Problème

1. $$-\chi_f(X) = \begin{vmatrix} 16-x & -9 & 5 \\ 14 & -7-x & 6 \\ 1 & -1 & 4-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16-x & 7-x & 5 \\ 14 & 7-x & 6 \\ 1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} (C_2 \leftarrow C_2 + C_1)$$

$$= (7-x)\begin{vmatrix} 16-x & 1 & 5 \\ 14 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} \text{(factorisation de la deuxième colonne par } (7-x))$$

$$= (7-x)\begin{vmatrix} 16-x & 1 & 5 \\ -2+x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$= -(7-x)[(x-2)(4-x)-1] = -(x-7)(x^2-6x+9) = -(x-7)(x-3)^2$$

<u>**Cl.**</u> $\boxed{\chi_f(X) = (x-7)(x-3)^2 \quad , \quad a=3 \text{ et } b=7}$

2. On résout $AX = 3X$: $\begin{cases} 16x - 9y + 5z = 3x \\ 14x - 7y + 6z = 3y \\ x - y + 4z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} 13x - 9y + 5z = 0 \\ 14x - 10y + 6z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = x + z \ (L_3) \\ 13x - 9(x+z) + 5z = 0 \\ 14x - 10(x+z) + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + z \\ 4x - 4z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = x \end{cases}$. D'où : $\boxed{E_3 = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

$f(\overrightarrow{v}) = 7\overrightarrow{v}$ et donc, comme 7 est une valeur propre simple : $\boxed{E_7 = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

En vertu de la deuxième caractérisation de la diagonalisabilité, f n'est pas diagonalisable car $\dim E_3 = 1 < 2$ (ordre de multiplicité de 3 dans le polynôme caractéristique).

3. Le polynôme minimal de f admet les mêmes racines que χ_f et il le divise. Comme f n'est pas diagonalisable, on en déduit que $\Pi_f = \chi_f = (X-3)^2(X-7)$.

4. Si on considère A comme matrice complexe, A n'est toujours pas diagonalisable car l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ aurait les mêmes espaces propres que f (même calculs).

5. C'est CH : $(f - 3\ id_E)^2 \circ (f - 7\ id_E) = \chi_f(f) = 0$.

   Si on avait $(f - 3\ id_E) \circ (f - 7\ id_E) = 0$ on aurait f qui serait diagonalisable par la troisième caractérisation ($(X-3)(X-7)$ est scindé, à racine simple et annule f) ce qui est absurde.

6. C'est CH+TDN : $(X-3)^2$ et $X-7$ sont <u>**premiers entre eux**</u> on a donc par TDN :

   $\ker(f - 3\ id_E)^2 \oplus \ker(f - 7\ id_E) = \ker \chi_f(f) = \ker 0 = E$.

   On a de plus $\dim F = 3 - \dim E_7 = 3 - 1 = 2$

   <u>**Cl.**</u> $\boxed{F \oplus \ker(f - 7\ id_E) = \ker \chi_f(f) = \ker 0 = E}$ et $\boxed{\dim F = 2}$.

7. Soit $\overrightarrow{x} \in F$, $(f-3\ id_E)^2(f(\overrightarrow{x})) = f((f-3\ id_E)^2(\overrightarrow{x})) = f(0) = 0$ donc $f(\overrightarrow{x}) \in F$ et
Soit $\overrightarrow{x} \in \ker(f-3\ id_E)$, $(f-3\ id_E)^2(\overrightarrow{x}) = (f-3\ id_E)((f-3\ id_E)(\overrightarrow{x})) = 0$
Cl. $\boxed{F \text{ est stable par } f \text{ et que } E_a \subset F}$.

8. On résout $(A-3I_3)^2X = 0$: $\begin{cases} 48x-32y+16z=0 \\ 48x-32y+16z=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-2y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=-3x+2y \end{cases}$

Donc $F = vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$. On veut une base dont le premier vecteur soit dans $E_3 \subset F$.

Essayons $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix})$: $\text{rg}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}) = \text{rg}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}) = 2$: "ça marche !!".

Cl. $\boxed{\text{Une équation cartésienne de } F \text{ est } 3x-2y+z=0}$ et

$\boxed{(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}) \text{ est une base de } F \text{ répondant à la question}}$.

9. $\mathcal{B}_1$ est une base de E d'après le 5 et parce que la concaténation de bases de SEV supplémentaires est une base de E.

10. On a $\boxed{B = M_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 3 & \alpha' & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}$.

