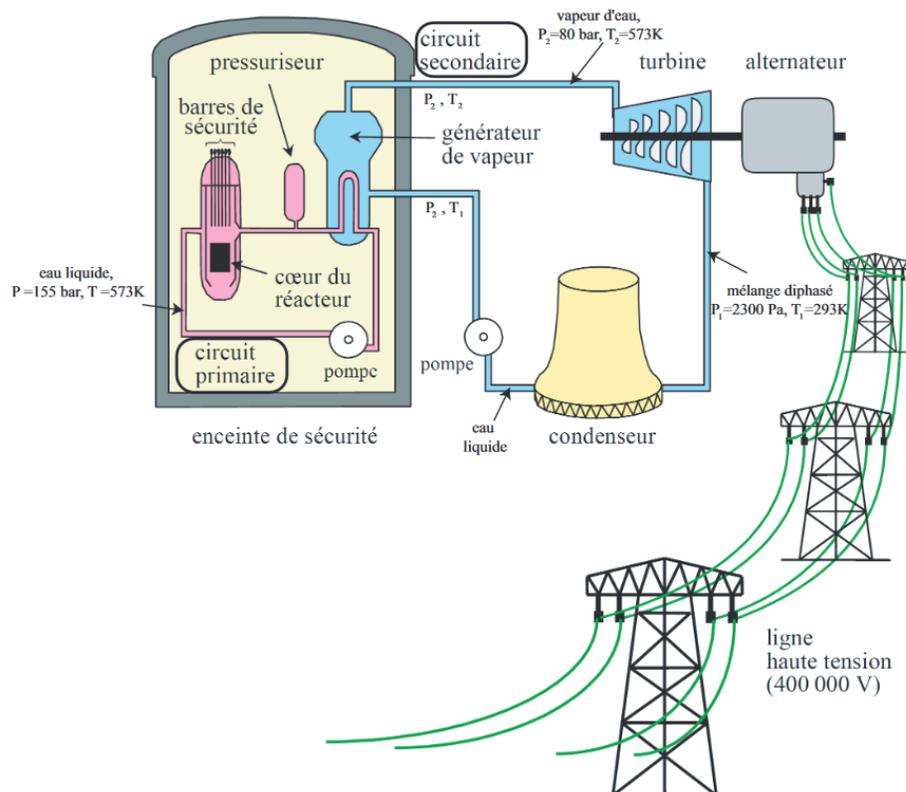
Le parc de production nucléaire français est composé de centrales de la filière REP (Réacteurs à Eau Pressurisée). On étudie l'eau ($M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) dans le circuit fermé secondaire (voir figure ci-dessous).

L'écoulement est stationnaire et on modélise son évolution par le cycle suivant :

- État A : l'eau qui sort du condenseur est liquide sous la pression $P_1 = 0,23 \text{ bar}$, à la température $T_1 = 63^\circ \text{C}$.
- Évolution AB : l'eau subit une compression dans la pompe durant laquelle sa température ne varie pratiquement pas. On considérera que les échanges thermiques sont négligeables lors de cette compression qui l'amène dans l'état B , sous la pression $P_2 = 80 \text{ bar}$.
- Évolution BD : elle passe ensuite dans un échangeur qui permet les transferts thermiques entre le circuit primaire et le circuit secondaire. On peut décomposer cette évolution en deux transformations :
 - l'eau liquide s'échauffe de manière isobare jusqu'à l'état C (P_2, T_2) ;
 - l'eau liquide se vaporise totalement jusqu'à l'état D (P_2, T_2).
- Évolution DE : la vapeur d'eau se détend de manière réversible dans une turbine calorifugée jusqu'à l'état E (P_1, T_1). Durant cette détente, une fraction massique $(1 - x)$ de l'eau devient liquide et x reste gazeuse.
- Évolution EA la vapeur restante se liquéfie à la température T_1 .

