PROGRAMME DE COLLE 11 :

Cours : EVN (Début) + Exercices : Réduction

LES DÉMONSTRATIONS DOIVENT D'ABORD ÊTRE SUES AVEC UN DESSIN ET ENSUITE ÉVENTUELLEMENT LA DÉMONSTRATION PLUS "CALCULATOIRE" ET LE RESTE DE LA COLLE SUR LA **RÉDUCTION** (TOUT LE PROGRAMME DE COLLE 12)

(Notes aux colleurs) :

Merci de donner 2-3 questions de cours sur les EVN jusqu'à la démonstration n°37 du polycopié distribué aux élèves et qui est à la suite du programme de colle (exceptionnellement je ne mets pas de ● : je vous laisse gérer selon le "client" la force des démonstrations.)

Attention tout ce qui concerne **Cauchy(suite, complet,Banach)** a disparu du programme par contre les normes **subordonnées** font leur grand retour !

I NORMES ET DISTANCES

Définition de norme, distance, boules—-¿ dessins !

Parties et applications bornés, applications lipschitziennes

Exemples fondamentaux : $\mathbb{K}^p$ et $C^0([a,b],\mathbb{K})$ et leurs 3 normes : N_1, N_2 et N_∞)

Notion de distance d'un point à un sous-ensemble

II SUITE D'UN EVN - COMPARAISON DES NORMES

Convergence

Valeurs d'adhérence

Comparaison des normes - Normes équivalentes

Interprétation "boulesque"

Comparaison des 3 normes usuelles dans $\mathbb{K}^p$ et $C^o([a,b],\mathbb{K})$. (les étudiants doivent savoir les comparer avec les meilleurs constantes possibles, exemple : dans $\mathbb{K}^p$: $N_1 \leqslant \sqrt{p}N_2$ et $N_2 \leqslant N_2$....)

III TOPOLOGIE D'UN EVN

Définition de **voisinage**, d'ouvert, fermé, point intérieur, point adhérent, **intérieur** ($\overset{o}{A}$), **adhérence** ($\overline{A}$), **frontière**.

Voisinage, ouvert et fermé relatif d'un sous-ensemble d'un EVN.

Remarque : (aucune formule (à l'ancienne !)du type $\overline{A \cup B} = \cdots$ n'a été vu et elles ne sont pas au programme).

Prévisions : EVN suite et fin , fonctions vectorielles.

ESPACES VECTORIELS NORMES RÉELS OU COMPLEXES (evn)

DANS TOUT LE CHAPITRE LES ESPACES VECTORIELS SERONT TOUJOURS
DES $\mathbb{K}$-ESPACES VECTORIELS AVEC $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$.

I. NORMES ET DISTANCES

1°) Normes

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition : On appelle **norme** sur E, toute application de E dans $\mathbb{R}$, notée $\|\|$ telle que :

(i) $\forall x \in E \quad : \quad \|x\| \geqslant 0.$

(ii) $\forall x \in E \quad : \quad \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0.$

(iii) $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K} \quad : \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$

(iv) $\forall (x, y) \in E^2 : \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (**inégalité triangulaire**)

On dit alors que $(E, \|\|)$ est un **espace vectoriel normé (EVN)**.

Remarque 1 : La norme est aussi parfois notée N, $|||$... A partir de maintenant et dans tout le chapitre, lorsque l'on parlera de E cela signifiera (sauf mention express du contraire) que E est un $\mathbb{K}$-ev muni d'une norme que l'on notera (sauf mention du contraire) $\|\|$.

Remarque 2 : Si l'application $\|\|$ ne vérifie que (i) , (iii) et (iv), on dit alors que $\|\|$ est une **semi-norme** sur E.

Propriété : (**Inégalité triangulaire renversée**) : $\forall (x, y) \in E^2,$ $\leqslant \|x - y\|$

2°) Distances - Boules - Sphères

Définition 1 : Soit $(E, \|\|)$ un EVN. On appelle **distance** associée à la norme $\|\|$, l'application d de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par $\boxed{\mathrm{d}(x, y) = \|y - x\|}$.

d vérifie donc $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$; $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ et $\mathrm{d}(x, z) \leqslant \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$

Remarque : On a de plus pour tous vecteurs x, y et a de E, $\mathrm{d}(x+a, y+a) = \mathrm{d}(x, y)$ (invariance par translation).

