GROUPE SYMÉTRIQUE - DÉTERMINANTS

A. GROUPE SYMÉTRIQUE

1. Définitions

On appelle **groupe symétrique**, l'ensemble des bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. Notation : $\mathcal{S}_n$.
On a donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_n = \left\{ \sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tel que } \sigma \text{ soit bijective } \right\}}.$$

Vocabulaire : Les éléments de $\mathcal{S}_n$ (des applications bijectives) sont appelés des **permutations** de $[\![1, n]\!]$ et notés :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Le produit de composition $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{S}_n$.
Exemple de manipulation :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

2. Structure - cardinal

Théorème : $(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe de cardinal $n!$.
De plus dès que $n \geqslant 3$, $(\mathcal{S}_n, \circ)$ n'est pas commutatif.

Remarque : $\circ$ représente la composition des applications. On note souvent $\sigma \circ \tau = \sigma\tau$

3. Cycle, Transpositions

Soit $(a_1, \ldots, a_p) \in \{1, 2, \ldots, n\}^p$, 2 à 2 distincts (donc $p \leqslant n$).
On appelle **Cycle** de longueur p et de **support** $(a_1, \ldots, a_p)$, l'unique permutation $s \in \mathcal{S}_n$ vérifiant :
(i) $s(a_1) = a_2$, $s(a_2) = a_3$, …, $s(a_{p-1}) = a_p$ et $s(a_p) = a_1$,
(ii) $s(x) = x$ pour tous les autres entiers de $\{1, 2, \ldots, n\} - \{a_1, \ldots, a_p\}$.
Notation : On note ce cycle : $s = (a_1, \ldots, a_p)$.
On appelle **Transposition** tout cycle de longueur 2 :
$s = (a\ b)$ (c'est-à-dire : $s(a) = b$ et $s(b) = a$ et $s(x) = x$ pour $x \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{a, b\}$).

Théorèmes de décomposition :
Théorème 1 :

Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ se décompose en produit (de composition) de cycles de supports disjoints 2 à 2. De plus ces cycles commutent 2 à 2 et cette décomposition est unique (aux permutations de cycles près).

Démonstration (non exigible) 1

Théorème 2 :

Toute permutation se décompose en produit (de composition) de transpositions (mais cette décomposition n'est pas unique).

Démonstration 2

Exemple : Décomposer σ_0 en produit de cycles puis en produit de transpositions, avec :

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 5 & 3 & 8 & 14 & 7 & 9 & 1 & 2 & 12 & 6 & 13 & 10 & 11 & 18 & 15 & 16 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

$\sigma_0 = (1\quad 5\quad 7) \circ (2\quad 3\quad 8) \circ (4\quad 18\quad 17) \circ (6\quad 9\quad 12\quad 10) \circ (11\quad 13) \circ (15) \circ (16)$.

Exercice : Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On suppose que $\sigma \neq Id$. Quel est le premier indice s tel que $\sigma^s = Id$?

4. Signature (+ ou −)

Définition 1

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On dit qu'un couple (i, j) de $[\![$ 1,n $]\!]$ est une **inversion** de σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ.

Exemples : Déterminer $I(\sigma) \in \mathcal{S}_4$ lorsque $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ puis $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition 1

On appelle **signature** d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, l'entier relatif noté $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.
Si $\varepsilon(\sigma) = 1$, on dit que la permutation est **paire** et si $\varepsilon(\sigma) = -1$, on dit que la permutation est **impaire**.

Proposition

La signature d'une transposition est égale à -1

Démonstration 3

Soit $\tau = (k, \ell)$ avec $k < \ell$. Les inversions de τ sont les couples :

- $(k, k+1), \ldots, (k, \ell) \longrightarrow$ donc $\ell - k$,
- $(k+1, \ell), \ldots (\ell - 1, \ell) \longrightarrow$ donc $\ell - 1 - k$ et donc en tout $2(\ell - k) - 1$ qui est impair.

Théorème :

La signature est un morphisme de groupe de $\varepsilon : \mathcal{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$, on a donc :
$\forall (\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2 : \varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma')$ (morphisme de groupes).
De plus la signature est l'unique morphisme de groupe de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ tel que pour toute transposition τ, $\varepsilon(\tau) = -1$.

