Problème 1 ($e_3 a$)

DS4 : corrigé

I 1°) $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leqslant P_{n+1} = u_{n+1} P_n \leqslant P_n$ car $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$)

donc (P_n) est décroissante

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \geqslant 0$ (P_n) minorée

Par TLM ; (P_n) converge d'où ; $\boxed{\prod_{k=0}^{\infty} u_n \text{ existe}}$

2°) * $\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$= \frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

d'où $\boxed{\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ n'existe pas}}$

* $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

d'où : $\boxed{\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0}$

* $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1) \times \prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{n} k\right)^2} = \frac{(n-1)!\,\frac{(n+1)!}{2}}{(n!)^2}$

$= \frac{(n-1)! \times \frac{(n+1)!}{2}}{(n!)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

d'où $\boxed{\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}}$

3°) Etudions $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1+u_k)$

comme $|u_k| < 1$ on a $1+u_k > 0$ donc $P_n > 0$

d'où $S_n = \ln P_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)$

Comme $(\sum u_n)$ cvg on a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $|\ln(1+u_k)| \sim |u_k| \geq 0$

a) Si $(\sum u_k)$ Abs cvg alors $(\sum \ln(1+u_k))$ est Absolument convergente par T.C. donc (S_n) admet une limite ℓ d'où (P_n) cvg vers $e^{\ell} > 0$

ie $\boxed{(\prod (1+u_n)) \text{ cvg}} \boxed{\left(\text{et } \prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n) = e^{\ell} > 0\right)}$

b) Si $(\sum u_n)$ cvg $\ln(1+u_k) \sim u_k$ est insuffisant

c) on fait donc un DL :

③

$$\ln(1+u_k) = u_k - \frac{u_k^2}{2} + o(u_k^2)$$

$$= u_k - v_k$$

avec $(\sum u_k)$ cvg et $v_k = \frac{u_k^2}{2} + o(u_k^2)$.

Donc $v_k \sim \frac{u_k^2}{2} \geq 0$

b) si $(\sum v_k)$ cvg Alors $(\sum \ln(1+u_k))$ cvg par TC et linéarité comme somme de 2 séries cvg.

donc la suite (P_n) cvg (comme + haut) vers $e^{l} > 0$

ie $\boxed{(\prod(1+u_n))\text{cvg}}$.

c) si $(\sum v_k)$ Dvg Alors $\sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

car c'est une série à termes positifs

d'où $\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \infty = -\infty$ (par T.G.)

d'où $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\infty} = 0$ (critère séquentiel)

cl $\boxed{(\prod(1+u_n)) \text{ existe et } \prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n) = 0}$

d) Si $(\sum u_n)$ cvg absolument ou si $(\sum u_n)$ et $(\sum u_n^2)$ cvg

alors $\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n) = e^{\lim S_n} = \underline{\underline{e^{l} > 0}}$

Comme $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$, si $(\sum u_n)$ cvg absolument alors $(\sum u_n^2)$ cvg par TC. On peut conclure :

$$\boxed{\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n) > 0 \iff (\sum u_n) \text{ cvg et } (\sum u_n^2) \text{ cvg}}$$

e) * $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$

Comme $\left(\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$ et $\left(\sum \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)^2\right) = \left(\sum \frac{1}{k^2}\right)$ convergent, le produit infini existe et est > 0. D'où ce produit $P = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} P_{2n}$

Or $P_{2n} = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}_{1} \times \cdots \times \underbrace{\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n-1}{2n}}_{1} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2$

d'où $\boxed{\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}}$

* $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, on a $(\sum u_n)$ cvg et $(\prod u_n^2)$ dvg

d'où $\boxed{\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = 0}$

II 1°) $|1+\frac{i}{n}|^2 = 1+\frac{1}{n^2}$ donc si $P_n = \prod_{k=1}^{n} |1+\frac{i}{k}|$ alors

$P_n = \sqrt{\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k^2})}$ et comme $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ cvg abs. on a

avec la 4°) a), (P_n) qui cvg vers $\sqrt{\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})}$

cl° : $\boxed{\prod_{n=1}^{\infty} |1+\frac{i}{n}| \text{ existe (et } >0)}$

2°) $\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k) - 1\right| = |(1+z_1)\cdots(1+z_n) - 1|$ on développe tout :

$= |\cancel{1} + z_1 + \cdots + z_n + z_1 z_2 + \cdots + z_{n-1} z_n + z_1 z_2 z_3 + \cdots\cdots + z_1 z_2 \cdots z_n - \cancel{1}|$

$\leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + |z_1||z_2| + \cdots + |z_{n-1}||z_n| + \cdots + |z_1|\cdots|z_n|$

inégalité triangulaire

cette expression est la même qu'au dessus avec les modules donc :

$|z_1| + \cdots + |z_n| + |z_1 z_2| + \cdots + |z_1|\cdots|z_n| = \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|) - 1$

cl $\boxed{\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k) - 1\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|) - 1}$

Nota : Par récurrence, ça marche aussi !

3°) $\forall n \geq p+1 \quad |P_n - P_p| = \left|P_p\left(\prod_{k=p+1}^{n}(1+u_k) - 1\right)\right|$

$$\leq \prod_{k=0}^{p}(1+|u_k|)\left(\prod_{k=p+1}^{n}(1+|u_k|) - 1\right) \text{ avec le } 2°)$$

$$\leq P'_n - P'_p = |P'_n - P'_p|$$

où $P'_n = \prod_{k=0}^{n}(1+|u_k|)$

Or cette suite cvg grâce au I 5°) a) donc elle est de Cauchy donc la suite (P_n) aussi donc :

la suite (P_n) cvg ie $\boxed{\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n) \text{ existe}}$

4°) Posons $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k$

On a $\underline{P_n = e^{iS_n}}$

* si (S_n) cvg vers α alors (P_n) $\underline{\text{cvg}}$ vers $e^{i\alpha}$

* si (P_n) cvg vers l. On a $|l| = 1$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ $|P_n| = 1$ d'où $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid l = e^{i\alpha}$

d'autre part comme $u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \longrightarrow \frac{l}{l} = 1$ on a $\underline{\theta_n \to 0}$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists k_n \in \mathbb{Z} \mid -\pi < S_n - \alpha - 2k_n\pi \leq \pi$

donc $e^{i(S_n - \alpha - 2k_n\pi)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ posons $\alpha_n = S_n - \alpha - 2k_n\pi$