Le tableau suivant recense les données de l'équilibre liquide – vapeur de l'eau aux températures T_1 et T_2 . La pression de vapeur saturante P_{sat} est en bar, les volumes massiques v_ℓ du liquide et v_g de la vapeur sont en $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, les enthalpies massiques h_ℓ du liquide et h_g de la vapeur en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et enfin, les entropies massiques s_ℓ du liquide et s_g de la vapeur sont en $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

| $T(^{\circ}\text{C})$ | P_{sat} | v_ℓ | v_g | h_ℓ | h_g | s_ℓ | s_g |
|-----------------------|----------------|-----------------------|--------|----------|-------|----------|-------|
| 63 (T_1) | 0,23 (P_1) | $1,02 \times 10^{-3}$ | ? | 266 | 2615 | 0,877 | 7,85 |
| 295 (T_2) | 80 (P_2) | $1,39 \times 10^{-3}$ | 0,0234 | 1319 | 2757 | ? | 5,74 |

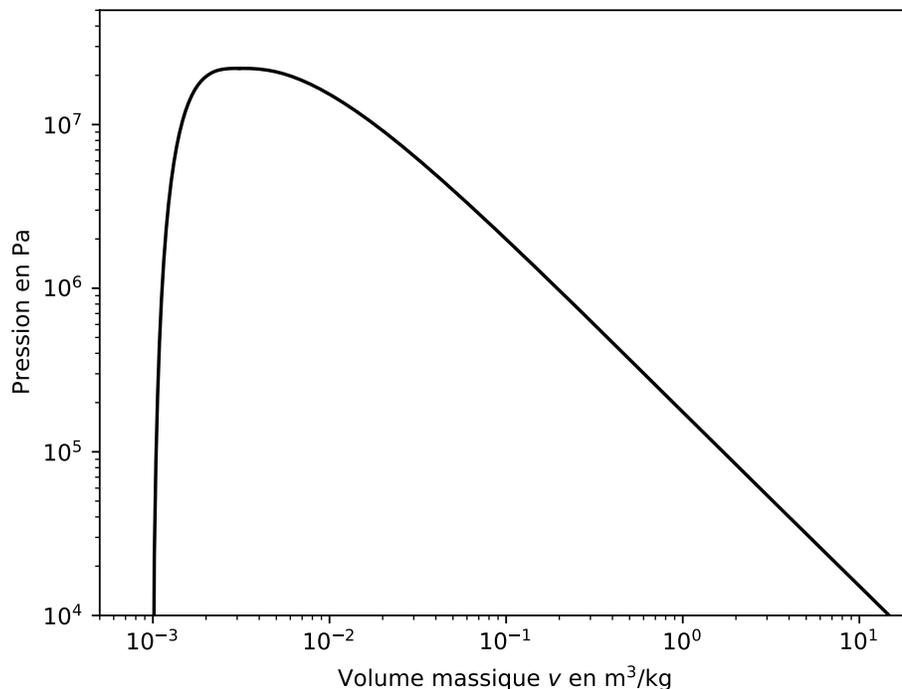


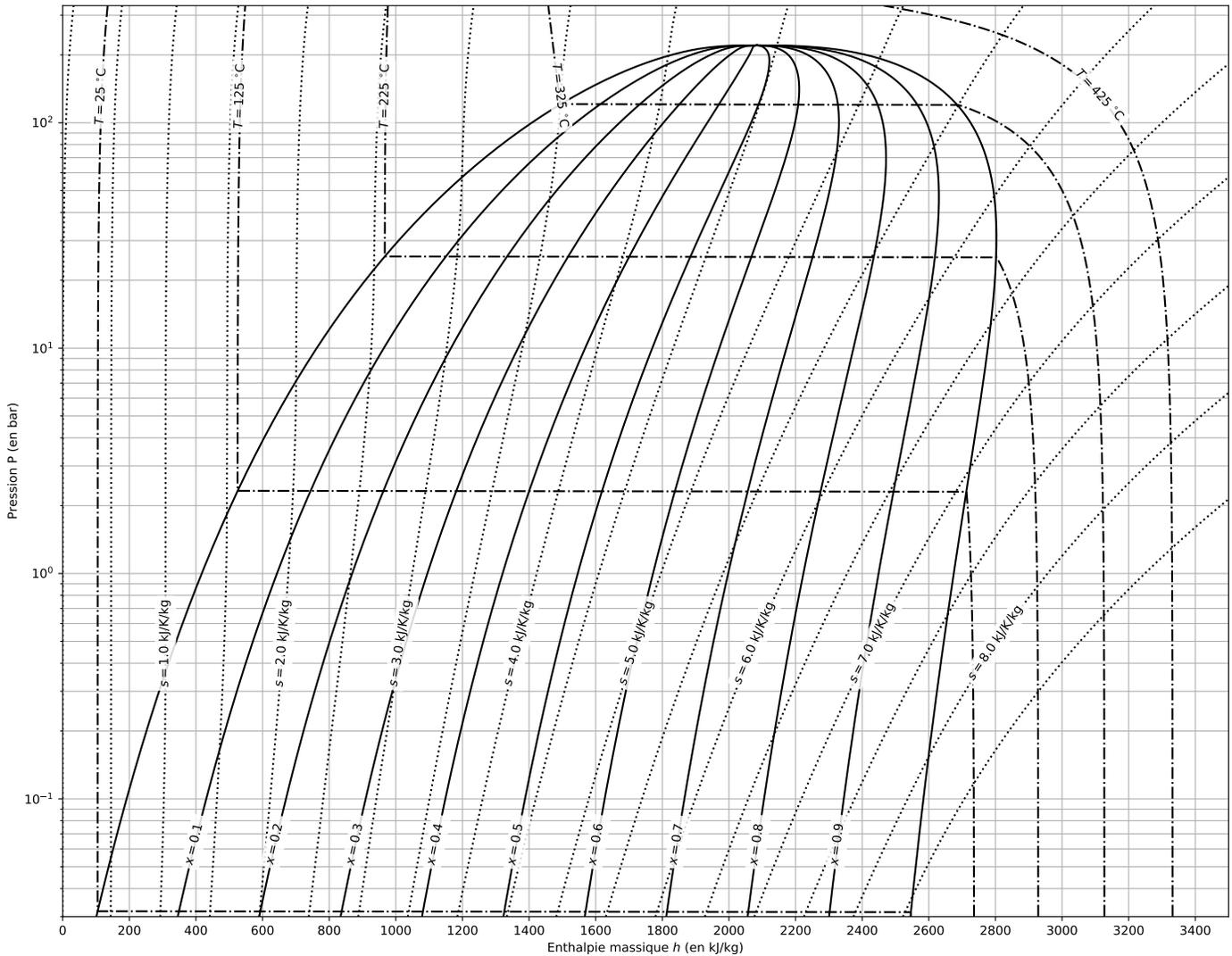
On rappelle la valeur de la constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- Q.1**
- Calculer les enthalpies massiques de vaporisation $\Delta_{vap}h$ de l'eau aux températures T_1 et T_2 .
 - Calculer l'entropie massique de l'eau liquide s_ℓ à la température T_2 et sous la pression P_2 .
 - Sachant que la vapeur d'eau à la pression de P_1 et à la température T_1 peut être considérée comme un gaz parfait, calculer son volume massique v_g .
- Q.2** Tracer le cycle de l'eau sur le diagramme (P, v) fourni en plaçant les points A, B, C, D et E . On fera de même dans le diagramme des frigorigènes $(\ln P, h)$ de l'eau.
- Q.3**
- Démontrer que la transformation DE est isentropique.
 - Calculer le titre massique en vapeur dans l'état E .
 - Retrouver ce résultat par lecture du diagramme $(\ln P, h)$.