Démonstration (non exigible) 4

Soit $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2$. On considère l'ensemble $A = \Big\{(i, j) \in [\![1, n]\!]$ tel que $i < j\Big\}$ et 4 sous ensembles de A :

$A_1 = \Big\{(i, j) \in A$ tel que $\sigma'(i) < \sigma'(j)$ et $\sigma \circ \sigma'(i) < \sigma \circ \sigma'(j)\Big\}$,

$A_2 = \Big\{(i, j) \in A$ tel que $\sigma'(i) < \sigma'(j)$ et $\sigma \circ \sigma'(i) > \sigma \circ \sigma'(j)\Big\}$,

$A_3 = \Big\{(i, j) \in A$ tel que $\sigma'(i) > \sigma'(j)$ et $\sigma \circ \sigma'(i) < \sigma \circ \sigma'(j)\Big\}$,

$A_4 = \Big\{(i, j) \in A$ tel que $\sigma'(i) > \sigma'(j)$ et $\sigma \circ \sigma'(i) > \sigma \circ \sigma'(j)\Big\}$.

Notons n_i le cardinal de A_i. On a $\boxed{I(\sigma') = n_3 + n_4}$ et $\boxed{I(\sigma \circ \sigma') = n_2 + n_4}$. Évaluons $I(\sigma)$.
On remarque que $(i, j) \longmapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ est une bijection de l'ensemble des couples (i, j) de $[\![$ 1,n $]\!]$ tels que $i < j$ dans l'ensemble des paires de $\mathcal{S}_n$ par bijectivité de σ.
Or compter les couples (k, ℓ), $k < \ell$ tels que $\sigma(k) > \sigma(\ell)$ revient

- à compter les paires $\{k, \ell\}$ distinctes telles que

$$\begin{cases} k < \ell \\ \sigma(k) > \sigma(\ell) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} k > \ell \\ \sigma(k) < \sigma(\ell) \end{cases}$$

- ou encore, par la bijection précédente, à compter les couples (i, j) de $[\![$ 1,n $]\!]$ tels que $i < j$ et

$$\begin{cases} \sigma'(i) < \sigma'(j) \\ \sigma \circ \sigma'(i) > \sigma \circ \sigma'(j) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sigma'(i) > \sigma'(j) \\ \sigma \circ \sigma'(i) < \sigma \circ \sigma'(j) \end{cases}$$

On en déduit que $\boxed{I(\sigma) = n_2 + n_3}$ et donc que $\boxed{\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') = (-1)^{2n_3 + n_2 + n_4} = (-1)^{n_2 + n_4} = \varepsilon(\sigma \circ \sigma')}$.

Proposition : Si σ est un cycle de longueur p, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p+1}$.

Démonstration 5 $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p) = (a_1 \ a_2) \circ \cdots \circ (a_{p-1} \ a_p)$, d'où $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1} = (-1)^{p+1}$.

Exemple : Calculer la signature de σ_0 ci dessus.

Il suffit de compter dans la décomposition de σ_0 le nombre de cycles de longueur paire : il y en 2. On en déduit que $\boxed{\varepsilon(\sigma_0) = +1}$.

Groupe Alterné :

On appelle **groupe alterné**, le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ constitué des permutations de **signature** $+1$.

Notation : $\boxed{\mathcal{A}_n}$. On a donc $\boxed{\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \ / \ \varepsilon(\sigma) = +1\}}$.

Proposition : $\forall n \geqslant 2 :$ card $(\mathcal{A}_n) = \dfrac{n!}{2}$.

Démonstration 6

Soit $\tau_0 = (1 \ \ 2)$, l'application $f : \sigma \longmapsto \sigma \circ \tau_0$ est bijective de $\mathcal{A}_n$ dans $\mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n$. On en déduit donc que $|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n| = \dfrac{n!}{2}$.

