

exercice 1

DM 2: Corrigé

①

$$a) \quad x^2 - \underbrace{10x}_{3+7} + \underbrace{21}_{3 \times 7} = 0 \quad \text{donc } x = 3 \text{ ou } x = 7$$

$$\text{qs } \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda 3^n + \mu 7^n$$

$$n=0 : \lambda + \mu = 6$$

$$n=1 : 3\lambda + 7\mu = 26$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 6 \\ 0 + 4\mu = 8 \end{cases} \quad L_2 - 3L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 6 - 2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 4 \cdot 3^n + 2 \cdot 7^n}$$

$$\text{Enfin } \frac{u_n}{2 \cdot 7^n} = 1 + \frac{4}{2} \left(\frac{3}{7}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{d'où } \boxed{u_n \sim 2 \cdot 7^n}$$

b) Comme pour les éq. diff. :

$$u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n$$

$$v_{n+2} = 10v_{n+1} - 21v_n + 12n$$

en soustrayant :

$$(u-v)_{n+2} = 10(u-v)_{n+1} - 21(u-v)_n$$

(2)

Cqs * On recherche toutes les solutions de

$$E_0 : u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n$$

* On recherche une solution (particulière)

$$\text{de } E_1 : u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n$$

$$* E_0 : \underline{u_n = \lambda \cdot 3^n + \mu \cdot 7^n}$$

* E_1 : On essaye de trouver une suite du type $u_n = an + b$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a(n+2) + b = 10(a(n+1) + b) - 21(an + b) = 12n$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} [a - 10a + 21a]n + [2a + b - 10a - 10b + 21b] = 12n$$

on a 2 polynômes qui sont égaux sur $\mathbb{N}$, infini,

$$\text{donc } \begin{cases} 12a = 12 \\ -8a + 12b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \underline{u_n = n + \frac{2}{3}}$$

cq3 la suite (u_n) recherchée est de la forme: ③

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda \cdot 3^n + \mu \cdot 7^n + n + \frac{2}{3}$$

$$n=0 : \begin{cases} 0 = \lambda + \mu + \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$n=1 : \begin{cases} 0 = 3\lambda + 7\mu + \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = -\frac{2}{3} \\ 0 + 4\mu = -\frac{5}{3} + \frac{6}{3} \end{cases} \quad L_2 - 3L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{1}{12} \\ \lambda = -\frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\text{V} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -\frac{3}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{12} \cdot 7^n + n + \frac{2}{3}}$$

c) $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$, comme $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$
 $z = e^{i\theta}$ ou $z = e^{-i\theta}$ $e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = 1$

si $\theta \neq 0 (\pi)$, $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$ donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta}$

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 0 \\ u_{p+1} = \lambda e^{i(p+1)\theta} + \mu e^{-i(p+1)\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda 2i \sin(p+1)\theta = 0 \end{cases}$$

(4)

* Si $\sin(p+1)\theta \neq 0$, $\lambda = 0$ d'où $\mu = 0$ et $\forall n: u_n = 0$.

* $\sin(p+1)\theta = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid (p+1)\theta = k\pi$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \frac{k\pi}{p+1}$$

Posons $\boxed{\theta_0 = \frac{k\pi}{p+1}}$

On a alors, pour $\theta = \theta_0$, $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{p+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mu = -\lambda$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2\lambda i \sin \frac{n\pi}{p+1}$ et $\lambda \neq 0$

Comme pour $\theta = \pi$, on a $\theta_0 < \theta$,

d $\boxed{(u_n) \text{ vérifie la condition ssi } \exists \alpha \in \mathbb{C}^* \setminus$
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha \sin \frac{n\pi}{p+1}$

a)

n	1	2	3	4	5
$\frac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10	15

 et $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{cases} u_{\frac{n(n+1)}{2}} = n \\ u_{\frac{n(n+1)}{2} + 1} = n+1 \end{cases}$$

- c'est vraie pour $n=1$.