$\alpha_n \in [-\pi, \pi]$ et $e^{i\alpha_n} \longrightarrow 1$ donc $\cos\alpha_n = \cos|\alpha_n| \longrightarrow 1$ $(\mathrm{Re}(e^{i\alpha_n}))$

or $|\alpha_n| \in [0, \pi]$ donc $\mathrm{Arccos}(\cos|\alpha_n|) = |\alpha_n| \longrightarrow \mathrm{Arccos}\, 1 = 0$

donc $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $\alpha_{n+1} - \alpha_n = S_{n+1} - S_n - 2k_{n+1}\pi + 2k_n\pi \longrightarrow 0$

Comme $S_{n+1} - S_n = \theta_{n+1} \longrightarrow 0$ on obtient :

$k_{n+1} - k_n \longrightarrow 0$ et comme $k_n \in \mathbb{Z}$ il faut :

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad k_n = k_{n_0} = p \in \mathbb{Z}$

Comme $S_n = \alpha_n + \alpha + 2k_n\pi$ on a :

(S_n) cvg vers $0 + \alpha + 2p\pi$ ie $(\Sigma \theta_n)$ cvg

$\underline{\mathrm{cl}}$ $\boxed{(P_n) \text{ cvg} \Leftrightarrow (S_n) \text{ cvg}}$

5°) $1 + \frac{i}{n} = |1 + \frac{i}{n}| e^{i\theta_n}$ avec $\theta_n = \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$ (démontrez-le)

Or $\theta_n \sim \frac{1}{n} > 0$ donc $(\Sigma \theta_n)$ Dvg donc $(\Pi e^{i\theta_n})$ Dvg

Comme $(\Pi |1 + \frac{i}{n}|)$ cvg vers un réel non nul vu le I 4°) a), si $\Pi(1 + \frac{i}{n})$ convergeait vers ℓ

on aurait $\prod_{n=0}^{\infty} e^{i\theta_n} = \dfrac{\ell}{\prod_{n=0}^{\infty} |1 + \frac{i}{n}|}$ absurde

$\underline{\mathrm{cl}}$ $\boxed{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{i}{n}) \text{ n'existe pas}}$

Problème 2

Banque Agro-Véto

A. 1) $\{(X_n=1), (X_n=2), (X_n=3)\}$ forme un S.C.E. de Ω donc

$$P(X_{n+1}=1) = \sum_{i=1}^{3} P(X_{n+1}=1 / X_n=i)\, P(X_n=i)$$

$$= 0 \cdot P(X_n=1) + \frac{1}{2} P(X_n=2) + \frac{1}{4} P(X_n=3)$$

de m̂ $P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2} P(X_n=1) + 0 \cdot P(X_n=2) + \frac{1}{4} P(X_n=3)$

et $P(X_{n+1}=3) = \frac{1}{2} P(X_n=1) + \frac{1}{2} P(X_n=2) + \frac{1}{2} P(X_n=3)$

cl° : $\boxed{Y_{n+1} = A Y_n \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$

2) Par récurrence sur n : $A^0 Y_0 = Y_0$ et si $Y_n = A^n Y_0$,

$Y_{n+1} = A Y_n = A \cdot A^n Y_0 = A^{n+1} Y_0$ cl° : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : Y_n = A^n Y_0}$

3.) $\forall n \geq 1$, $P(X_n=3) = \frac{1}{2}\left[P(X_{n-1}=1) + P(X_{n-1}=2) + P(X_{n-1}=3)\right]$

$= \frac{1}{2} P(\Omega)$ SCE

cl° : $\boxed{\forall n \geq 1 : P(X_n=3) = \frac{1}{2}}$

2

4 a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/8 & 3/8 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $A^2(2A - I) = A$

On en déduit $2A^3 - A^2 = A$ d'où $\boxed{A^3 = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A}$

b) Par récurrence forte, c'est vrai pour $n=1$ avec $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$ puis pour $n = 2$ avec $u_2 = 1$ et $v_2 = 0$

Supposons que ce soit vrai jusqu'à n avec $n \geq 2$.

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = A(u_n A^2 + v_n A) = u_n A^3 + v_n A^2$$

$$= u_n\left(\frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A\right) + v_n A^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2} u_n + v_n\right)}_{\in \mathbb{R}} A^2 + \underbrace{\frac{1}{2} u_n}_{\in \mathbb{R}} A$$

d'où : $\boxed{\forall n \geq 1, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2 \mid A^n = u_n A^2 + v_n A}$

c) On peut donc choisir $\boxed{\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \end{cases}}$

On en déduit $u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n$

d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n}$.

d) (u_n) vérifie une récurrence linéaire double.

$r^2 = \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} \Rightarrow r = 1$ (racine evid.) ou $r = \frac{-1}{2}$

On en déduit $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \mid \forall n\geq 1 : u_n = \lambda+\mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ③

Pour $n=1$, on a $u_1 = 0 = \lambda - \frac{1}{2}\mu$
$n=2$, on a $u_2 = 1 = \lambda + \frac{1}{4}\mu$ d'où $\begin{cases}\lambda = 2/3\\ \mu = 4/3\end{cases}$

Cql : $\forall n\in\mathbb{N}^* : u_n = \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

On en déduit avec le c), $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

ou $v_n = \frac{u_{n-1}}{2}$

d'où $v_n = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

d° : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* : u_n = \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } v_n = \frac{1}{3}-\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

5) On a donc $Y_n = A^n Y_0 = (u_n A^2 + v_n A)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ d'où

d° : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \begin{cases} P(X_n=1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ P(X_n=2) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ P(X_n=3) = \frac{1}{2}\end{cases}}$

A.II 1) Si on démarre de $i=4$ ou $i=5$, on ne bouge plus

donc $\boxed{a_{4,4} = a_{5,5} = 1 \text{ et } a_{4,5} = a_{5,4} = 0}$

2) Notons A : " $\mathcal{A}_2$ est absorbé en 4 sachant que $X_0 = 1$ "

B_i : " le 1er bond de la particule l'envoi en i "

(B_1, B_2, B_3) est un SCE car $B_4 = B_5 = \emptyset$ et avec la F.P.T., $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A/_{B_i})\mathbb{P}(B_i) = x \; (= a_{1,4})$

Or $\mathbb{P}(B_1) = \frac{3}{5}$, $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_3) = \frac{1}{5}$ et d'autre part :