On note w_a le travail reçu par l'alternateur par unité de masse du fluide en écoulement. On néglige toute variation d'énergie cinétique macroscopique et d'énergie potentielle de pesanteur.

- Q.4**
- Calculer la valeur numérique de w_a .
 - Retrouver ce résultat par lecture du diagramme $(\ln P, h)$.
- Q.5**
- La capacité thermique massique de l'eau liquide est $c_e = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. Calculer le transfert thermique q_{DB} par unité de masse de fluide en écoulement lors du passage dans l'échangeur thermique avec le circuit primaire.
 - On définit le rendement $\eta = \frac{|w_a|}{q_{DB}}$. Le calculer. Que néglige-t-on dans cette définition ? Retrouver ce résultat par lecture du diagramme $(\ln P, h)$.
 - Calculer le rendement maximal qu'on aurait pu avoir dans un cycle ditherme utilisant les deux températures extrêmes du cycle. Conclusion.





Exercice 3 : Refroidissement d'un centre de données

Un centre de données – data center en anglais – est un lieu regroupant des installations informatiques chargées de stocker et de distribuer des données (data). Ces dernières années, l'expansion des services en ligne a entraîné une croissance exponentielle du nombre de centres de données, dégageant de grandes quantités de chaleur.

À l'échelle des composants, il est nécessaire d'évacuer la chaleur dégagée, par les transistors des microprocesseurs notamment. Pour ce faire, des ventilateurs sont installés afin de renouveler en permanence l'air au contact des composants. De plus, des ailettes de refroidissement sont assemblées directement sur la surface des composants afin de pouvoir dissiper le plus possible de chaleur vers l'extérieur par transfert conducto-convectif.

On modélise une de ces ailettes par un cylindre d'axe (Ox) , de rayon a , de longueur $b \gg a$ et de conductivité thermique λ . Elle est accolée en $x = 0$ au composant de température T_d . Le contact thermique en $x = 0$ est supposé parfait. Le reste de l'ailette est au contact de l'air que l'on suppose de température T_a uniforme.

En régime stationnaire, supposé atteint dans toute cette sous-partie, la température $T(x)$ est considérée comme uniforme sur la section droite de l'ailette située à l'abscisse x pour tout $x \in [0, b]$.

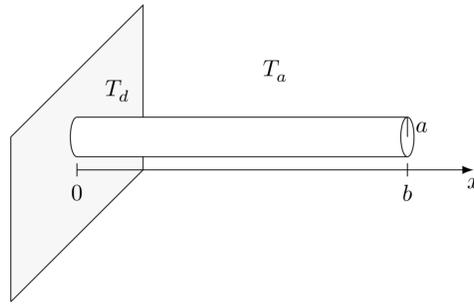


FIGURE 1 – Modélisation de l'ailette.

Q.1 Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique \vec{j}_Q qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette. On introduira la ou les constantes nécessaires, leurs unités ainsi que des ordres de grandeur.

L'air qui entoure le solide, constamment renouvelé et de température uniforme T_a , échange avec l'ailette un transfert conducto-convectif. Dans une fine couche de fluide au contact de la surface du solide, ce transfert latéral peut-être modélisé par la loi de Newton :

$$\vec{j}_{cc}(x) = h(T(x) - T_a)\vec{n}$$

où \vec{j}_{cc} correspond à la densité de flux conducto-convectif et \vec{n} un vecteur unitaire, normal à la surface d'échange et orienté du solide vers l'air. Le coefficient h , dont certaines valeurs numériques sont disponibles en fin d'énoncé, est appelé coefficient de transfert thermique de surface.

Q.2 En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur dx de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$$

Q.3 Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre δ introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon $a = 1$ mm.

Q.4 Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température $T(x)$ en $x = 0$ et en $x = b$.