- Si c'est vraie pour n :

$$u_k = u_{k+1} = \dots = u_{\frac{n(n+1)}{2}} = n$$

$\xleftarrow{\hspace{10em}} \hspace{1em} \xrightarrow{\hspace{10em}}$
n termes égaux à n

puis $u_{\frac{n(n+1)}{2} + 1} = \dots = u_{k'}$ puis $u_{k'+1} = n+2$

$\xleftarrow{\hspace{10em}} \hspace{1em} \xrightarrow{\hspace{10em}}$
 $n+1$ termes égaux à $n+1$

Cq's $k' - \frac{n(n+1)}{2} = n+1$

d'où $k' = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

d'où $u_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = n+1$ et $u_{\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1} = n+2$

donc H_{n+1} vraie

(2)

$$\text{d'où } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{\frac{n(n+1)}{2}} = n}$$

Comme $\frac{13 \times 14}{2} = 91$ et $\frac{14 \times 15}{2} = 105$

n	91	92	...	100	...	105	106
u_n	13	14	...	14	...	14	15

$$\text{d'où } \boxed{u_{100} = 14}$$

b) Si $u_n = x$, c'est que $n \in \left] \frac{(x-1)x}{2}, \frac{x(x+1)}{2} \right]$
(exemple $u_n = 14$ si $n \in \left] 91, 105 \right]$)

x est donc le 1^{er} entier i tel que

$$\frac{i(i+1)}{2} \geq n$$

cqs

def $u(n)$:

$i = 1$

while $i \times (i+1) // 2 < n$:

$i = i + 1$

return i

Voir une
autre sol.

p (5)

c) * f est continue et C^1 sur $\mathbb{R}^+$ par TG. (3)

$$\forall n \in \mathbb{R}^+ : f'(n) = x + \frac{1}{2} > 0$$

n	0	$+\infty$
f'		+
f	0	$+\infty$

par le th de bijection
 f bijective de $\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{R}^+$

* Résolution $y = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\Leftrightarrow x^2 + n - 2y = 0$$

$$\Delta = 1 + 8y \geq 0 \text{ car } y \geq 0$$

$$\text{donc } n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8y}}{2}$$

comme $n \geq 0$, il faut $n = \frac{-1 + \sqrt{1+8y}}{2}$

$$\text{d'où } \boxed{\begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & \frac{-1 + \sqrt{1+8y}}{2} \end{array}}$$

d) Avec la b) $u_n = n \Leftrightarrow f(n-1) < n \leq f(n)$
 $\Leftrightarrow x-1 < f^{-1}(n) \leq n$

com f^{-1} st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$

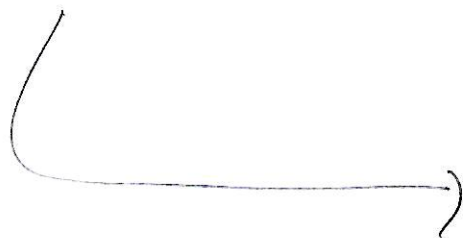
(4)

$$\text{d'où } u_n = n \Leftrightarrow -n \leq -f^{-1}(n) < -n+1$$

$\uparrow$ c'est pour avoir $\leq <$ de la
bonne note

$$\text{donc } -n = \lfloor -f^{-1}(n) \rfloor$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = - \left\lfloor \frac{1 - \sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor}$$



val $\phi(5)$

```

from math import *

def u(n):
    k=1
    while k*(k+1)//2<n:
        k=k+1
    return k

def v(n):
    pas=1
    nbpas=1
    for i in range(1,n):# on ne fait rien si n=1
        if nbpas==pas:
            pas=pas+1
            nbpas=1
        else:
            nbpas=nbpas+1
    return pas

def f(x):
    return(x*(x+1)/2)

def g(y):
    return (-1+sqrt(1+8*y))/2

def uu(n):
    return -floor(-g(n))

def verif(n):
    for i in range(1,n+1):
        if u(n)!=u(n):
            return False
    return True

for n in range(1,20):
    print([n,u(n),v(n),uu(n)],end=' ')