$\mathbb{P}(A/_{B_i}) = a_{i,4}$ car tout se passe comme si on démarrait de i (" $X_0 = i$ ")

Avec leurs notations, on a : $\underline{\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}t = x}$

On fait de même si $X_0 = 3$: $\underline{\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = z}$

Pour A : " $\mathcal{A}_2$ est absorbé en 4 sachant que $X_0 = 2$ ",

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(A/_{B_i})\mathbb{P}(B_i)$ et comme $\mathbb{P}(B_4) = \frac{2}{5}$

et $\mathbb{P}(A/_{B_4}) = a_{4,4} = 1$, on a $\underline{\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + \frac{2}{5} \times 1 = y}$

d° : $\boxed{\text{On a le système demandé}}$

Sommons ces 3 lignes : $x + \frac{3}{5}y + \frac{3}{5}z + \frac{2}{5} = x + y + z$ (5)

$$\Leftrightarrow \quad y + z = 1$$

La première ligne devient : $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} = x \Leftrightarrow \underline{x = \frac{1}{2}}$

La troisième ligne : $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = z \Leftrightarrow \underline{z = \frac{3}{10}}$

et avec $y+z=1$, $\underline{y = \frac{7}{10}}$

on a bien raisonné par équivalence : $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 \\ L_1 \\ L_3 \end{cases}$

d'où : $\boxed{a_{1,4} = \frac{1}{2} \ ; \ a_{2,4} = \frac{7}{10} \ ; \ a_{3,4} = \frac{3}{10}}$

Le graphe est parfaitement symétrique par rapport à la verticale passant par le sommet 1. Par exemple partir de 2 et arriver en 5 est symétrique de partir en 3 et arriver en 4.

On a donc $a_{1,5} = a_{1,4}$; $a_{2,5} = a_{3,4}$ et $a_{3,5} = a_{2,4}$

d'où : $\boxed{a_{1,5} = \frac{1}{2} \ ; \ a_{2,5} = \frac{3}{10} \ ; \ a_{3,5} = \frac{7}{10}}$

3) Notons A_j : "$\mathcal{A}_2$ est absorbé en j"

A : "$\mathcal{A}_2$ est absorbé en 4 ou 5"

On a $A = A_4 \cup A_5$ réunion disjointe

avec le SCE $(X_0 = i)_{i \in [\![1,5]\!]}$ et la F.P.T., on a :

$$P(A) = P(A_4) + P(A_5)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \left[P(A_4 / X_0 = i) P(X_0 = i) + P(A_5 / X_0 = i) P(X_0 = i) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \underbrace{(a_{i,4} + a_{i,5})}_{= 1,\ \forall i \in [\![1,5]\!]} P(X_0 = i) = P\left(\coprod_{i=1}^{5} (X_0 = i) \right) = P(\Omega) = 1$$

(vu les valeurs calculées au 1) et 2))

cl° : $\boxed{P(\text{"}\mathcal{A}_2 \text{ est absorbé"}) = 1}$

4) On veut calculer $P(X_0 = 3 / A_4)$ notation du 3)

Avec Bayes, on a $P(X_0 = 3 / A_4) = \dfrac{P(X_0 = 3)}{P(A_4)} \underbrace{P(A_4 / X_0 = 3)}_{= a_{3,4}}$,

$P(X_0 = 3) = \dfrac{1}{3}$ (loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$)

$$P(A_4) = \sum_{i=1}^{3} P(A_4 / X_0 = i) P(X_0 = i) = \frac{1}{3}(a_{1,4} + a_{2,4} + a_{3,4}) = \frac{1}{2}$$

donc $P(X_0 = 3 / A_4) = \dfrac{1/3}{1/2} \dfrac{3}{10}$ cl° : $\boxed{P(X_0 = 3 / A_4) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2}$

B.I. 1/ $\forall \omega \in \Omega$: $\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) - X_{k-1}(\omega) = X_n(\omega) - X_0(\omega)$ (somme télescopique)

or $\forall \omega \in \Omega$, $X_0(\omega) = 0$ car la particule part tjs de 0 à $n=0$.

d'où : $\boxed{X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k}$

2/ Par linéarité (pour l'espérance) et l'indépendance (pour la variance)

On a : $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(U_k)$ et $V(X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(U_k)$

Loi de U_k : $U_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(U_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$

↳ (Rademacher)

donc $E(U_k) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = \underline{0}$

$V(U_k) = E(U_k^2) - E(U_k)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \underline{1}$

↳ Köenig

d'où : $\boxed{E(X_n) = 0 \quad \text{et} \quad V(X_n) = n}$

B II 1) $X_0 = 0$, donc $X_0(\Omega) = \{0\} \subset \mathcal{P} = \{$entiers pairs$\}$

d'où $X_1(\Omega) = \{-1, 1\} \subset \mathcal{I} = \{$entiers impairs$\}$

et par récurrence, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ X_{2k}(\Omega) \subset \mathcal{P} \text{ et } X_{2k+1}(\Omega) \subset \mathcal{I}}$

cqfd $\boxed{P(X_{2k+1}=0)=0,\ \forall k\in\mathbb{N}}$

2) Etudions $(X_{2k}=0)$: $(X_{2k}=0)=\left(\sum_{i=1}^{2k} U_i=0\right)$

Comme $U_i(\Omega)=\{-1,1\}$, pour obtenir 0, il faut que $|\{i\in[\![1,2k]\!] \mid U_i=1\}|=k$ (idem pour -1).

