

Problème

$$\begin{aligned}
1. \quad -\chi_f(X) &= \begin{vmatrix} 16-x & -9 & 5 \\ 14 & -7-x & 6 \\ 1 & -1 & 4-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16-x & 7-x & 5 \\ 14 & 7-x & 6 \\ 1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + C_1) \\
&= (7-x) \begin{vmatrix} 16-x & 1 & 5 \\ 14 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} \quad (\text{factorisation de la deuxième colonne par } (7-x)) \\
&= (7-x) \begin{vmatrix} 16-x & 1 & 5 \\ -2+x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&= -(7-x)[(x-2)(4-x) - 1] = -(x-7)(x^2 - 6x + 9) = -(x-7)(x-3)^2
\end{aligned}$$

Cl. $\chi_f(X) = (x-7)(x-3)^2$, $a = 3$ et $b = 7$

$$2. \quad \text{On résout } AX = 3X : \begin{cases} 16x - 9y + 5z = 3x \\ 14x - 7y + 6z = 3y \\ x - y + 4z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} 13x - 9y + 5z = 0 \\ 14x - 10y + 6z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x + z \quad (L_3) \\ 13x - 9(x+z) + 5z = 0 \\ 14x - 10(x+z) + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + z \\ 4x - 4z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = x \end{cases} \cdot \text{D'où : } E_3 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$f(\vec{v}) = 7\vec{v} \text{ et donc, comme } 7 \text{ est une valeur propre simple : } E_7 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En vertu de la deuxième caractérisation de la diagonalisabilité, f n'est pas diagonalisable car $\dim E_3 = 1 < 2$ (ordre de multiplicité de 3 dans le polynôme caractéristique).

3. Le polynôme minimal de f admet les mêmes racines que χ_f et il le divise. Comme f n'est pas diagonalisable, on en déduit que $\Pi_f = \chi_f = (X-3)^2(X-7)$.

4. Si on considère A comme matrice complexe, A n'est toujours pas diagonalisable car l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ aurait les mêmes espaces propres que f (même calculs).

5. C'est CH : $(f - 3 \text{id}_E)^2 \circ (f - 7 \text{id}_E) = \chi_f(f) = 0$.

Si on avait $(f - 3 \text{id}_E) \circ (f - 7 \text{id}_E) = 0$ on aurait f qui serait diagonalisable par la troisième caractérisation ($(X-3)(X-7)$ est scindé, à racine simple et annule f) ce qui est absurde.

6. C'est CH+TDN : $(X-3)^2$ et $X-7$ sont **premiers entre eux** on a donc par TDN :

$$\ker(f - 3 \text{id}_E)^2 \oplus \ker(f - 7 \text{id}_E) = \ker \chi_f(f) = \ker 0 = E.$$

On a de plus $\dim F = 3 - \dim E_7 = 3 - 1 = 2$

Cl. $F \oplus \ker(f - 7 \text{id}_E) = \ker \chi_f(f) = \ker 0 = E$ et $\dim F = 2$.

7. Soit $\vec{x} \in F$, $(f - 3 \text{id}_E)^2(f(\vec{x})) = f((f - 3 \text{id}_E)^2(\vec{x})) = f(0) = 0$ donc $f(\vec{x}) \in F$ et

Soit $\vec{x} \in \ker(f - 3 \text{id}_E)$, $(f - 3 \text{id}_E)^2(\vec{x}) = (f - 3 \text{id}_E)((f - 3 \text{id}_E)(\vec{x})) = 0$

Cl. F est stable par f et que $E_a \subset F$.

8. On résout $(A - 3I_3)^2 X = 0$:
$$\begin{cases} 48x - 32y + 16z = 0 \\ 48x - 32y + 16z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -3x + 2y \end{cases}$$

Donc $F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. On veut une base dont le premier vecteur soit dans $E_3 \subset F$.

Essayons $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$: $\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = 2$: "ça marche!!".

Cl. Une équation cartésienne de F est $3x - 2y + z = 0$ et

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ est une base de F répondant à la question.

9. \mathcal{B}_1 est une base de E d'après le 5 et parce que la concaténation de bases de SEV supplémentaires est une base de E .

10. On a $B = M_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 3 & \alpha' & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$\alpha, \beta, \gamma, \alpha'', \beta'', \gamma''$: évident, $\gamma' = 0$ car F est stable, $\beta' = 3$ à cause (par exemple) de la trace de f : $\text{Tr}(f) = 16 - 7 + 4 = 3 + 3 + 7$ et α' est non nul sinon B serait diagonale et f serait donc diagonalisable ce qui n'est pas le cas.