```

```

In [1]: (executing lines 1 to 36 of "uusitedm.py")
[1, 1, 1, 1] [2, 2, 2, 2] [3, 2, 2, 2] [4, 3, 3, 3]
[5, 3, 3, 3] [6, 3, 3, 3] [7, 4, 4, 4] [8, 4, 4, 4]
[9, 4, 4, 4] [10, 4, 4, 4] [11, 5, 5, 5] [12, 5, 5, 5]
[13, 5, 5, 5] [14, 5, 5, 5] [15, 5, 5, 5] [16, 6, 6, 6]
[17, 6, 6, 6] [18, 6, 6, 6] [19, 6, 6, 6]

```

```

In [2]: verif(1000)
Out[2]: True

```

exercice 3

(1)

1) et 2) Posons $f(n) = e^n - n^n$

f_n est C' sur $\mathbb{R}^+$ par TG.

$\forall n \in \mathbb{R}^+ \quad f'_n(n) = e^n - n n^{n-1}$ par faible.

Autre chose : $\begin{cases} e^n = n^n \\ n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = n \ln n \\ n > 0 \end{cases}$

$e^0 \neq 0^n, \forall n \geq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{n} \\ n > 0 \end{cases}$$

Posons $g(n) = \frac{\ln n}{n}$, g C' sur $\mathbb{R}^{++}$ par TG

$$\forall n > 0 \quad g'(n) = \frac{1}{n^2} - \frac{\ln n}{n^2} = \frac{1 - \ln n}{n^2}$$

n	0	e	$+\infty$
g'	+	0	-
g	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

par la Th. de la bijection,

g bijective

- de $]0, e]$ sur $]-\infty, \frac{1}{e}]$

- de $[e, +\infty[$ sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$

$$\frac{1}{n} \in]0, \frac{1}{e}] \Leftrightarrow n \geq e$$

$$\frac{1}{n} \in]-\infty, \frac{1}{e}] \Leftrightarrow n \geq e$$

comme $L e] = \mathbb{Z}$

d° $\forall n \geq 3$, l'équation admet exactement 2 solutions: u_n, v_n tq $0 < u_n \leq e \leq v_n$

(2)

) on a $u_n \leq e$ donc $\frac{\ln u_n}{u_n} = \frac{1}{n}$

$$\text{donc } 0 < u_n = n \ln u_n \leq e$$

$$\text{Ainsi } 0 < \ln u_n \leq \frac{e}{n} \quad ; \quad \ln u_n \rightarrow 0$$

$\downarrow$
 $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$

par critère séquentiel: $u_n \rightarrow e^0 = 1$

d° (u_n) cvg vers 1

Posons $u_n = 1 + \alpha_n$ et $\alpha_n \rightarrow 0$.

$$\frac{\ln(1 + \alpha_n)}{1 + \alpha_n} = \frac{1}{n} \quad , \quad \text{or } \begin{cases} \ln(1 + \alpha_n) \sim \alpha_n \\ 1 + \alpha_n \sim 1 \end{cases}$$

donc $\frac{\alpha_n}{1} \sim \frac{1}{n}$ d° $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$

par ex

exemple: $u_{100} \approx 1,01015 \dots$

4) Si (v_n) conv vers $l \in \mathbb{R}$, comme $\begin{cases} v_n \geq e \\ v_n \geq 3 \end{cases}$ ③
 $l \geq e$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln v_n}{v_n} \stackrel{T.E.}{=} \frac{\ln l}{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
 donc $l \ln l = 0$ soit $l = 1$ absurde

Comme $\frac{\ln v_n}{v_n} = \frac{1}{n}$, $v_n = n \ln v_n \geq n \ln e = n$
 par T.E., (v_n) divg vers $+\infty$