$\alpha, \beta, \gamma, \alpha", \beta", \gamma"$: évident, $\gamma' = 0$ car F est stable, $\beta' = 3$ à cause (par exemple) de la trace de f : $Tr(f) = 16-7+4 = 3+3+7$ et α' est non nul sinon B serait diagonale et f serait donc diagonalisable ce qui n'est pas le cas.

On a la relation uuuultra-connue : $\boxed{A = PBP^{-1} \text{ , avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}}$

11. Soit $\mathcal{B}_2 = (\alpha'\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v})$ qui est encore une base (rang inchangé !), alors on a :
$f(\alpha'\overrightarrow{u}) = 3(\alpha'\overrightarrow{u})$, $f(\overrightarrow{u}') = 3\overrightarrow{u}' + \alpha'\overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{v}) = 7\overrightarrow{v}$.

D'où : **Cl.** $\boxed{C = M_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}$.

12. On calcule C^2 , C^3 ,... : $C^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 6 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 7^2 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 27 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 7^3 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 3^4 & 108 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & 7^4 \end{pmatrix}$.
On remarque que les coefficients "$a_{1,2}$" vérifient : $6 = 2 \times 3$, $27 = 3 \times 9$, $108 = 4 \times 27$... d'où il semblerait que ce soit $n \times 3^{n-1}$. Conjecturons : $C^n = \begin{pmatrix} 3^n & n \times 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}$

On montre facilement que cette relation est vraie pour $n = 1$ et que si elle est vraie pour n en calculant $C^{n+1} = C^n C$ on montre qu'elle est encore vraie au rang $n+1$. On conclut par récurrence que

Cl. $\boxed{\forall n \geqslant 1 : C^n = \begin{pmatrix} 3^n & n \times 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}}$.

Par la méthode du pivot de Gauss on a $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ et comme $n \times 3^{n-1} = \frac{-1}{9}$ pour $n = -1$ la formule de C^n est encore valable pour $n = -1$.

13. (a) Le cours donne $D = vect(\overrightarrow{w})$ est une droite stable par f **SSI** $\overrightarrow{w}$ est un vecteur propre par f.

    Cl. $\boxed{\text{Les droites stables par } f \text{ sont } E_3 \text{ et } E_7}$.

    (b) $P_1 = E_3 \oplus E_7$ et $P_2 = F$ sont 2 plans stables par f (car E_3, E_7 et F sont stables par f).

    (c) Soit P un plan stable par f. On a $\chi_g(X) = (x-3)(x-7)$ ou $\chi_g(X) = (x-3)^2$ car $\chi_g(X)$ est de degré 2 et divise $\chi_f(X)$.

    Si $\chi_g(X) = (x-3)(x-7)$ alors par CH dans P on a $(g - 3\ id_P) \circ (g - 7\ id_P) = \chi_g(g) = 0_P$, d'où pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de P on a : $(g - 3\ id_P) \circ (g - 7\ id_P)(\overrightarrow{x}) = (f - 3\ id_E) \circ (f - 7\ id_E)(\overrightarrow{x}) = 0$ et donc $P \subset \ker(f - 3\ id_E) \circ (f - 7\ id_E) = E_3 \oplus E_7$ (par TDN : $X - 3$ et $X - 7$ étant premier entre eux), par égalité des dimensions on a $\boxed{P = E_3 \oplus E_7 = P_1}$

    Si $\chi_g(X) = (x-3)^2$, on montre de manière totalement identique que $P = \ker(f - 3\ id_E)^2 = F = P_2$.

    Cl. $\boxed{P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont les 2 seuls plans stable par } f}$.

    (d) $\boxed{\{0\}\ ,\ E_3\ ,\ E_7\ ,\ P_1\ ,\ P_2 \text{ et } E = \mathbb{R}^3 \text{ sont les 6 SEV } \textbf{stables} \text{ de } f}$.

14. On a $C = \Delta_1 + N_1$ avec $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

    On vérifie facilement que $C = \Delta_1 + N_1$, $\Delta_1 N_1 = N_1 \Delta_1$ et $N_1^3 = (0)$. On pose alors $\Delta = P \Delta_1 P^{-1}$ et $N = P N_1 P^{-1}$.

    On montre alors facilement que $A = \Delta + N$, Δ diagonalisable, N nilpotente et $\Delta N = N \Delta$. On retrouve donc grâce à Newton, $A^n = (\Delta + N)^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}N + \binom{n}{2}\Delta^{n-2}N^2 + 0$.

    Tout calculs effectués, on trouve

$$\Delta = \begin{pmatrix} 15 & -8 & 4 \\ 12 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$