Un exemple complet Donner en extension $\mathcal{A}_6$ et $\mathcal{S}_6 - \mathcal{A}_6$ (*on écrira les permutations à l'aide de leur décomposition en produit de cycles à support disjoints et par ordre alphabétique (exemple :* $(1 \ \ 2 \ \ 4)$ *avant* $(1 \ \ 3 \ \ 2)$)

$\mathcal{A}_4 = \Big\{\text{Id}\ ,\ (1\ \ 2\ \ 3)\ ,\ (1\ \ 2\ \ 4)\ ,\ (1\ \ 3\ \ 2)\ ,\ (1\ \ 3\ \ 4)\ ,\ (1\ \ 4\ \ 2)\ ,\ (1\ \ 4\ \ 3)\ ,\ (2\ \ 3\ \ 4)\ ,\ (2\ \ 4\ \ 3)\ ,\ (1\ \ 2)\circ(3\ \ 4)\ ,\ (1\ \ 3)\circ (2\ \ 4)\ ,\ (1\ \ 4)\circ(2\ \ 3)\Big\}$ et $\mathcal{S}_n - \mathcal{A}_4 = \Big\{(1\ \ 2)\ ,\ (1\ \ 3)\ ,\ (1\ \ 4)\ ,\ (2\ \ 3)\ ,\ (2\ \ 4)\ ,\ (3\ \ 4)\ ,\ (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)\ ,\ (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)\ ,\ (1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)\ ,\ (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)\ ,\ (1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)\ ,\ (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)\Big\}$

B. DÉTERMINANTS

1. **Forme n-linéaire alternée**

Soit E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension n.
Soit f une application de E^n dans $\mathbb{K}$.

(a) On dit que f est **n-linéaire** si l'expression de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est linéaire par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots$ et x_n.
C'est-à-dire : $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, l'application :
$t \longmapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{t}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est **linéaire**.

(b) On dit que f est **alternée** si
$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ tel que s'il existe $i \neq j$ avec $x_i = x_j$ alors on a $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

(c) On dit que f est **antisymétrique** si $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$:

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Théorème 1 : Si f est n-linéaire alors f est alternée **SSI** f est antisymétrique.

Démonstration 7

$\Leftarrow$] $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ tel qu'il existe $i \neq j$ avec $x_i = x_j$. Posons $\sigma = (i\ \ j)$ on a alors $\varepsilon(\sigma) = -1$ et $f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$.
On en déduit donc que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ car $x_i = x_j$ et $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}$.

$\Rightarrow$] Montrons d'abord que $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour une transposition $\sigma = (k\ \ \ell)$ avec $k < \ell$. $f(x_1, x_2, \ldots, \underline{x_k + x_\ell}, \ldots\ldots, \underline{x_k + x_\ell}, \ldots, x_n) = 0$.
On développe par n-linéarité en 4 termes T_1, T_2, T_3, T_4 :
$f(x_1, x_2, \ldots, \underline{x_k}, \ldots\ldots, \underline{x_k}, \ldots, x_n) + f(x_1, x_2, \ldots, \underline{x_\ell}, \ldots\ldots, \underline{x_\ell}, \ldots, x_n) + f(x_1, x_2, \ldots, \underline{x_k}, \ldots\ldots, \underline{x_\ell}, \ldots, x_n) + f(x_1, x_2, \ldots, \underline{x_\ell}, \ldots\ldots, \underline{x_k}, \ldots, x_n) = 0$. Les deux premiers termes T_1, T_2 sont nuls et il reste $T_3 + T_4 = 0$, soit $T_4 = -T_3$ ce qui donne le résultat.
Passons au cas général. $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, on décompose σ en produit de transpositions : $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$.

$$f(x_{\tau_1\circ\cdots\circ\tau_p(1)}, \ldots, x_{\tau_1\circ\cdots\circ\tau_p(n)}) = \varepsilon(\tau_p) f(x_{\tau_1\circ\cdots\circ\tau_{p-1}(1)}, \ldots, x_{\tau_1\circ\cdots\circ\tau_{p-1}(n)}) = \varepsilon(\tau_p)\varepsilon(\tau_{p-1}) f(x_{\tau_1\circ\cdots\circ\tau_{p-2}(1)}, \ldots, x_{\tau_1\circ\cdots\circ\tau_{p-2}(n)}) \underbrace{=}_{rcurrence\ finie} \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Théorème 2 :

Si f est n-linéaire et alternée alors $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liée $\Longrightarrow f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$.

Démonstration 8

Il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ et il existe des scalaires λ_i tels que $x_{j_0} = \displaystyle\sum_{i=1, i\neq j_0}^{n} \lambda_i x_i$.