Comme $v_n \geq n$, $\underbrace{n \ln v_n}_{= v_n} \geq n \ln n \Rightarrow \underline{v_n \geq n \ln n}$

Comparons v_n à $n \ln n$: Posons $\alpha_n = \frac{v_n}{n \ln n}$

$$\frac{\ln v_n}{v_n} = \frac{1}{n} \Rightarrow v_n = n \ln v_n$$

$$\Rightarrow \ln v_n = \ln n + \ln(\ln v_n)$$

$$\Rightarrow \ln v_n - \ln(\ln v_n) = \ln n$$

$$\Rightarrow \ln v_n \left[1 - \frac{\ln(\ln v_n)}{\ln v_n} \right] = \ln n$$

$\rightarrow 1 \text{ (C.C.)}$

donc $\ln v_n \sim \ln n$, comme $v_n = n \ln v_n$

$$\alpha_n \sim \frac{n \ln n}{n \ln n} = 1$$

$$\text{cqs } d_n \rightarrow 1 \quad d' \quad \boxed{v_n \sim n \ln n}$$

(4)

5) Reprenon g :

$$g(v_n) - g(n \ln n) \stackrel{\text{TAF}}{=} (v_n - n \ln n) g'(c_n)$$

$$\text{avec } n \ln n < c_n < v_n \quad (*)$$

$$\text{On } g'(c_n) = \frac{1 - \ln c_n}{c_n^2}$$

$$(*) \text{ donne } 1 < \frac{c_n}{n \ln n} < \frac{v_n}{n \ln n} \quad \text{donc } \underline{c_n \sim n \ln n}$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $1 \quad 1 \quad \text{T.E.}$

$$\begin{aligned} \text{cqs } 1 - \ln c_n &\sim -\ln c_n = -\ln(n \ln n (1 + d_n)) \\ &\stackrel{\text{et } d_n \rightarrow 0}{=} -\ln(n \ln n) - \ln(1 + d_n) \\ &\sim -\ln(n \ln n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\text{cqs } g'(c_n) \sim \frac{-\ln(n \ln n)}{(n \ln n)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{On } g(v_n) - g(n \ln n) &= \frac{1}{n} - \left(\frac{\ln n + \ln(\ln n)}{n \ln n} \right) \\ &= -\frac{\ln(\ln n)}{n \ln n} \end{aligned}$$

$$d'_{av} = \frac{-\ln(\ln n)}{n \ln n} \sim (x_n - n \ln n) \times \left(\frac{-\ln(\ln n)}{(n \ln n)^2} \right) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{cgs } x_n - n \ln n &\sim \frac{\ln(\ln n)}{n \ln n} \times \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln(\ln n)} \\ &\sim \frac{\ln(\ln n)}{\ln(n) + \ln(\ln n)} \times n \ln n \\ &\sim \frac{\ln(\ln n)}{\cancel{\ln n}} \times \cancel{n} \cancel{\ln n} \\ &\sim n \ln \ln n \end{aligned}$$

$$d' \quad \boxed{x_n = n \ln n + n \ln(\ln n) + o(\ln(\ln n))}$$

exempl nri nph

$$x_{10000} \approx \underline{116671}, 14 \dots$$

$$n \ln n + n \ln(\ln n) \approx \underline{114306}, 67 \dots$$

or n = 10000

exercice 4*

①

$$a) |z_n| = \prod_{k=1}^n \left| 1 + \frac{i}{k} \right| = \sqrt{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)}$$

$$\text{Posons } P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right), \text{ comme } 1 + \frac{1}{k^2} > 0,$$

$$S_n = \ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)$$

$$\text{Comme } \ln \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \sim \frac{1}{k^2} > 0 \text{ et que } \left(\sum \frac{1}{k^2} \right) \text{ cvg,}$$

$$\text{par T.E., } \left(\sum \ln \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \right) \text{ cvg}$$

$$\text{Posons } \pi = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \quad (\pi \simeq 1,3...)$$