On est donc en présence d'1 tirage de $2k$ valeurs de l'ensemble $\{-1,1\}$ avec $\underset{\text{4avoir}(+1)}{\text{succès}}=\underset{\text{4avoir}(-1)}{\text{echec}}=\frac{1}{2}$ et on veut k succès, grâce aux lois binomiales :

$$P(X_{2k}=0)=P(Y=k) \text{ avec } Y\sim\mathcal{B}(2k,1/2)$$

d'où : $\boxed{P(X_{2k}=0)=\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}}$

3) Avec les mêmes notations qu'au 2), pour les $2k$ tirages, si l'on note p le nb de succès $(+1)$ et q le nb d'échecs (-1), on veut $p+q=2k$ et $p\times 1+q(-1)=2\ell$ avec $\ell\in[\![0,k]\!]$ donc $\begin{cases}p+q=2k\\ q-q=2\ell\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p=k+\ell\\ q=k-\ell\end{cases}$

On a donc $\mathbb{P}(X_{2h} = 2\ell) = \mathbb{P}(Y = k+\ell) = \frac{1}{4^k}\binom{2h}{k+\ell}$ 9

Si $\ell \in [\![-h, 0]\!]$, on échange succès et échec ($\hat{m}$ proba)

d'où : $\boxed{\forall h \in \mathbb{N},\ \forall \ell \in [\![-h, h]\!] : \mathbb{P}(X_{2h} = 2\ell) = \frac{1}{4^k}\binom{2h}{k+\ell}}$

et $\binom{2h}{k-\ell} = \binom{2h}{2h-(k-\ell)} = \binom{2h}{h+\ell}$

B III 1) Au temps $t=0$, $X_0 = 0$, puis au temps $t=1$, on a $X_1 = \varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$ et comme on veut $X_2 = 0$, il faut faire un pas de $-\varepsilon$;

S.C.E. et F.P.T.

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0 / X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 0 / X_1 = -1)\,\mathbb{P}(X_1 = -1)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où : } \boxed{r_1 = \frac{1}{2}}$$

2) $(X_{2n} = 0) = \coprod_{k=0}^{\infty} (X_{2n} = 0) \cap (T = 2h)$ car $((T = 2h))_{h \in \mathbb{N}}$ S.C.E.

* $(X_{2n} = 0) \cap (T = 0) = \emptyset$ car $T = 0$ si $\forall p \in \mathbb{N}^*, X_p \neq 0$

* $(X_{2n} = 0) \cap (T = 2h) = \emptyset$, $\forall h \geqslant n+1$ car si $X_{2n}(w) = 0$ alors $T(w) \leqslant 2n$ cqs : $(X_{2n} = 0) = \coprod_{k=1}^{n} (X_{2n} = 0) \cap (T = 2k)$

$$P\big((X_{2n}=0)\cap(T=2k)\big)=P\left(X_{2n}=0 \,/\, T=2k\right)\times \underbrace{P(T=2k)}_{r_k}$$

Si $T=2k$

temps	0	1	...	$2k$	...	$2n$
X	0	± 1		0		
temps décalé				0		$2n-2k$

Le processus aléatoire de $2k$ à $2n$ est identique de 0 à $2n-2k$ donc $P\left(X_{2n}=0 \,/\, T=2k\right)=q_{n-k}$

d'où : $\boxed{\forall n\geq 1 \quad q_n=\sum_{k=1}^{n} q_{n-k}\, r_k}$

3) $q_2=q_1 r_1+q_0 r_2=\frac{1}{4^1}\binom{2}{1}\times\frac{1}{2}+r_2=\frac{1}{4^2}\binom{4}{2}$

d'où : $\boxed{r_2=\frac{1}{8}}$

4) D'après la 2) $q_n=\sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k}\left(q_{k-1}-q_k\right)+\underbrace{q_0}_{=1} r_n$ hyp. de récurrence

donc $r_n=q_n-\sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k}q_{k-1}+\sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k}q_k$

Or $q_n=q_{n-0}q_0$ donc s'annule avec pour $k=0$

Effectuons un cdv de la 1^{re} Σ : $k'=k-1$

d' $\boxed{r_n = -\sum_{k'=0}^{n-2} q_{n-k-1} q_k + \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} q_k}$

5°) $\forall n \geqslant 3 \quad r_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^{n-k}} \frac{1}{4^k} \binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k} \leftarrow S$

$$- \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{4^{n-k-1}} \frac{1}{4^k} \binom{2n-2k-2}{n-k-1} \binom{2k}{k} \leftarrow S'$$

$$S = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{4^n}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} - \binom{2n}{n}\binom{0}{0}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = 1 - q_n$$

de m̂ $S' = 1 - q_{n-1}$ d'où $\boxed{\forall n \geqslant 3 : r_n = S - S' = q_{n-1} - q_n}$

Comme $r_1 = \frac{1}{2} = q_0 - q_1$, $r_2 = \frac{1}{8} = q_1 - q_2$

d' : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(T = 2n) = q_{n-1} - q_n}$ cr $\boxed{T(\Omega) = 2\mathbb{N}}$

6°) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = 2n) = \sum_{n=1}^{\infty} (q_{n-1} - q_n) = q_0 - \lim_{n\to\infty} q_n$

Or $q_n \sim \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{4^n} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi n}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0$

d $\boxed{\begin{array}{l} P(T \in 2\mathbb{N}^*) = 1 \text{ et } P(T=0) = 0 \\ \text{ie } (T=0) : \text{ évenement négligeable} \end{array}}$

A. Préliminaires

1) On a $E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k) + \sum_{k=m}^{n} kP(X=k)$ donc

$E(X) \leqslant \sum_{k=1}^{m-1}(m-1)P(X=k) + \sum_{k=m}^{n} nP(X=k) \leqslant (m-1)\sum_{k=1}^{n} P(X=k) + \sum_{k=m}^{n} nP(X=k)$

Or on a $\sum_{k=m}^{n} P(X=k) = P(X \geqslant m)$. **Conclusion**: $\boxed{E(X) \leqslant m-1+nP(X\geqslant m)}$

Remarque : Les majorations ci-dessus sont valables si $m=1$.

2) On trace la fonction $x \longmapsto \ln x$ sur $[1,+\infty[$ qui est continue, croissante et positive sur $[1,+\infty[$.

La formule demandée est vrai si $n=1$ (on a même l'égalité).

Soit $n \geqslant 2$, on a :

$\forall k \geqslant 2$, $\forall t \in [k-1,k]$: $\ln t \leqslant \ln k$ que l'on intègre de $k-1$ à k : $\int_{k-1}^{k} \ln t \, dt \leqslant \ln k$ puis on somme de 2 à n : $\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \ln t \, dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln k$ soit $\int_{1}^{n} \ln t \, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k$ (car $\ln 1 = 0$).

Comme $\int_{1}^{n} \ln t \, dt = \Big[t\ln t - t\Big]_1^n = n\ln n - n + 1$, **Conclusion**: $\boxed{\forall n \geqslant 1 : n\ln n - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k}$

On en déduit que $e^{n\ln n - n+1} \leqslant e^{\sum_{k=1}^{n} \ln k} = n!$.

