RÉVISIONS ET COMPLÉMENTS SUR

LES MATRICES ET LES DÉTERMINANTS

1. **Matrices par blocs**

   Il peut être utile d'écrire une grosse matrice de façon plus ramassée à l'aide de blocs.

   Voici quelques exemples :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline (0) & D \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B & C \\ (0) & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}}$$

où $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$.

On peut aussi cloisonner autrement A : $\boxed{A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ (0) & A_3 \end{pmatrix}}$

où $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ et $(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans ces 2 cas, on dira que A est **triangulaire par blocs**.

De même $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ est **diagonale par blocs** : $\boxed{A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)}$

avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

GÉNÉRALISONS

On appelle **matrice par blocs**, la donnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{N,P}(\mathbb{K})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \; : \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad : A_{i,j} \in \mathcal{M}_{r_i,t_j}(\mathbb{K}).$$

$$\text{On a donc} \qquad \sum_{i=1}^{n} r_i = N \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{p} t_j = P.$$

Opérations sur les matrices par blocs

(a) **Transposition par blocs**

Si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,p} \end{pmatrix}$, alors $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} {A_{1,1}}^{\mathrm{T}} & \dots & {A_{n,1}}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ {A_{1,p}}^{\mathrm{T}} & \dots & {A_{n,p}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

(b) **Combinaison linéaire par blocs**

Soit A et B deux matrices de même taille, écrites avec des blocs de tailles **compatibles** pour l'addition, alors toute combinaison linéaire de A et B s'écrit par blocs :

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} + \mu B_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,p} + \mu B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{n,1} + \mu B_{n,1} & \dots & \lambda A_{n,p} + \mu B_{n,p} \end{pmatrix}.$$

(c) **Produit par blocs**

Si A et B sont écrites par blocs sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p,1} & \cdots & B_{p,q} \end{pmatrix}$$

avec des blocs de tailles compatibles pour le produit matriciel, alors :

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!] \quad : \ C_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{p} A_{i,\alpha} B_{\alpha,j}}$$

Démonstration (non exigible) 1 *(elle est sur le site de la classe Mathématiques / Polycopiés)*

Remarque importante : Le produit par blocs précédent s'effectue comme un produit usuel mais, le produit matriciel **n'étant pas commutatif**, il est impératif de faire **attention à l'ordre** dans lequel on écrit chaque produit $A_{i,\alpha} B_{\alpha,j}$.

(d) **Exemple** Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$. Effectuer le produit par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse (sous forme de blocs !)

Calculer son déterminant. Que peut-on en déduire sur les matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$?

(*réponse* : elles ont même rang et même déterminant avec un facteur $(-1)^n$ près).

2. **Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs**

Soit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ (0) & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, on a alors $\boxed{\det A = \det B \cdot \det D}$.

Démonstration 2

On décompose $A = \begin{pmatrix} I_p & C \\ (0) & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B & (0) \\ (0) & I_q \end{pmatrix}$. Or

$$\begin{vmatrix} I_p & C \\ (0) & D \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \end{array}\right|$$

$= \det D$ par développement selon la première colonne puis selon la nouvelle première colonne ....p fois jusqu'à "tomber" sur D.

On fait de même pour $\begin{vmatrix} B & (0) \\ (0) & I_q \end{vmatrix} = \det B$ par développement selon la dernière colonne puis selon la nouvelle dernière colonne ....q fois jusqu'à "tomber" sur B. On en déduit le résultat.

Remarque importante : Le bloc de zéros (0) est indispensable sinon la formule est fausse.

Corollaire : $\boxed{\det \begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & A_k \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{k} \det A_j}$

Démonstration 3 Récurrence sur k et transposition.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 15 & 74 & 49 \\ 3 & 4 & 53 & 67 & 123 \\ 0 & 0 & 5 & 54 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & & (*) \\ & (5) & \\ (0) & & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times 5 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -130$$

3. **Matrices équivalentes et rang - matrice J_r**

Définition :

$\boxed{(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 \text{ sont équivalentes si : } \exists (P,Q) \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL_p}(\mathbb{K}) \text{ tel que } A = PBQ}$

Proposition : $\boxed{\text{La relation "est équivalente" est une relation d'équivalence sur } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$.

Démonstration : exercice 4

Définition : $J_r(n,p) = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $J_n(n,p) = \begin{pmatrix} I_n & (0) \end{pmatrix}$, $J_p(n,p) = \begin{pmatrix} I_p \\ (0) \end{pmatrix}$, $J_0(n,p) = (0)$.