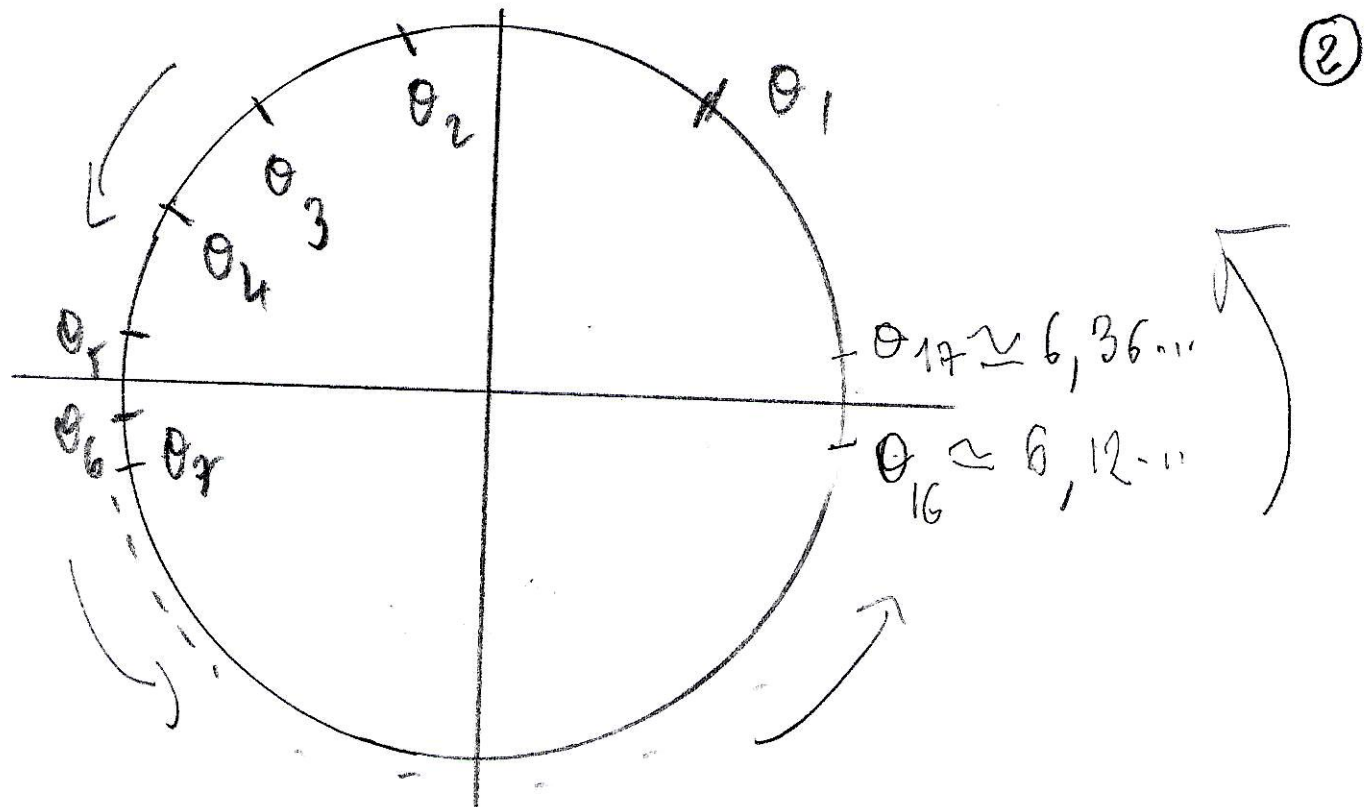
$$\text{d'o } \boxed{(|z_n|) \text{ cvg vers } e^\pi \simeq 3,6...}$$

$$b) z_n = \rho_n e^{i\theta_n} \text{ avec } \theta_n = \sum_{k=1}^n \text{Arctan} \frac{1}{k} \quad \text{car } \text{Re} \left(1 + \frac{i}{k} \right) > 0$$

$$\text{on a } \rho_n \rightarrow e^\pi$$

$$\text{Etude de } \theta_n \quad \text{on a } (\theta_n) \nearrow \text{ et } \lim \theta_n = +\infty$$

$$\text{car } \left(\sum \text{Arctan} \frac{1}{k} \right) \text{ Dvg avec } \text{Arctan} \frac{1}{k} \sim \frac{1}{k} > 0 \text{ et TC}$$
$$\text{et } \theta_{n+1} - \theta_n \rightarrow 0$$