Or $(\frac{n}{e})^n = e^{n\ln n - n} \leqslant e^{n\ln n - n + 1} \leqslant n!$ **Conclusion**: $\boxed{\forall n \geqslant 1 : \left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!}$

B. Le lemme se sous-additivité de Fekete

3) Faire un dessin sur une droite horizontale de la situation des éléments présentés.

Comme u est bornée, U_n est un ensemble borné et comme $u_n \in U_n$, U_n est non vide,

Conclusion: $\boxed{(\underline{u}_n) \text{ et } (\overline{u}_n) \text{ sont bien définies}}$

$\forall n \geqslant 1 : U_{n+1} \subset U_n$, donc $\overline{u}_n$ majore U_{n+1} et $\underline{u}_n$ minore U_{n+1}, on a alors : $\overline{u}_{n+1} \leqslant \overline{u}_n$ et $\underline{u}_{n+1} \geqslant \underline{u}_n$.

En conséquence, la suite $(\underline{u}_n)$ est croissante et la suite $(\overline{u}_n)$ est décroissante.

Comme ces deux suites sont bornées (par les bornes de (u_n)), par le théorème de limite monotone on a : **Conclusion**: $\boxed{(\underline{u}_n) \text{ et } (\overline{u}_n) \text{ sont monotones et convergentes}}$

4) • On a vu au **3)** que la suite $\underline{(\overline{u}_n)\ \textbf{est décroissante}}$.

Comme , pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in U_n$, $u_n \leqslant \overline{u}_n$ donc $\underline{\overline{u} \succeq u}$.

Soit v telle que v soit décroissante et telle que $u \preceq v$, montrons que $\overline{u} \preceq v$.

Soit $n \geqslant 1$ et soit $k \geqslant n$, $u_k \leqslant v_k \leqslant v_n$ car v est décroissante. v_n est donc un majorant de U_n, donc $\overline{u}_n \leqslant v_n$ et donc $\overline{u} \preceq v$. **<u>Conclusion</u>**: $\boxed{\overline{u} \text{ est la plus petite suite décroissante et plus grande que } u}$

• De la même manière, la suite <u>$\underline{u}$ **est décroissante**</u>.

Comme , pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in U_n$, $\underline{u}_n \leqslant u_n$ donc $\underline{\underline{u} \preceq u}$.

Soit v telle que v soit croissante et telle que $v \preceq u$, montrons que $v \preceq \underline{u}$.

Soit $n \geqslant 1$ et soit $k \geqslant n$, $u_k \geqslant v_k \geqslant v_n$ car v est croissante. v_n est donc un minorant de U_n, donc $v_n \leqslant \underline{u}_n$ et donc $v \preceq \underline{u}$. **<u>Conclusion</u>**: $\boxed{\underline{u} \text{ est la plus grande suite croissante et plus petite que } u}$

5) Soit $n \geqslant 1$ et soit $k \geqslant n$, $u_k \leqslant v_k \leqslant \overline{v}_n$ car $\overline{v}_n$ est un majorant de V_n. $\overline{v}_n$ est donc un majorant de U_n, donc $\overline{u}_n \leqslant \overline{v}_n$. Comme ces deux suites sont convergentes, on a

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{u}_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{v}_n}$

6) $\boxed{\Longrightarrow]}$ Supposons que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ soient adjacentes. Comme pour tout entier $n \geqslant 1$, $\underline{u}_n \leqslant u_n \leqslant \overline{u}_n$,grâce au théorème d'encadrement : u converge et sa limite est égale à celle de $\overline{u}$ et $\underline{u}$.

$\boxed{\Longleftarrow]}$ Supposons que u converge. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $\forall k \geqslant N$ $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ (avec ℓ limite de u). On a donc $\forall k \geqslant N$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon$, d'où pour tout $n \geqslant N$: $U_n \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ et donc $\ell - \varepsilon \leqslant \underline{u}_n \leqslant u_n \leqslant \overline{u}_n \leqslant \ell + \varepsilon$. On en déduit que les suites $\overline{u}$ et $\underline{u}$ convergent vers ℓ.

<u>Conclusion</u>:

$\boxed{\overline{u} \text{ et } \underline{u} \text{ sont adjacentes si et seulement si } u \text{ converge et dans ce cas les trois suites ont la même limite}}$

7) On a : $m = nq + r = n(q-1) + n + r$ et comme $0 \leqslant r < n$, $1 \leqslant n \leqslant r + n$ et comme $m \geqslant 2n$, $m - 2n = (q-2)n + r \geqslant 0$ d'où $(q-2)n \geqslant -r > -n$, soit $q - 2 > -1$ (car $n > 0$) et donc $q > 1$.

On a donc $m = nq + r = n(q-1) + n + r$ avec $n(q-1) > 0$ et $n + r > 0$. On peut appliquer la sous-additivité : $u_m = u_{n(q-1)+n+r} \leqslant u_{n(q-1)} + u_{n+r}$.

Enfin par récurrence sur q, on a $u_{n(q-1)} \leqslant (q-1)u_n$: en effet c'est vraie pour $q = 2$ et si c'est vraie pour $q \geqslant 2$, $u_{n(q)} \leqslant u_{n(q-1)} + u_n \leqslant (q-1)u_n + u_n = (q+1-1)u_n$.

Conclusion: $\boxed{u_m \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}}$

Multiplions par $\dfrac{1}{m}$, on a donc $\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{(q-1)u_n}{m} + \dfrac{u_{n+r}}{m}$.

Tout d'abord, comme on a $n \leqslant n+r \leqslant n+n-1 = 2n-1$, on a $\dfrac{u_{n+r}}{m} \leqslant \dfrac{\max(u_n,\dots,u_{2n-1})}{m}$.