Proposition : $\boxed{A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ est équivalente à } J_r(n,p) \quad \text{SSI} \quad \mathrm{rg(A) = r}\ .}$

Démonstration 5

Corollaire : $\boxed{(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 \text{ sont équivalentes SSI : } \mathrm{rg(A) = rg(B)}.}$

Démonstration 6

Corollaire : $\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : \mathrm{rg(A) = rg(A^T)}}$.

Démonstration 7

4. **Caractérisation du rang par matrices extraites**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\boxed{\mathrm{rg(A) = r}}$ SSI il existe une matrice A' **extraite** de A tel que $A' \in \mathrm{GL_r}(\mathbb{K})$ et si toute matrice carrée B **extraite** de A de taille $k \times k$ avec $k > r$ vérifie $\det B = 0$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ Donner 2 exemples de matrices A' et 4 exemples de matrices B.

5. **Matrices semblables**

Définition :

$\boxed{(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ sont semblables si : } \exists P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{K}) \text{ tel que } A = PBP^{-1}}$

Remarque importante : Si deux matrices sont semblables alors elles ont même rang, même déterminant, même trace, même valeurs propres, même polynôme caractéristique, même polynôme minimal, mais la réciproque est fausse. **Contre-exemple** : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition : $\boxed{\text{La relation "est semblable" est une relation d'équivalence sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Démonstration : exercice 8

6. **Trace d'une matrice , d'un endomorphisme , d'un projecteur**

Lemme : $\boxed{\forall (A,B)\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ alors : } \quad \mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA).}$

Démonstration 9

Conséquence-définition :

On appelle **trace** d'un endomorphisme $f\in\mathcal{L}(E)$ avec $\dim E=n$, la **trace** de la matrice de f dans une base donnée de E. **Notation** : $\mathrm{Tr}(f)$.

Démonstration 10

Proposition : Soit p un projecteur de $\mathcal{L}(E)$ avec $\dim E=n$, on a alors $\mathrm{Tr}(p)=\mathrm{rg}(p)$

Démonstration 11

7. **Opérations élémentaires sur les matrices (6)** Pour tous couple $i\neq j$ et tou $\lambda\in\mathbb{K}$:

(1) : $\boxed{L_i \longleftarrow L_i+\lambda L_j}$ (2) : $\boxed{C_i \longleftarrow C_i+\lambda C_j}$

(3) : $\boxed{L_i \longleftrightarrow L_j}$ (4) : $\boxed{C_i \longleftrightarrow C_j}$

(5) : $\boxed{L_i \longleftarrow \lambda L_i}$ **avec $\lambda\neq 0$ (sinon ça change le rang)** (6) : $\boxed{C_i \longleftarrow \lambda C_i}$ **avec $\lambda\neq 0$.**

8. **Déterminant de Vandermonde**

$$VDM_n(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

Démonstration 12

Corollaire fondamental : $VDM_n(a_1,\dots,a_n)=0 \iff \exists i\neq j$ tel que $a_i=a_j$.

Exemple d'application :

Montrer que $\Big((X+a_0)^n,(X+a_1)^n,\dots,(X+a_n)^n\Big)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$ avec $a_0<a_1<\cdots<a_n$.

9. **Transvections**

On appelle **matrice de transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**, tout matrice du type :

$$\begin{array}{cc} T_{i,j}(\lambda)=I_n+\lambda E_{i,j}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & (0) & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & & \lambda & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & (0) & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \longleftarrow i\text{-ième ligne} \\ \uparrow \; j\text{-ième colonne} & \end{array}$$

où $\boxed{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2 \text{ avec } i\neq j \text{ et } \lambda\in\mathbb{K}.}$

Exemples de calcul :

$$T_{1,j}(\lambda)A = \begin{pmatrix} a_{1,1}+\lambda a_{j,1} & a_{1,2}+\lambda a_{j,2} & \cdots & a_{1,n}+\lambda a_{j,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AT_{2,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+\lambda a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+\lambda a_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}+\lambda a_{n,2} \end{pmatrix}.$$

PROPRIÉTÉS

$\boxed{P_1}$ Pour tous $i \neq j$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $(I_n+\lambda E_{i,j})(I_n-\lambda E_{i,j}) = I_n-(0) = I_n$, donc $\boxed{T_{i,j}(-\lambda) = T_{i,j}(\lambda)^{-1}}$ et donc $\boxed{\text{L'inverse d'une transvection est une transvection}}$.

$\boxed{P_2}$ Pour tous $i \neq j$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\boxed{\det T_{i,j}(\lambda) = 1}$ et donc $\boxed{T_{i,j}(\lambda) \in SL_n(\mathbb{K})}$.