Par exemple 1 est val. d'adh de $(e^{i\theta_k})$ car

$$\theta_{17} \approx 2\pi, |\theta_{17} - 2\pi| \approx 0,083 \dots$$

$$\theta_{53} \approx 4\pi, |\theta_{53} - 4\pi| \approx 0,004 \dots$$

Montrons que $\forall u = e^{i\theta} \in U$, u est val. d'adh. de $(e^{i\theta_k})$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$$* \exists k \geq N \mid \text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \varepsilon \quad \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0 \right)$$

$$* \text{ Soit } n \in \mathbb{N} \mid 2n\pi + \alpha \geq \theta_k$$

$$\text{ Comme } \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = +\infty \quad \exists k_1 \geq k+1 \mid \theta_{k_1} \geq 2n\pi + \alpha$$

Soit h_0 le 1^{er} entier tel que :

(3)

$$k_0 \geq k+1 \text{ et } \theta_{h_0} \geq 2n\pi + \alpha$$

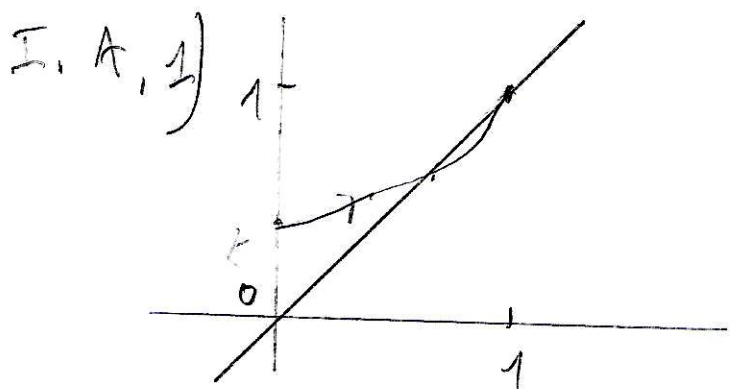
$$\text{on a donc } \theta_{h_0-1} < 2n\pi + \alpha \leq \theta_{h_0}$$

$$\text{d'où } |\theta_{h_0} - (2n\pi + \alpha)| \leq \theta_{h_0} - \theta_{h_0-1} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{h_0}} \leq \varepsilon$$

$$\text{enfin } |e^{i\theta_{h_0}} - e^{i\alpha}| = |e^{i\theta_{h_0}} - e^{i(\alpha + 2n\pi)}|$$

$$\leq |\theta_{h_0} - (\alpha + 2n\pi)| \quad \begin{array}{l} \text{inégalité} \\ \text{de A.F.} \end{array} \leq \varepsilon$$

$$\text{d'où } \boxed{\operatorname{val}((a_n)) = S(0, e^n) \quad \begin{array}{l} \text{cercle de centre} \\ 0 \text{ et de rayon } e^n \end{array}}$$



f est croissante et convexe
sur $[0, 1]$.

Comme $f' \geq 0$, f est croissante sur $[0, 1]$ d'où (u_n)
est monotone, $u_1 = f(0) \in [0, 1]$, donc $u_1 \geq u_0$
d'où (u_n) est croissante. Comme $[0, 1]$ est stable par f ,
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0, 1]$: (u_n) est donc bornée

Alors Par TLB : (u_n) converge

I. A. 2) Soit $A = \{a \in [0, 1] \mid f(a) = a\} \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ car
 $1 \in A$, donc A possède une borne inférieure α .