Ensuite $\dfrac{q-1}{m} - \dfrac{m-n-r}{nm} = \dfrac{1}{m}\dfrac{nq-n-m+n-r}{n} = 0$

Conclusion: $\boxed{\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{m-n-r}{m}\cdot\dfrac{u_n}{n} + \dfrac{\max(u_n,\dots,u_{2n-1})}{m}}$

8) On prend $n=1$ et pour tout $m \geqslant 2$, on a :

$0 \leqslant \dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{m-1-0}{m}\cdot\dfrac{u_1}{1} + \dfrac{\max(u_1)}{m} \leqslant 1\cdot\dfrac{u_1}{1} + \dfrac{u_1}{1} = 2u_1$. **Conclusion**: $\boxed{\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée}}$

Soit $n \geqslant 1$ fixé et soit m quelconque tel que $m \geqslant 2n$. Posons $v_m = \dfrac{m-n-r}{m}\cdot\dfrac{u_n}{n}+\dfrac{\max(u_n,\dots,u_{2n-1})}{m}$

On a $\forall m \geqslant 2n$: $\dfrac{u_m}{m} \leqslant v_m$. La démonstration du 5) reste valable si l'on n'a l'inégalité qu'à partir d'un certain rang et comme $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que $\lim\limits_{m\to+\infty} w_m = 1\cdot\dfrac{u_n}{n} + 0$ par théorèmes généraux et car $\max(u_n,\dots,u_{2n-1})$ est indépendant de m, on peut conclure avec le **5)** :

Conclusion: $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1 : \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{u_n}{n}}$

9) Posons $x_n = \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}\dfrac{u_m}{m}$ et $y_n = \dfrac{u_n}{n}$. La suite x est constante donc convergente vers sa valeur.

D'autre part, on a $x \preceq y$ et la suite x est croissante, avec le **4)** on a donc $x \preceq \underline{y}$ et comme x converge vers $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}\dfrac{u_m}{m}$ et $\underline{y}$ vers $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{u_n}{n}$, on a ensuite grâce au **5)** : $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}\dfrac{u_m}{m} \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{u_n}{n}$, puis enfin il est clair que pour tout suite z, $\underline{z}_n \leqslant \overline{z}_n$ et $\lim \underline{z}_n \leqslant \lim \overline{z}_n$ donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{u_n}{n} \leqslant \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}\dfrac{u_m}{m}$.

Grâce au **6**) on a : **Conclusion**: $\boxed{\text{La suite } \left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge dans } \mathbb{R}}$

10) • Si $\forall i \in [\![1,n]\!]\ X_i(\omega) < x$ alors $Y_n(\omega) < \dfrac{nx}{n}$. On a donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i < x) \subset (Y_n < x)$ d'où $P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i < x)\Big) \leqslant P\Big(Y_n < x\Big)$. Comme les variables X_i sont indépendantes et de même loi, $P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i < x)\Big) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i < x) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_1 < x) = 1^n = 1$.

On en déduit que $1 \leqslant P\Big(Y_n < x\Big) \leqslant 1$. **Conclusion**: $\boxed{P\Big(Y_n < x\Big) = 1}$

• Si $\forall i \in [\![1,n]\!]\ X_i(\omega) \geqslant x$ alors $Y_n(\omega) \geqslant \dfrac{nx}{n}$. On a donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x) \subset (Y_n \geqslant x)$ d'où

$P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x)\Big) \geqslant P\Big((Y_n \geqslant x)\Big)$. Comme les variables X_i sont indépendantes et de même loi, $P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x)\Big) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i \geqslant x) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_1 \geqslant x) = P(X_1 \geqslant x)^n > 0$.

Conclusion: $\boxed{P\Big((Y_n \geqslant x)\Big) > 0}$

11) • Soit $\omega \in \left(\left\{Y_m \geqslant x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right)$, on a alors

$Y_{m+n}(\omega) = \dfrac{1}{m+n}\displaystyle\sum_{k=1}^{m+n} X_k(\omega) = \dfrac{1}{m+n}\Big(mY_m + \displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega)\Big) \geqslant \dfrac{1}{m+n}(mx+nx) = x$, donc $Y_{m+n}(\omega) \geqslant x$. **Conclusion**: $\boxed{\left(\left\{Y_m \geqslant x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geqslant x\}}$

• Par le lemme des coalitions, Y_m et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ sont indépendantes donc

$$P\left(\left\{Y_m \geqslant x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) = P\Big(Y_m \geqslant x\Big)\cdot P\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\Big) \leqslant P\Big(Y_{m+n} \geqslant x\Big)$$

Or $P\Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\Big) = P\Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant x\Big)$ car les X_i suivent la même loi (rigoureusement on montrerait que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ ont même loi et en utilisant $P(X_i = a) = P(X_j = a)$).

Conclusion: $\boxed{P\Big(Y_{m+n} \geqslant x\Big) \geqslant P\Big(Y_m \geqslant x\Big)P\Big(Y_n \geqslant x\Big)}$

12) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Premier cas : $P(X_1 \geqslant x) = 0$, dans ce cas, $P(X_1 < x) = 1$ et donc avec le **10)**, pour tout entier $n \geqslant 1 : P(Y_n < x) = 1$, donc $P(Y_n \geqslant x) = 0$. **Conclusion**: $\boxed{\Big((P(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0}$

Deuxième cas : $P(X_1 \geqslant x) > 0$, dans ce cas, avec le **10)**, pour tout entier $n \geqslant 1 : P(Y_n \geqslant x) > 0$.

On peut donc poser $u_n = -\ln(P(Y_n \geqslant x))$ pour tout entier $n \geqslant 1$. De l'inégalité de la question précédente, on en déduit que pour tous m, n dans $\mathbb{N}^*$: $u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$. Enfin par définition d'une probabilité, $u_n \geqslant 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

On applique le **9)** : la suite $(\dfrac{u_n}{n})$ converge vers un réel ℓ. On en déduit par critère séquentiel que $(e^{\frac{u_n}{n}})$ converge vers un réel e^ℓ. Or $e^{\frac{u_n}{n}} = \dfrac{1}{P(Y_n \geqslant x)^{\frac{1}{n}}}$

Conclusion: $\boxed{\Big((P(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } e^{-\ell}}$

13) **Amorce** :

Si $s = 1$ alors il n'y a qu'une seule pile qui contient de bas en haut $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Soit un jeton $a_j = z$, la suite à un élément $b = (a_j)$ est bien :

• décroissante de longueur $s = 1$,

• le jeton n°1 de valeur $b_1 = a_j = z$ est dans l'unique pile n°1 ,

• $b_1 = a_j = z$.

(Pas obligatoire, mais utile pour comprendre rapidement ce qui se passe :

Si $s = 2$ alors il y a deux piles qui contiennent $(a_1, a_2, \dots, a_r)$.

Soit un jeton $a_j = z$ de la deuxième pile. Si on a posé ce j-ième jeton sur la deuxième pile, c'est qu'il y avait sur le sommet de la première pile, à ce moment là, un élément a_k avec $k < j$ et $a_j \leqslant a_k$.