$\boxed{P_3}$ La multiplication à gauche par une matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ correspond à l'opération élémentaire $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$.

$\boxed{P_3 \text{ bis}}$ La multiplication à droite par une matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ correspond à l'opération élémentaire $C_j \longleftarrow C_j + \lambda C_i$.

$\boxed{P_3 \text{ ter}}$ L'opération $T_{i,j}(1)T_{j,i}(-1)T_{i,j}(1)A$ a pour effet de remplacer $\boxed{L_i \text{ par } L_j \text{ et } L_j \text{ par } -L_i}$. (*on ne pourrait pas échanger sans changer le signe, parce que sinon on changerait le déterminant*).

Théorème fondamental :

$\boxed{\text{Toute matrice } A \in SL_n(\mathbb{R}) \text{ se décompose en produit fini de matrices de } \textbf{transvection}.}$

On va appliquer **l'algorithme du pivot de Gauss** pour transformer A en I_n en utilisant uniquement des transvections.

Comme A est inversible (car $\det A = 1 \neq 0$), sa première colonne n'est pas nulle. S'il existe $i \geqslant 2$ tel que $a_{i,1} \neq 0$, alors l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 - \dfrac{a_{1,1}-1}{a_{i,1}} L_i$ permet de mettre un coefficient 1 en position $(1,1)$, sinon, nécessairement $a_{1,1} \neq 0$ et on fait $L_1 \longleftarrow L_2$ et $L_2 \longleftarrow -L_1$ pour se ramener au cas précédent.

Ensuite, en utilisant le coefficient $(1,1)$ comme pivot, une succession d'opérations sur les lignes puis sur les colonnes permet d'annuler tous les autres coefficients de la première ligne et de la première colonne : il existe donc des matrices de transvection $M_1, \ldots, M_p$ et $N_1, \ldots, N_q$ telles que

$$M_1 \cdots M_p \ A \ N_1 \cdots N_q = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix} \text{ où } A_1 \in SL_{n-1}(\mathbb{K}).$$

On recommence le même algorithme sur A_1 et ainsi de suite (récurrence finie) jusqu'à la matrice I_n (car $\det A = 1$). Ainsi, il existe des matrices de transvection $M'_1, \ldots, M'_r, N'_1, \ldots N'_s$ telles que

$$M'_1 \cdots M'_r \ A \ N'_1 \cdots N'_s = I_n.$$

On en déduit donc que $A = M_r'^{-1} \cdots M_1'^{-1} N_s'^{-1} N_1'^{-1}$. Or l'inverse d'une transvection est aussi une transvection, donc

$$\boxed{A = T_{i_1,j_1}(\lambda_1) \cdot \cdots \cdot T_{i_k,j_k}(\lambda_k)}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Toute matrice de } SL_n(\mathbb{K}) \text{ est un produit fini de matrices de } \textbf{transvections}}.$$

10. **Transvections par blocs**

On dit que l'on a effectué la **transvection par blocs** $\boxed{C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 T}$, lorsque l'on peut effectuer le produit par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline T & I_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}+A_{1,2}T & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1}+A_{2,2}T & A_{2,2} \end{array}\right)$$

On dit que l'on a effectué la **transvection par blocs** $\boxed{C_2 \longleftarrow C_2 + C_1 T}$, lorsque l'on peut effectuer le produit par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} I_p & T \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} + A_{1,1}T \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} + A_{2,1}T \end{array}\right)$$

On dit que l'on a effectué la **transvection par blocs** $\boxed{L_1 \longleftarrow L_1 + TL_2}$, lorsque l'on peut effectuer le produit par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & T \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} + TA_{2,1} & A_{1,2} + TA_{2,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right)$$

On dit que l'on a effectué la **transvection par blocs** $\boxed{L_2 \longleftarrow L_2 + TL_1}$, lorsque l'on peut effectuer le produit par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline T & I_q \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} + TA_{1,1} & A_{2,2} + TA_{1,2} \end{array}\right)$$

Lien avec les transvections "classiques" :

Si l'on pose $T = (t_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right)$, la transvection par blocs : $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2T$ revient à effectuer les np transvections "classiques" sur M : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$C_i(M) \longleftarrow C_i(M) + t_{i,j}C_{j+n}(M) \ ,$$ *ce qui justifie la concision de l'écriture par blocs.*

Remarque importante : $\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline T & I_q \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} I_p & T \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$ sont triangulaires et leurs diagonales n'est composées que de **1**. En conséquence elles sont inversibles et de déterminant **1** . On en déduit qu'effectuer une transvection par blocs ne modifie ni le rang, ni le déterminant (*comme les transvections "classiques"*).