On a la relation uuuultra-connue : $A = PBP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

11. Soit $\mathcal{B}_2 = (\alpha' \vec{u}, \vec{u}', \vec{v})$ qui est encore une base (rang inchangé!), alors on a :

$f(\alpha' \vec{u}) = 3(\alpha' \vec{u})$, $f(\vec{u}') = 3\vec{u}' + \alpha' \vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 7\vec{v}$.

D'où : **Cl.** $C = M_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

12. On calcule C^2, C^3, \dots : $C^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 6 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 7^2 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 27 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 7^3 \end{pmatrix}$, $C^4 = \begin{pmatrix} 3^4 & 108 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & 7^4 \end{pmatrix}$.

On remarque que les coefficients " $a_{1,2}$ " vérifient : $6 = 2 \times 3$, $27 = 3 \times 9$, $108 = 4 \times 27 \dots$ d'où

il semblerait que ce soit $n \times 3^{n-1}$. Conjecturons : $C^n = \begin{pmatrix} 3^n & n \times 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}$

On montre facilement que cette relation est vraie pour $n = 1$ et que si elle est vraie pour n en calculant $C^{n+1} = C^n C$ on montre qu'elle est encore vraie au rang $n + 1$. On conclut par récurrence que

Cl. $\forall n \geq 1 : C^n = \begin{pmatrix} 3^n & n \times 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}$.

Par la méthode du pivot de Gauss on a $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ et comme $n \times 3^{n-1} = \frac{-1}{9}$ pour $n = -1$ la formule de C^n est encore valable pour $n = -1$.

13. (a) Le cours donne $D = \text{vect}(\vec{w})$ est une droite stable par f **SSI** \vec{w} est un vecteur propre par f .

Cl. $\boxed{\text{Les droites stables par } f \text{ sont } E_3 \text{ et } E_7}$.

(b) $P_1 = E_3 \oplus E_7$ et $P_2 = F$ sont 2 plans stables par f (car E_3, E_7 et F sont stables par f).

(c) Soit P un plan stable par f . On a $\chi_g(X) = (x-3)(x-7)$ ou $\chi_g(X) = (x-3)^2$ car $\chi_g(X)$ est de degré 2 et divise $\chi_f(X)$.

Si $\chi_g(X) = (x-3)(x-7)$ alors par CH dans P on a

$$(g - 3 \text{ id}_P) \circ (g - 7 \text{ id}_P) = \chi_g(g) = 0_P, \text{ d'où pour tout vecteur } \vec{x} \text{ de } P \text{ on a : } (g - 3 \text{ id}_P) \circ (g - 7 \text{ id}_P)(\vec{x}) = (f - 3 \text{ id}_E) \circ (f - 7 \text{ id}_E)(\vec{x}) = 0 \text{ et donc}$$

$P \subset \ker(f - 3 \text{ id}_E) \circ (f - 7 \text{ id}_E) = E_3 \oplus E_7$ (par TDN : $X - 3$ et $X - 7$ étant premier entre eux), par égalité des dimensions on a $\boxed{P = E_3 \oplus E_7 = P_1}$

Si $\chi_g(X) = (x-3)^2$, on montre de manière totalement identique que

$$P = \ker(f - 3 \text{ id}_E)^2 = F = P_2.$$

Cl. $\boxed{P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont les 2 seuls plans stable par } f}$.

(d) $\boxed{\{0\}, E_3, E_7, P_1, P_2 \text{ et } E = \mathbb{R}^3 \text{ sont les 6 SEV stables de } f}$.

14. On a $C = \Delta_1 + N_1$ avec $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement que $C = \Delta_1 + N_1$, $\Delta_1 N_1 = N_1 \Delta_1$ et $N_1^3 = (0)$. On pose alors

$$\Delta = P \Delta_1 P^{-1} \text{ et } N = P N_1 P^{-1}.$$

On montre alors facilement que $A = \Delta + N$, Δ diagonalisable, N nilpotente et $\Delta N = N \Delta$.

On retrouve donc grâce à Newton, $A^n = (\Delta + N)^n = \Delta^n + n \Delta^{n-1} N + \binom{n}{2} \Delta^{n-2} N^2 + 0$.

Tout calculs effectués, on trouve

$$\Delta = \begin{pmatrix} 15 & -8 & 4 \\ 12 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$