

DM 4

Électrostatique, magnétostatique, induction

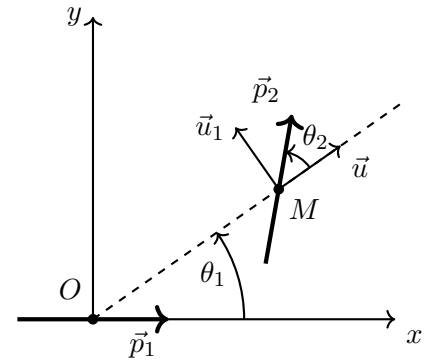
Consigne : Le premier exercice est à faire par tout le monde et vous choisissez ensuite entre l'exercice 2 (type CCinP) et l'exercice 3 (type "plus dur").

Exercice 1 : Interaction entre deux dipôles

Dans tout l'exercice, on envisage des situations dans un plan qui est ramené au repère (Oxy) . On donne : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Deux molécules (1) et (2) possèdent des moments dipolaires permanents notés \vec{p}_1 et \vec{p}_2 . La première est supposée fixe en O , son moment étant dirigé selon \vec{u}_x : $\vec{p}_1 = p_1 \vec{u}_x$. La seconde molécule (2) est placée en un point M de coordonnées polaires (r, θ_1) . On notera (\vec{u}, \vec{u}_1) la base polaire locale associée à M . On supposera dans toute la suite que $\theta_1 \in [0, \pi/2]$. Dans la base (\vec{u}, \vec{u}_1) , le champ électrique $\vec{E}_1(M)$ créé par \vec{p}_1 au point M s'écrit :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (2 \cos \theta_1 \vec{u} + \sin \theta_1 \vec{u}_1)$$



Q.1 Exprimer l'énergie potentielle électrique E_{p2} de la molécule (2) placée dans ce champ, à exprimer en fonction (entre autres) de θ_1 et θ_2 .

Q.2 On suppose dans cette question que \vec{p}_2 ne peut que pivoter autour de M , sans se déplacer. Déterminer l'angle d'équilibre θ_{2e} que fait \vec{p}_2 avec \vec{OM} . On montrera que : $2 \tan \theta_{2e} = \tan \theta_1$.

Application numérique : calculer θ_{2e} pour $\theta_1 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

Q.3 Montrer que dans la configuration d'équilibre de la question précédente, \vec{p}_2 est aligné avec le champ électrique $\vec{E}_1(M)$.

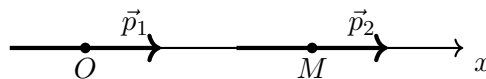
On suppose maintenant que l'angle θ_2 est égal à sa valeur d'équilibre : $\theta_2 = \theta_{2e}$. On étudie l'évolution de l'énergie potentielle de la molécule (2) en fonction de sa position angulaire θ_1 , en considérant que r reste constant.

Q.4 Montrer que E_{p2} peut se mettre sous la forme : $E_{p2} = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta_1}$. Pour quelle valeur θ_{1e} de θ_1 cette énergie est-elle minimale ?

Q.5 La molécule (2) vient se placer spontanément dans la position angulaire θ_{1e} . Quelle est alors la force \vec{F} subie par \vec{p}_2 ? Est-elle attractive ou répulsive ?

Application numérique : deux molécules d'eau de moments dipolaires $p_1 = p_2 = 1,85 \text{ D}$ sont distantes de 300 pm. Calculer $\|\vec{F}\|$. On rappelle que $1 \text{ D} = 0,33 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$.

Pour toute la suite, les deux molécules sont placées selon la figure suivante, la molécule (2) étant située en M de coordonnées $(x, 0)$.



Q.6 Montrer que la force subie par \vec{p}_2 s'écrit : $\vec{F} = -\frac{K}{x^4} \vec{u}_x$ et déterminer l'expression de K en fonction de p_1 , p_2 et ε_0 . Conclure.