On a alors $f(x_1, \ldots, x_{j_0}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, \displaystyle\sum_{i=1, i\neq j_0}^{n} \lambda_i x_i\ , \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1, i\neq j_0}^{n} \lambda_i f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) =$

$\displaystyle\sum_{i=1, i\neq j_0}^{n} \lambda_i f \underbrace{(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}_{x_i\ \text{apparait}\ 2\ \text{fois}} = 0$ par le caractère alterné.

Exemples : Soit f une forme n-linéaire et alternée. Soient $u, v, x, y, z, u', v', x_i$ des vecteurs de E et a, b, c, d des éléments de $\mathbb{K}$. Développer :

(a) $f(u + v, y, z) = f(u, y, z) + f(v, y, z)$.

(b) $f(u + v, u' + v', z) = f(u, u', z) + f(u, v', z) + f(v, u', z) + f(v, v', z)$.

(c) $f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \varepsilon(s) f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ avec $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4) \circ (2\ 3)$ et $\varepsilon(s) = (-1)^2 = 1$.

(d) Soit (u, v) une base de E (E de dimension 2).
$f(au + bv, cu + dv) = acf(u, u) + adf(u, v) + bcf(v, u) + bdf(v, v) = \Big[ad - bc\Big]\ f(u, v)$.

2. **Forme n-linéaire alternée en dimension n : notion de déterminant**

Théorème fondamental - définition :

Soit $b = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (donc de dimension n).
Il existe une unique forme n-linéaire alternée φ_0 de E^n dans $\mathbb{K}$ telle que : $\varphi_0(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
$\forall f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, $\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda\ \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ et $\boxed{\lambda = f(e_1, e_2, \ldots, e_n)}$.
φ_0 est notée $\boxed{\det_b}$.
$\det_b(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'appelle le **déterminant** de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $b = (e_1, \ldots, e_n)$.
En d'autre terme l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension $\boxed{1}$.

Démonstration (existence non exigible) 9

Si $x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i$, ... , $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, ...et $x_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} e_i$.
Alors on "éclate" $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en une Méga-somme :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} e_i\Big) = f\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n}\Big)$$
$$= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} f\Big(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2} e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n}\Big)$$
$$= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n}) = \cdots$$
$$= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$
$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) \text{ on a donc une somme de } n^n \text{ termes.}$$

Ensuite $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$ est nul à chaque fois que dans le n-uplet $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$ il y a deux indices (au moins) qui sont égaux. Autrement dit il y a exactement autant de n-uplets $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$ où les éléments sont 2 à 2 distincts que de n-uplets $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ avec $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Donc $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$

D'autre part par antisymétrie : $f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. En conséquence :

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left[\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}\right] f(e_1, e_2, \ldots, e_n)}.$$

Posons :

$$\boxed{\varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}}$$

cette expression s'appelle le **déterminant** de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $b = (e_1, \ldots, e_n)$.

On a donc **l'unicité** de λ : $f = \lambda \varphi_0$.

Montrons que φ_0 est bien une forme n-linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$ telle que : $\varphi_0(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

- φ_0 est clairement une forme n-linéaire car $\varphi_0(x_1, x_2, \ldots, y, \ldots, x_n)$ est de la forme $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$ avec $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de y dans b.
- Soit (k, ℓ) avec $k < \ell$ et soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ tels que $x_k = x_\ell$.

Posons $\tau = (k\ \ \ell)$, on a $\mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n = \{\sigma\tau\ ,\ \sigma \in \mathcal{A}_n\}$

$$\varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma\tau(1),1} a_{\sigma\tau(2),2} \cdots a_{\sigma\tau(n),n}.$$

Comme $x_k = x_\ell$, $a_{\sigma\tau(k),k} = a_{\sigma(\ell),k} = a_{\sigma(\ell),\ell}$, $a_{\sigma\tau(\ell),\ell} = a_{\sigma(k),\ell} = a_{\sigma(k),k}$. et que d'autre part $a_{\sigma\tau(j),j} = a_{\sigma(j),j}$ pour tout $j \notin \{k, \ell\}$. On en déduit que $\varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ et donc que φ_0 est alternée.