Sur la FIGURE 2 (à gauche) est représentée la solution «normalisée» de l'équation précédente, définie par $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a}$, en fonction de l'abscisse adimensionnée x/b , pour différentes valeurs du rapport b/δ .

Q.5 En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de $T(x)$ dans le cas où $b \gg \delta$. Vérifier la cohérence de cette expression avec la FIGURE 2.

On définit la résistance thermique R_{th} de l'ailette de refroidissement par $R_{th} = \frac{T_d - T_a}{\mathcal{P}}$, où \mathcal{P} désigne la puissance thermique totale évacuée par l'ailette dans l'air.

Q.6 La FIGURE 2 (à droite) donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport b/δ , pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de R_{th} commune aux différents matériaux lorsque $b \ll \delta$. Justifier sa valeur numérique.

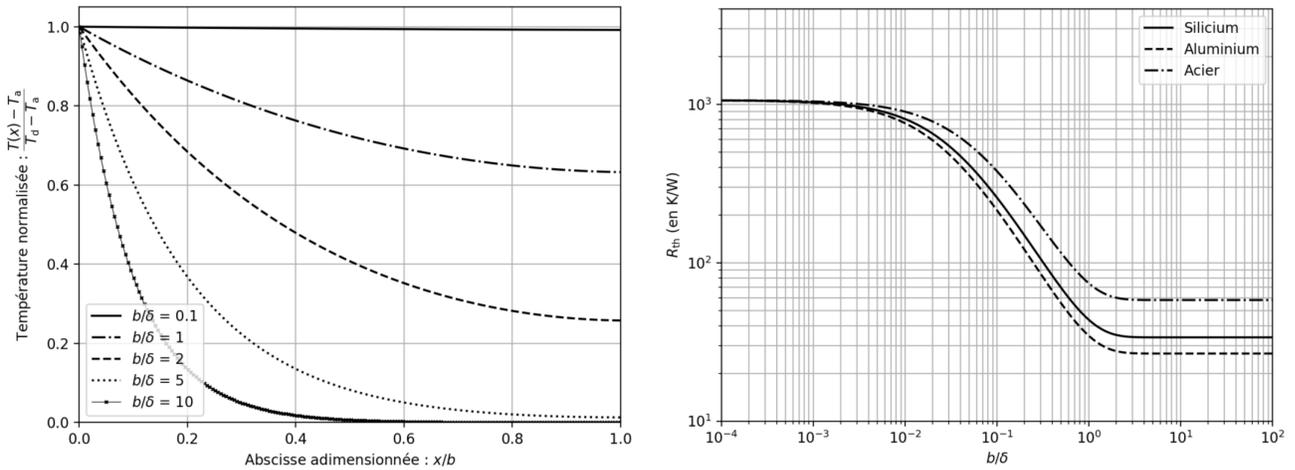


FIGURE 2 – Gauche : représentation graphique du champ de température dans une ailette en silicium pour différentes valeurs du rapport b/δ . Droite : évolution de la résistance thermique d’une ailette de rayon $a = 1$ mm, en présence de ventilation, en fonction du rapport b/δ .

Q.7 Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique R_{th} de l’ailette en silicium dans le cas où $b \gg \delta$.

Q.8 En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à $b = 2$ cm. En vous appuyant sur la FIGURE 2, justifier ces choix, puis estimer le nombre d’ailettes (de rayon $a = 1$ mm) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n’excède pas 60°C en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

Données :

Conductivité thermique du silicium :

$$\lambda_{\text{Si}} = 148 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

Conductivité thermique de l’aluminium :

$$\lambda_{\text{Al}} = 237 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

Conductivité thermique de l’acier :

$$\lambda_{\text{acier}} = 50 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

Coefficient conducto-convectif air-métal (air statique) :

$$h_s = 30 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

Coefficient conducto-convectif air-métal (air renouvelé) :

$$h_r = 300 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$