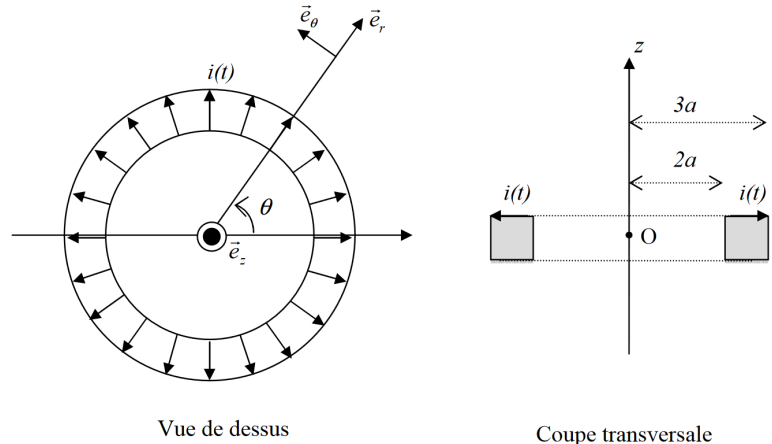
On s'intéresse finalement au cas où la molécule (1) possède un moment dipolaire permanent \vec{p}_1 et la molécule (2) n'en possède pas. Sous l'influence du champ électrique \vec{E}_1 créé par (1), elle peut acquérir un moment dipolaire induit de la forme $\vec{p}_2 = \alpha_2 \varepsilon_0 \vec{E}_1$. Le coefficient positif α_2 est la polarisabilité de la molécule (2). Les deux molécules sont alors dans la situation de la figure précédente.

Q.7 Montrer que la force subie par la molécule (2) peut se mettre sous la forme : $\vec{F} = -\frac{K'}{x^7} \vec{u}_x$ en exprimant K' en fonction de p_1 , ε_0 et α_2 . Cette force est appelée force de Van Der Waals.

Exercice 2 : Pince ampèremétrique à induction

Une pince ampèremétrique à induction un instrument de mesure de l'intensité du courant électrique dans un fil conducteur. La pince, disposée autour du conducteur parcouru par le courant, permet d'accéder à l'intensité cherchée.

On modélise la pince par un tore de section carrée de côté a , d'axe (Oz) et de rayon moyen $\frac{5}{2}a$ (voir figure ci-contre). Sur ce tore sont bobinées régulièrement un grand nombre N de spires carrées de côté a et disposées en série. Ce circuit de résistance totale R est fermé sur un ampèremètre de résistance interne négligeable.



L'espace est rapporté à la base cylindrique ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$). Bien que les courants soient variables, on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaire, ce qui signifie que les résultats de magnétostatique seront valables ici. Le conducteur enserré par la pince ampèremétrique est considéré comme un fil infini confondu avec l'axe (Oz) et est parcouru par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ de pulsation ω .

Q.1 Justifier l'existence d'un courant $i(t)$ dans le bobinage torique de la pince.

On note $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ la valeur de l'intensité de ce courant. On note également \vec{B} le champ magnétique total qui résulte du champ magnétique créé par le courant dans le fil et de celui créé par le courant dans la pince.

Q.2 En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance, montrer que le champ se met sous la forme $\vec{B} = B_\theta(r, z, t) \vec{e}_\theta$.

Q.3 En appliquant le théorème d'Ampère à un contour \mathcal{C} bien choisi que l'on explicitera, déterminer l'expression du champ magnétique total $\vec{B}(M)$ en un point $M(r, \theta, z)$ à l'intérieur du tore ($r \in [2a; 3a]$ et $z \in [-a/2; a/2]$).

Q.4 Établir l'expression du flux $d\Phi$ du champ magnétique à travers une spire du tore en fonction de μ_0 , $I(t)$, $i(t)$ et a . En déduire l'expression du flux total Φ à travers les N spires du tore.