• $\varphi_0(e_1,e_2,\ldots,e_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\delta_{\sigma(1),1}\delta_{\sigma(2),2}\cdots\delta_{\sigma(n),n} = 1$ (le produit $\delta_{\sigma(1),1}\delta_{\sigma(2),2}\cdots\delta_{\sigma(n),n}$ est nul dès que $\sigma \neq \mathrm{Id}$ et $\delta_{i,j}$ symbole de Kronecker).

3. Formule de changement de bases - théorème fondamental de la liberté

Théorème de changement de bases :

Soit $b=(e_1,\ldots,e_n)$ et $b'=(e'_1,\ldots,e'_n)$ deux bases de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\dim E = n$).
On a la formule : $\boxed{\det_{b'}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \det_{b'}(b)\cdot\det_b(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$.

Démonstration 10

$(x_1,x_2,\ldots,x_n) \longmapsto \det_{b'}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est une forme n-linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$, on a donc par le théorème fondamental : $\det_{b'}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lambda\det_b(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ avec $\lambda = \det_{b'}(e_1,e_2,\ldots,e_n) = \det_{b'}(b)$.

Théorème fondamental de la liberté :

Soit $b=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\dim E=n$). $\forall (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E^n$,
$$\det_b(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq 0 \iff (x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ est libre dans } E.$$

Démonstration 11

Si $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est liée, on a vu au paragraphe 1. que $\det_b(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$.
Si $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est libre, alors $b'=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est aussi une base de E et par la formule de changement de base : $\det_{b'}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \det_{b'}(b)\cdot\det_b(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Or $\det_{b'}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\det_{b'}(b')=1$, on a donc $\det_{b'}(b)\cdot\det_b(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1$ d'où $\det_b(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq 0$.

4. Déterminant d'un endomorphisme - déterminant d'une matrice carrée

Théorème - définition :

Soit f un endomorphisme de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\dim E=n$).
il existe un unique scalaire λ appelé **déterminant de f et noté** $\det(f)$, tel que pour toute base $b=(e_1,\ldots,e_n)$ de E et pour tout $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E^n$: $\det_b\Big(f(x_1),\ldots,f(x_n)\Big) = \lambda\det_b(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.
On a donc $\det_b\Big(f(x_1),\ldots,f(x_n)\Big) = \det(f)\cdot\det_b(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Démonstration 12

Existence

$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\longmapsto \det_b\Big(f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\Big)$ est une forme n-linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$, on a donc par le théorème fondamental : $\det_b\Big(f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\Big) = \lambda\det_b(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ avec $\lambda=\det_b\Big(f(e_1),f(e_2),\ldots,f(e_n)\Big)$ que l'on notera $\det_b(f(b))$, d'où l'existence.

Unicité

On a grâce à la formule de changement de base :
$\det_{b'}(f(b')) = \det_{b'}(b)\cdot\det_b(f(b')) = \det_{b'}(b)\cdot[\det_b(f(b))\cdot\det_b(b')]$. Or $\det_{b'}(b)\cdot\det_b(b')=1$, d'où $\det_{b'}(f(b'))=\det_b(f(b))$.

Exemples : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et soient F et G tel que $E=F\oplus G$.
Calculer les déterminants $\det(f)$ lorsque :
$f=\mathrm{Id_E}$, f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G et f est l'endomorphisme de matrice dans une base de E : $\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}$.

Définition :

On appelle déterminant d'une matrice carrée A de taille $n\times n$, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On le note $\det(A)$ ou $\det A$. Si $A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n,1}&\cdots&a_{n,n}\end{pmatrix}$ le déterminant de A se note aussi :
$$\begin{vmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,j}&\cdots&a_{1,n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{i,1}&\cdots&a_{i,j}&\cdots&a_{i,n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n,1}&\cdots&a_{n,j}&\cdots&a_{n,n}\end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

Exemples : Calculer les déterminants suivant : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}$.

5. **Propriétés des déterminants**

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $b = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$\mathbf{P_1}$ lien vecteur/endo/matrice

Si $A = M_b(f)$, alors $\boxed{\det(A) = \det(f) = \det_b(C_1, \dots, C_n)}$ où $C_1, \dots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de A et b_0 base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$\mathbf{P_2}$ $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

$\mathbf{P_3}$ $\boxed{\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)}$ et $\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$ et donc $\det(AB) = \det(BA)$.

$\mathbf{P_4}$ $f \in \mathrm{GL(E)} \iff \det(f) \neq 0$ et $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$.