Posons $b = (a_k, a_j)$ c'est bien une suite décroissante de longueur 2, pour $i = 1$ le jeton de valeur $b_1 = a_k$ est dans la pile 1 , pour $i = 2$ le jeton de valeur $b_2 = a_j$ est dans la pile 2 et $b_2 = z$.)

<u>Hérédité</u>

Supposons le résultat vraie pour s et soit une répartition des jetons qui donne $s+1$ piles. Soit un jeton de la $s+1$-ième pile de valeur $z = a_j$. Comme pour $s = 2$, si on a posé ce j-ième jeton sur cette $s+1$-ième pile, c'est qu'il y avait sur le sommet de la s-ième pile, à ce moment là, un élément $z' = a_k$ avec $k < j$ et $a_j \leqslant a_k$.

On applique pour z' l'hypothèse de récurrence :

il existe une liste $b = (b_1, \dots, b_s)$ décroissante de longueur s, pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$ le jeton n°i de valeur b_i est dans la i-ième pile et $b_s = z'$

La suite $b' = (b_1, \dots, b_s, z)$ possède alors toutes les propriétés demandées car $k < j \Longrightarrow a_j \leqslant a_k$ et $b_{s+1} = z$. **<u>Conclusion</u>**: $\boxed{\text{On a le résultat demandé pour tout } s \in \mathbb{N}^*}$

14) On range donc les $pq+1$ éléments de la suite a selon le procédé de l'énoncé. Soit s le nombre de piles que cela a crée.

<u>Premier cas</u> : $s \geqslant q+1$

Dans ce cas avec le **13)**, il existe une suite $b = (b_1, \dots, b_s)$ extraite de la liste a et décroissante. La liste $b = (b_1, \dots, b_{q+1})$ est extraite de la liste a , elle est décroissante et de longueur $q+1$.

<u>Deuxième cas</u> : $s \leqslant q$

Dans ce cas , montrons qu'il y a au moins une pile qui contient au moins $p+1$ éléments. Si les s

piles avaient toutes un nombre inférieur ou égal à p alors les s piles auraient un nombre inférieur ou égal à $ps \leqslant pq < pq+1$: **absurde**. Il existe une pile qui contient au moins $p+1$ éléments. Notons $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{p+1}}, \dots, a_{i_t})$ cette pile.

On a alors $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{p+1}})$ qui est extraite de la liste a , elle est strictement croissante et de longueur $p+1$. **Conclusion**:

> La liste a admet au moins une liste extraite croissante de longueur $p+1$ ou une liste extraite décroissante de longueur $q+1$.

Remarque : le principe du deuxième cas s'appelle le principe des tiroirs : s'il y a 5 tiroirs et 6 chapeaux à ranger, il y aura au moins un tiroir qui recevra deux chapeaux.

15) Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, si $\omega \in (A_1 = i) \cap (A_2 = i)$, alors $B(\omega)(1) = B(\omega)(2) = i$: impossible car $B(\omega)$ est une bijection. Donc $(A_1 = i) \cap (A_2 = i) = \emptyset$ et $P\Big((A_1 = i) \cap (A_2 = i)\Big) = 0$.

Or $P(A_1 = i) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} P(A_1 = i / B = \sigma) \cdot P(B = \sigma)$ (c'est la F.P.T.), donc $P(A_1 = i) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n}\frac{1}{n!}$ d'où $P(A_1 = i) = P(A_2 = i) = \dfrac{1}{n} \neq 0$.

On ne peut donc avoir $P(A_1 = i) \cdot P(A_2 = i) = P\Big((A_1 = i) \cap (A_2 = i)\Big)$

Conclusion: $\boxed{A_1, \dots, A_n \text{ ne sont pas mutuellement indépendantes}}$

16) Erreur d'énoncé : il faut que la liste s soit strictement croissante (par exemple si $k = 3$ et $s = (1, 1, 1)$ alors $P(A^s) = 1 \neq \dfrac{1}{6}$).

Soient donc $k \in \{1, \dots, n\}$ et $s = (s_1, \dots, s_k)$ telle que $s_1 < \dots < s_k$.

Posons $\mathcal{S}_{n,s}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que $\sigma(s_1) < \dots < \sigma(s_k)$.

Montrons que $\underline{A^s = (B \in \mathcal{S}_{n,s})}$:

$\omega \in A^s \iff B(\omega)(s_1) < B(\omega)(s_2) < \cdots B(\omega)(s_k) \iff B(\omega) \in \mathcal{S}_{n,s} \iff \omega \in (B \in \mathcal{S}_{n,s})$

Puisque B suit une loi uniforme, on a :$P(A^s) = P(B \in \mathcal{S}_{n,s}) = \dfrac{|\mathcal{S}_{n,s}|}{|S_n|}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s_1 & \cdots & s_2 & \cdots & s_k & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(s_1) & \cdots & \sigma(s_2) & \cdots & \sigma(s_k) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Pour déterminer une permutation de $\mathcal{S}_{n,s}$, on commence par choisir les k images de $s_1, \dots, s_k$: $s'_1, \dots, s'_k$. Cela revient donc à choisir une suite strictement croissante $1 \leqslant s'_1 < \ldots < s'_k \leqslant n$. Ce nombre de possibilités est $\dbinom{n}{k}$. Il reste ensuite $n-k$ éléments (ce sont les éléments de l'ensemble : $\{1,\dots,n\}-\{s'_1,\dots,s'_k\}$) à placer sur la deuxième ligne de σ : il y a donc $(n-k)!$ possibilités de les placer.

On en déduit que $|\mathcal{S}_{n,s}| = \dbinom{n}{k}(n-k)!$ **Conclusion**: $\boxed{P(A^s) = \dfrac{|\mathcal{S}_{n,s}|}{|S_n|} = \dfrac{\binom{n}{k}(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{k!}}$

17) • Posons $\mathcal{C}_{n,\ell}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que la plus longue liste croissante extraite de $(\sigma(1),\dots,\sigma(n))$ soit de longueur ℓ.

Posons $\mathcal{D}_{n,\ell}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que la plus longue liste décroissante extraite de $(\sigma(1),\dots,\sigma(n))$ soit de longueur ℓ.