Q.5 Rappeler les définitions respectives du coefficient d'auto-induction L du tore et du coefficient d'induction mutuelle M entre le fil et le tore. D'après ce qui précède, exprimer alors L et M .

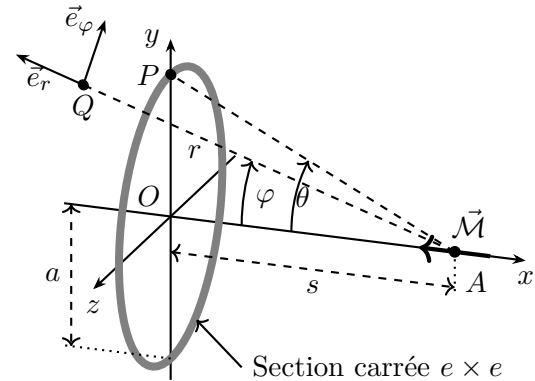
Q.6 Établir l'expression de la force électromotrice induite $e(t)$ dans le tore en fonction de L , M , $\frac{di}{dt}$ et $\frac{dI}{dt}$.

- Q.7** Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{i}{I}$ en fonction de M , L , ω et R . En déduire son module $|\underline{H}|$.
- Q.8** Étudier les limites hautes et basses fréquences de $|\underline{H}|$. Ce dispositif permet-il de mesurer des intensités dans toutes les gammes de fréquences ? En particulier, que se passe-t-il en régime continu ?
- Q.9** Quel est l'intérêt d'un tel dispositif par rapport à un ampèremètre classique ?

Exercice 3 : Freinage par courants de Foucault

Nous nous intéressons au phénomène de freinage par courants induits. Une spire circulaire de rayon a , de centre O , d'axe (Ox) et de surface orientée par le vecteur unitaire \vec{e}_x , est fermée sur elle-même et maintenue fixe. Le fil de cuivre qui la constitue est de section carrée $e \times e$ ($e \ll a$), voir ci-contre.

Un aimant sphérique, de diamètre D et de masse m , est astreint à se déplacer selon l'axe (Ox) . Cet aimant est assimilable d'un point de vue magnétique à un moment magnétique permanent $\vec{M} = -M\vec{e}_x$ ($M \geq 0$), supposé conserver toujours la même orientation. La position du centre de l'aimant est repérée par le point A d'abscisse $s = \overline{OA}$. Notons $\vec{v} = v\vec{e}_x$ sa vitesse.



À l'instant initial ($t = 0$), son centre se situe au point A_0 d'abscisse $s_0 > 0$ et est animé de la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ ($v_0 < 0$). Le point Q est un point quelconque de l'espace et le point $P(0, a, 0)$ un point de la spire. Notons β l'angle situant angulairement le plan (O, A, Q) par rapport à l'axe (Oy) (cet angle n'est pas représenté sur la figure).

Enfin, l'effet de la gravité ne sera jamais pris en compte et nous négligerons toute influence de l'air sur le mouvement de l'aimant. Le référentiel d'étude est supposé galiléen. Nous notons R la résistance de la spire et L son inductance mais nous considérerons que son comportement électrique reste dominé par l'effet résistif (hypothèse H_R).

Le champ magnétique \vec{B}_a produit par l'aimant en un point Q de l'espace s'exprime :

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ 3(\vec{M} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{M} \right\} \quad \text{avec } r = \|\overrightarrow{AQ}\|$$

Notations et constantes :

Perméabilité magnétique du vide :	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$
Masse de l'aimant (en néodyme) :	$m = 4 \text{ g}$
Diamètre de l'aimant :	$D = 10 \text{ mm}$
Moment magnétique, par unité de volume, du néodyme :	$M_v = B^*/\mu_0$ où $B^* = 1,3 \text{ T}$

I – Analyse qualitative de l'interaction

Il s'agit ici d'analyser qualitativement le comportement électromécanique de ce système.