$\mathbf{P_5}$ Si f ou A est inversible, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

$\mathbf{P_6}$ $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$.

$\mathbf{P_7}$ Le déterminant est une forme n-linéaire de ses lignes et de ses colonnes .

$\mathbf{P_8}$ • On peut utiliser les opérations élémentaires du pivot de Gauss pour faire apparaitre des zéros soit sur une ligne soit sur une colonne.

- Un déterminant qui a deux colonnes (respectivement deux lignes) identiques est nul.
- L'échange de deux colonnes (respectivement deux lignes) multiplie le déterminant par -1.

Démonstration 13

$\mathbf{P_2}$ $\det(\lambda A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)(\lambda a_{\sigma(1),1})(\lambda a_{\sigma(2),2}) \cdots (\lambda a_{\sigma(n),n}) = \lambda^n \det(A)$

$\mathbf{P_3}$ $\det(f \circ g) = \det_b(f \circ g(e_1), \dots, f \circ g(e_n)) = \det(f) \det_b(g(e_1), \dots, g(e_n)) = \det(f) \det(g) \det_b(e_1, \dots, e_n)$
$= \det(f) \det(g)$.

$\mathbf{P_4}$ $f \in \mathrm{GL(E)} \iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ base de $E \iff \det_b(f(e_1), \dots, f(e_n)) \neq 0 \iff \det(f) \neq 0$.

$\mathbf{P_5}$ $\det(f) \det(f^{-1}) = \det(f \circ f^{-1}) = \det I_n = 1$.

$\mathbf{P_6}$ $\det(A^{\mathrm{T}}) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$

Or $a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1),1} a_{\sigma^{-1}(2),2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n}$, avec le changement de variable **bijectif** de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n : \sigma \longmapsto \sigma^{-1}$ et $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$, $\det(A^{\mathrm{T}}) = \displaystyle\sum_{\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1),1} a_{\sigma^{-1}(2),2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} = \det(A)$.

6. **Mineur - cofacteur - comatrice**

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on appelle :

- **mineur** de $a_{i,j}$, le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de A obtenues en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne,
- **cofacteur** de $a_{i,j}$, le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$,
- **comatrice de A** , la matrice $\mathrm{Com}(A)$ des cofacteurs : $\boxed{\mathrm{Com}(A) = \left((-1)^{i+j} \Delta_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Développement selon une ligne ou une colonne :

Lemme :

Si A est une matrice carrée de la forme : $A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \cdots & * & a_{n,n} \end{array}\right)$ avec $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$

alors $\det A = a_{n,n} \det A'$.

Démonstration 14

On a par définition : $\det A = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$ et comme par hypothèse :

$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(n) \neq n \Longrightarrow a_{\sigma(n),n} = 0$, la relation précédente s'écrit : $\det A = \displaystyle\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n-1),n-1} a_{n,n}$.

Or la restriction à $[\![1, n-1]\!]$ de toute permutation σ vérifiant $\sigma(n) = n$ est une permutation s de $[\![1, n-1]\!]$. Réciproquement, en prolongeant une permutation $s \in \mathcal{S}_{n-1}$ par $s(n) = n$, on obtient une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$. De plus, on a alors $\varepsilon(s) = \varepsilon(\sigma)$ puisqu'une décomposition de s en produit de k transpositions donne également une décomposition de σ en k transpositions. On a alors :

$$\det A = \sum_{s \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(s) a_{s(1),1} a_{s(2),2} \dots a_{s(n-1),n-1} a_{n,n} = a_{n,n} \det A'$$

Proposition :

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :

- $\det A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} \Delta_{i,j_0}$ (développement selon la j_0-ième colonne)
- $\det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \Delta_{i_0,j}$ (développement selon la i_0-ième ligne)

Démonstration 15

Désignons par b la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et par $C_1, C_2 \dots, C_n$ les colonnes de A. Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on a $C_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \det A &= \det_b \left(C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i, C_{j+1}, \dots, C_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_b (C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned} D_{i,j} &= \det_b (C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On peut opérer sur $D_{i,j}$ une suite de $n-j$ échanges de colonnes pour amener la j ime en dernière position, puis une suite de $n-i$ échanges de lignes pour amener la i ème en dernière position. Le déterminant est alors multiplié par $(-1)^{n-j}(-1)^{n-i} = (-1)^{i+j}$ et l'on a :

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}$$

ce qui entraîne, d'après le lemme, $D_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ et donc :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

En appliquant ce résultat à la transposée, on obtient le développement suivant une ligne.