Montrons que $\mathcal{C}_{n,\ell}$ et $\mathcal{D}_{n,\ell}$ ont même cardinaux. Pour cela considérons l'application Φ de S_n dans S_n qui à une permutation σ associe la permutation σ' définie par $\sigma'(k) = n+1-\sigma(k)$. Il est clair que pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, $n+1-\sigma(k) \in \{1,\dots,n\}$ et que si $\Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_2)$ alors $\sigma_1 = \sigma_2$. On en déduit que Φ est injective et comme S_n est de cardinal fini, Φ est bijective.

Enfin si $\sigma \in S_n$ et σ possède une liste croissante extraite de $(\sigma(1),\dots,\sigma(n))$ de longueur ℓ, alors $\Phi(\sigma) \in S_n$ et $\Phi(\sigma)$ possède une liste décroissante extraite de $(\sigma(1),\dots,\sigma(n))$ de longueur ℓ. On déduit que $\Phi(\mathcal{C}_{n,\ell}) = \mathcal{D}_{n,\ell}$ et donc que $\mathcal{C}_{n,\ell}$ et $\mathcal{D}_{n,\ell}$ ont même cardinaux.

On a donc $P(B \in \mathcal{C}_{n,\ell}) = \dfrac{|\mathcal{C}_{n,\ell}|}{n!} = \dfrac{|\mathcal{D}_{n,\ell}|}{n!} = P(B \in \mathcal{D}_{n,\ell})$.

D'autre part , par double inclusion, on a : $(C_n = \ell) = (B \in \mathcal{C}_{n,\ell})$ et $(D_n = \ell) = (B \in \mathcal{D}_{n,\ell})$.

Conclusion: $\boxed{\forall \ell \in \{1,\dots,n\} : P(C_n = \ell) = P(D_n = \ell) \text{ et donc } C_n \text{ et } D_n \text{ ont même loi}}$

• Il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $p^2+1 \leqslant n < (p+1)^2+1$ $\quad (p = \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor)$.

On appliquant le **14)** à la suite formée par les p^2+1 premiers éléments, on a $C_n \geqslant p+1$ ou $D_n \geqslant p+1$. On a donc $C_n + D_n \geqslant p+1+1$ (puisque l'une des deux valeurs est supérieure à $p+1$ et l'autre est supérieure à 1), ce qui donne $E(C_n+D_n) = E(C_n)+E(D_n) \geqslant p+2$

D'une part $p+2-\sqrt{n} = \dfrac{(p+2)^2-n}{p+2+\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{(p+1)^2+1+2(p+1)-n}{p+2+\sqrt{n}} > 0$ d'où $p+2 \geqslant \sqrt{n}$.

D'autre part C_n et D_n ont la même loi, donc $E(C_n) = E(D_n)$.

On a donc $2E(C_n) \geqslant p+2 > \sqrt{n}$. **Conclusion**: $\boxed{E(C_n) \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}}$

18) On a $(C_n \geqslant k) \subset \bigcup_{s\in T} A^s$ où T est l'ensemble des suites strictement croissantes de $\{1,\dots,n\}$ et de longueur k

Appliquons l'inégalité de Boole : $P(C_n \geqslant k) \leqslant P\Big(\bigcup_{s\in T} A^s\Big) \leqslant \sum_{s\in T} P\Big(A^s\Big) = \sum_{s\in T} \dfrac{1}{k!}$ et comme $|T| = \dbinom{n}{k}$, on a l'inégalité demandée. <u>**Conclusion**</u>: $\boxed{P(C_n \geqslant k) \leqslant \dfrac{\binom{n}{k}}{k!}}$

19) • Posons $i = \lfloor -\alpha e\sqrt{n} \rfloor$, on a $i \leqslant -\alpha e\sqrt{n} \leqslant i+1$ donc $-i-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant -i$. Posons $k = -i$, on a donc $k-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k$ et comme $\alpha e\sqrt{n} > 1$, $-\alpha e\sqrt{n} < 1$ et donc $i \leqslant -2$

<u>**Conclusion**</u>: $\boxed{k-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*}$

• On a $(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \subset (C_n > k-1) = (C_n \geqslant k)$ car C_n est à valeurs entières.

On a donc $P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \dfrac{\binom{n}{k}}{k!} \leqslant \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!^2} \leqslant \dfrac{n^k}{k!^2} \leqslant n^k\Big((\dfrac{e}{k})^k\Big)^2 = \Big(\dfrac{e\sqrt{n}}{k}\Big)^{2k}$

On en déduit donc que $P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{2k} \leqslant \Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{2\alpha e\sqrt{n}}$ car $2k \geqslant 2\alpha e\sqrt{n}$ et $\dfrac{1}{\alpha} < 1$.

<u>**Conclusion**</u>: $\boxed{P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{2\alpha e\sqrt{n}}}$

20) • Utilisons le **1)** avec le k du **19)** avec $\alpha = 1 + \dfrac{1}{n^{1/4}} > 1$: $E(C_n) \leqslant k - 1 + nP(X \geqslant k)$.

On a vu au **19)** que $P(X \geqslant k) = P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{2\alpha e\sqrt{n}}$ et $k-1 < \alpha e\sqrt{n}$.

On a donc $\dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\alpha e\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{2ae\sqrt{n}} = (1+\dfrac{1}{n^{1/4}})e + \sqrt{n}\Bigg(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^{1/4}}}\Bigg)^{2(1+\frac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}}$

Posons $\varepsilon_n = \sqrt{n}\Bigg(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^{1/4}}}\Bigg)^{2(1+\frac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}}$

$\ln(\varepsilon_n) = \dfrac{1}{2}\ln n - 2(1+\dfrac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}\ln(1+\dfrac{1}{n^{1/4}})$

Or $2(1+\dfrac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}\ln(1+\dfrac{1}{n^{1/4}}) \sim \dfrac{2}{n^{1/4}}$ donc par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \ln(\varepsilon_n) = -\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. <u>**Conclusion**</u>: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant (1+\dfrac{1}{n^{1/4}})e + \varepsilon_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0}$

• On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant 2e + M$ où M est un majorant de la suite (ε_n) qui converge vers 0. La suite $\Big(\dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}}\Big)$ est donc bornée.

Enfin $\lim_{n\to+\infty} \Big((1+\dfrac{1}{n^{1/4}})e + \varepsilon_n\Big) = e$.

On conclut avec le **5)** et **6)**. <u>**Conclusion**</u>: $\boxed{\overline{\lim_{m\to+\infty}} \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \text{ existe et } \overline{\lim_{m\to+\infty}} \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant e}$

FIN