$\alpha \in \bar{A}$ et il existe (a_n) suite de A telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

Comme f est C^0 sur $[0, 1]$, par continuité séquentielle, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\alpha)$

ex $f(x) = x$ et $x \in A$ d'où $x = \min A$

(2)

cl' : x est la plus petite solution de $f(x) = x$

I.A.3) $\begin{array}{c|cc} & 0 & x_f \\ \hline f & a & n_f \end{array}$ $(x = n_f)$
 $I = [0, n_f]$ est stable / f
 car $f(I) = [a, n_f] \subset I$

1^{er} cas : $f(0) = 0$; alors $n_f = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad n_f = 0$

d'où (n_n) ou $\forall n \quad 0 = n_f$

2nd cas : $f(0) = a > 0$, comme $(n_n) \nearrow$, $\forall n \geq 1$;

$n_n \geq n_1 = a$ d'où $l \geq a$. Or $f(l) = l$ car

f est continue , comme n_f est la plus petite sol. de $f(n) = n$ et $l \in I = [0, n_f]$, on conclut :

cl' $\boxed{l = n_f}$

I.B) Si $m = f'(1) > 1$, posons $g(n) = f(n) - x$, $g'(n) = f'(n) - 1$ et

$g''(n) = f''(n) \geq 0$ d'où ,

x	0	c	d	1
g''	+	+	+	
g'	< 0	0	0	$n-1 > 0$
g	$\nearrow$		$\searrow$	0

③

$$\begin{cases} g'(0) = f'(0) - 1 < 0 \\ g'(1) = n-1 > 0 \end{cases}$$

donc $0 < c \leq d < 1$

Attention : g'' n'est que positive donc g' n'est que croissante et non strictement $\rightarrow$ d'où l'intervalle $[c, d]$

Par stricte décroissance de f sur $[d, 1]$, on a $g(d) < 0$

comme $g(0) = f(0) \geq 0$, par valeur intermédiaire :

$$\exists \gamma \in [0, d] \text{ tel } g(\gamma) = 0 \text{ d'où } 0 \leq n_f \leq \gamma \leq d < 1$$

d' : $\boxed{n_f \in [0, 1[}$

I.c) Utilisons la convexité : f est au dessus de ses tangentes car f est convexe ($f'' \geq 0$).

En $n_0 = 1$, la tangente à f est $T / y - f(1) = f'(1)(n-1)$

soit $T / y = 1 + m(n-1)$ et donc :

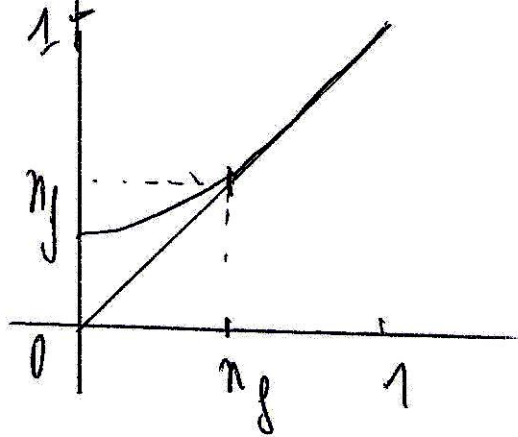
$$\forall n \in [0, 1) \quad f(n) \geq 1 + m(n-1)$$

$$\text{donc } f(n) - n \geq 1 + m(n-1) - n = (m-1)n + 1 - m = (m-1)(n-1) \geq 0$$

Si $\eta_f < 1$, alors $f(\eta_f) - \eta_f = 0 \geq \underbrace{(n-1)(\eta_f-1)}_{\neq 0} \geq 0$ (4)

alors $n = 1$ et $\forall n \in [0, 1] f(n) \geq n$.