Inverse d'une matrice carrée :

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

- $A\times \mathrm{Com(A)^T}=\mathrm{Com(A)^T\times A=(\det A)I_n}$
- Si $A\in\mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$, on a : $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\Big(\mathrm{Com(A)}\Big)^{\mathrm{T}}$

Démonstration 16

Posons $B=\mathrm{Com(A)}$ et $AB^{\mathrm{T}}=(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Étant donnés deux entiers i et k de $[\![1,n]\!]$, on a par définition :

$$c_{i,k}=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}b_{k,j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}\Delta_{k,j}a_{i,j}$$

• Si $k=i$ la dernière somme ci-dessus représente le développement du déterminant de A suivant la i ème ligne, ce qui implique $c_{i,i}=\det A$.

• Si $k\neq i$, soit $A'=(a'_{i,j})$ la matrice obtenue à partir de A en recopiant la i-ième ligne dans la k-ième ligne. Comme A' admet deux lignes identiques, son déterminant est nul et en développant ce déterminant suivant sa $k^{\text{ème}}$ ligne, on a :

$$0=\det A'=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}\Delta'_{k,j}a'_{k,j}.$$

Par construction, on a $a'_{k,j}=a_{i,j}$ et, puisque les lignes de A et de A' autres que les $k^{\text{èmes}}$ sont identiques, on a $\Delta'_{k,j}=\Delta_{k,j}$. Par suite la relation précédente devient

$$0=\det A'=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}(-1)^{j+k}\Delta_{k,j}=c_{i,k}.$$

On a donc l'égalité $AB^{\mathrm{T}}=(\det A)I_n$.

On démontre de manière analogue, en utilisant des développements par rapport aux colonnes la relation $B^{\mathrm{T}}A=(\det A)I_n$.

Application : Si $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ alors $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

7. **Résolution d'un système $\mathcal{S}$ avec les déterminants (Formules de Cramer)**

Soit à résoudre le système de **Cramer** : $\mathcal{S}\begin{cases}a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n=b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,n}x_n=b_n\end{cases}$

On pose $\Delta=\begin{vmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\cdots&a_{1,n}\\a_{2,1}&a_{2,2}&\cdots&a_{2,n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n,1}&a_{n,2}&\cdots&a_{n,n}\end{vmatrix}$ et pour $i\in[\![1,n]\!]$: $\Delta_{x_i}=\begin{vmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,i-1}&b_1&a_{1,i+1}&\cdots&a_{1,n}\\a_{2,1}&\cdots&a_{2,i-1}&b_2&a_{2,i+1}&\cdots&a_{2,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n,1}&\cdots&a_{n,i-1}&b_n&a_{n,i+1}&\cdots&a_{n,n}\end{vmatrix}$.

On alors l'unique solution $(x_1,\ldots,x_n)$ du système $\mathcal{S}$ donné par les formules dites de Cramer :

$$\boxed{x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}\ ,\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ldots,\ x_n=\frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.}$$

Démonstration 17

Posons $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ et b la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Comme $\mathcal{S}$ est de Cramer, A est inversible et l'on a :

$A=\begin{pmatrix}C_1&|&\cdots&|&C_n\end{pmatrix}$ où $C_1,\ldots,C_n$ sont les colonnes de A et $(x_1,\ldots,x_n)$ est (l'unique) solution du système $\mathcal{S}$ si et seulement si $AX=B$. Ensuite $AX=B\iff\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_jC_j=B$.

Enfin $\Delta_{x_i}=\det_b\Big(C_1,\ldots,\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_jC_j,\ldots,C_n\Big)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_j\det_b\Big(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_n\Big)$.

Pour $j\neq i$, $\det_b\Big(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_n\Big)=0$ car il y a deux colonnes égales et pour $j=i$, $\det_b\Big(C_1,\ldots,C_i,\ldots,C_n\Big)=\Delta$.

On en déduit que $\Delta_{x_i}=x_i\Delta$, d'où le résultat.