- Q.1** Reproduire la spire et l'aimant mais vus dans le plan (O, x, y) et non plus en perspective. Tracer l'allure de quelques lignes \vec{B}_a du champ magnétique créé par l'aimant.
- Q.2** On considère $s > 0$ et $v < 0$. Indiquer, sur la figure tracée précédemment, le sens du courant i qui apparaît dans la spire. Avec l'orientation adoptée de la surface de la spire, indiquer si ce courant est conventionnellement positif ou négatif.

Q.3 Toujours sur la même figure, représenter la force alors subie par une portion élémentaire de spire autour du point P . Quelles sont les conséquences mécaniques de cette force ?

Admettons que l'aimant parvienne à franchir le point O et poursuive sa trajectoire avec $s < 0$.

Q.4 Représenter l'allure graphique de l'évolution temporelle du courant i .

Q.5 Représenter l'évolution temporelle de la force axiale (composante $F_{a/s}$) que l'aimant fait subir à la spire.

Q.6 Représenter, en correspondance avec les deux tracés précédents, l'évolution temporelle de la vitesse v .

Q.7 Analyser ce système d'un point de vue énergétique.

II – Étude analytique de l'interaction

Q.8 Exprimer le champ magnétique $\vec{B}_a(Q)$ en fonction de B^* , D , r , φ et des vecteurs unitaires \vec{e}_x et \vec{e}_r .

Q.9 Exprimer le flux $\phi_{a/s}(s)$ du champ magnétique créé par l'aimant à travers la spire. L'écrire sous la forme $\phi_{a/s}(s) = \phi_0 F(X)$ où $X = s/a$ et $F(0) = 1$. On explicitera la fonction F et exprimera la constante ϕ_0 en fonction de B^* , D et a .

Q.10 Préciser à quelle condition, portant sur la résistance R et l'inductance L de la spire, ainsi que sur le temps caractéristique τ_i de variation du courant, l'hypothèse H_R adoptée est justifiée.

Q.11 Établir que le courant i est lié à la position et la vitesse de l'aimant selon la relation : $i = K_1 \frac{X \dot{X}}{(1 + X^2)^{5/2}}$ où $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$. On exprimera la constante K_1 en fonction de ϕ_0 et R .

Q.12 Exprimer la force $\vec{F}_{a/s}$ que l'aimant fait subir à la spire (sans remplacer, ici, le courant i par son expression). Vérifier qu'elle se met sous la forme $\vec{F}_{a/s} = K_2 \frac{X}{(1 + X^2)^{5/2}} i \vec{e}_x$. On exprimera la constante K_2 en fonction de B^* , D et a .

Q.13 Donner l'expression du produit $K = K_1 K_2$ en fonction de B^* , D , a et R , puis celle de la force en fonction de K , X et \dot{X} . Analyser la dépendance de cette force vis-à-vis des différents paramètres puis vis-à-vis des variables X et \dot{X} .

Adoptons maintenant le point de vue réciproque en exprimant la force que la spire fait subir à l'aimant. Parcourue par le courant i , la spire crée, au point A de l'axe (Ox) , le champ \vec{B}_s d'expression :

$$\vec{B}_s(A) = B_{s0} \frac{1}{(1 + X^2)^{3/2}} \vec{e}_x \quad \text{où } B_{s0} = \frac{\mu_0 i}{2a}$$

L'aimant, de moment magnétique \vec{M} , est alors soumis à une force $\vec{F}_{s/a} = \left(\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{B}_s$.

Q.14 Exprimer la force $\vec{F}_{s/a}$. Vérifier que ce résultat concorde avec celui obtenu en réponse à la question.

Q.15 Dans la première approche nous avons négligé la composante inductive de la bobine. Dans la seconde, nous avons considéré le champ magnétique qu'elle produit et donc, tacitement, l'existence de son flux propre. Faut-il percevoir ici une contradiction ?