D'autre part f est sous la corde $[(\eta_f, f(\eta_f)), (1, f(1))]$



Donc $\forall n \in [\eta_f, 1] f(n) = n$

d'où $\forall n \in [\eta_f, 1] f''(n) = 0 : f''(1) = 0$: A l'ordre

$\mathcal{C}_1$: $\boxed{\eta_f = 1}$

Avec le tableau de I, A. 3), $J = [0, \eta_f[= [0, 1[$ est stable par f et $u_0 \in J$, donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in J$

$\mathcal{C}_2$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 1}$

I, D, 1) Utilisons T.Y. $f(x) = f(1) + \overbrace{f'(1)}^{=1} (x-1) + \overbrace{\frac{f''(1)}{2}}^{=1} (x-1)^2 + o((x-1)^2)$
 $\hookrightarrow$ à l'ordre 2 en 1
car $f''(1) \neq 0$

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{1-f(u_n)} - \frac{1}{1-u_n}$$

$$n = u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ d'où } ; \quad (5)$$

$$= \frac{f(u_n) - u_n}{(1-f(u_n))(1-u_n)} = \frac{\cancel{1} + (\cancel{u_n} - 1) + \frac{f''(1)}{2}(u_n - 1)^2 + o((u_n - 1)^2)}{\left[-(\cancel{u_n} - 1) - \frac{f''(1)}{2}(u_n - 1)^2 + o((u_n - 1)^2) \right](1-u_n)}$$

$$= \frac{f''(1)/2 + o(1)}{1 + o(1)}$$

simplification par $(1-u_n)^2$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f''(1)}{2}$$

$$d' : \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}}$$

102) Posons $\alpha_n = \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \sim \frac{f''(1)}{2} = \beta_n > 0$

comme $(\sum \beta_n)$ div, par TC $(\sum \alpha_n)$ div aussi et avec

les sommations de relation de comparaison, on a :

$S_n(\alpha) \sim S_n(\beta)$ soit par télescope :

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_0} \sim \frac{f''(1)}{2} (n+1)$$

comme $\varepsilon_n \rightarrow 0^+, \frac{1}{\varepsilon_n} \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_0} \sim \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}$

$$d'où \quad \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} \sim \frac{f''(1)(n+1)}{2}$$

$$d' : \boxed{1 - u_n = \varepsilon_n \sim \frac{2}{f''(1)n}}$$

$$I.E.1) \quad \varepsilon_{n+1} = 1 - f(u_n) = -m(u_n - 1) + o(|u_n - 1|) \\ = m\varepsilon_n + o(|\varepsilon_n|)$$

(6)

$$\text{d'où } \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$$

Or $m \geq 0$ car $f' \geq 0$ et $m < 1$ (c'est l'hypothèse)

on conclut par d'Alembert : $(\sum \varepsilon_n)$ cvg Absolument

$$\ln\left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n}\right) = -(n+1)\ln m + n\ln m + \ln \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \quad \text{DL (TV)}$$

on suppose $m > 0$

$$= -\ln m + \ln\left(\frac{m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2)}{\varepsilon_n}\right)$$

$$= -\ln m + \ln\left(m - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)\right)$$

$$= -\ln m + \cancel{\ln m} + \ln(1 + o(\varepsilon_n))$$

$$= o(\varepsilon_n) \quad \text{d'où par TC : } \left(\sum \ln\left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n}\right)\right) \text{ cvg}$$

$$I.E.2) \quad \ln\left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n}\right) = \ln \alpha_{n+1} - \ln \alpha_n \quad \text{avec } \alpha_n = m^{-n} \varepsilon_n$$

Par correspondance bijective suite-série, la suite $(\ln \alpha_n)$ cvg.

Posons $l = \lim \ln \alpha_n$, $\alpha_n \rightarrow e^l = c > 0$, d'où $\alpha_n \sim c$

cq's $\varepsilon_n \sim c m^n$, comme $\varepsilon_n = 1 - u_n$, d'où $1 - u_n \sim c m^n$