Définition 2 : On appelle **boule fermée** de centre $a \in E$ et de rayon $r \geqslant 0$, notée $\mathcal{B}_F(a, r)$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont à une distance de a inférieure ou égale à r :

$$\boxed{\mathcal{B}_F(a, r) = \left\{ x \in E \text{ tel que } \mathrm{d}(a, x) = \|x - a\| \leqslant r \right\}}$$

Définition 2-bis : On appelle **boule ouverte** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$, notée $\mathcal{B}_O(a, r)$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont à une distance de a strictement inférieure à r :

$$\boxed{\mathcal{B}_O(a, r) = \left\{ x \in E \text{ tel que } \mathrm{d}(a, x) = \|x - a\| < r \right\}}$$

Définition 3 : On appelle **sphère** de centre $a \in E$ et de rayon $r \geqslant 0$, notée $\mathcal{S}(a, r)$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont à une distance de a égale à r :

$$\boxed{\mathcal{S}(a, r) = \left\{ x \in E \text{ tel que } \mathrm{d}(a, x) = \|x - a\| = r \right\}}$$

Proposition : Toute boule (ouverte ou fermée) est convexe

Démonstration 1

3°) Exemples

a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Soit $x : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. On définit 3 **normes** sur E associées à la base $\mathcal{B}$: $\|_\infty$, $\|_2$ et $\|_1$ par

$$\boxed{\|x\|_\infty = \max\left\{|x_1|,|x_2|,...,|x_p|\right\} \quad , \quad \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_p|^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_1 = |x_1|+\cdots+|x_p|}$$

Théorème :

$$\boxed{\|_\infty \ , \ \|_2 \ \text{ et } \ \|_1 \text{ sont des } \textbf{normes} \text{ sur } E}$$

Démonstration 2

Dessiner les sphères unités (rayon=1) pour ces 3 **normes** avec $E=\mathbb{R}^2$ et $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.

Remarque : Sur $E=\mathbb{R}$ ces 3 **normes** sont égales à

Exercice 1 : Donner toutes les **normes** de $\mathbb{R}$.

Remarque importante : Lorsque $E=\mathbb{R}$, la **norme** considérée sera toujours (sans le préciser) la **valeur absolue** $|x|$ (idem pour $\mathbb{C}$).

b) Soit $E=C([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des **fonctions continues** sur le segment $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{K}$.

On définit 3 **normes** sur E : N_∞ , N_2 et N_1 par

$$\boxed{\forall f\in E \quad : \quad N_\infty(f)=\max_{t\in[a,b]}|f(t)| \quad , \quad N_2(f)=\sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad N_1(f)=\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t}$$

Définition : $N_1(f)$ est appelée norme de le $\boxed{\textbf{convergence en moyenne}}$, $N_2(f)$ norme de la $\boxed{\textbf{convergence en moyenne quadratique}}$, et $N_\infty(f)$ norme de la $\boxed{\textbf{convergence uniforme}}$ sur $[a,b]$.

Théorème :

$$\boxed{N_\infty \ , \ N_2 \text{ et } N_1 \text{ sont des } \textbf{normes} \text{ sur } E}.$$

Démonstration 3

Remarque : On peut "**visualiser**" la boule de centre f et de rayon r pour la norme N_∞ à l'aide de la notion de **tube**.

c) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $(\bullet|\bullet)$ un **produit scalaire** sur E (E est donc un préhilbertien réel). On définit une **norme** sur E **associées** au produit scalaire noté : $\|_2$ par

$$\boxed{\|x\|_2=\sqrt{(x|x)}}$$

Théorème :

$$\boxed{\|_2 \text{ est une norme sur } E}.$$

Démonstration 4

d) (HPTS)

Soit $\ell^1(\mathbb{R})=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad / \quad \left(\sum|u_n|\right) \text{soit convergente}\right\}$,

$\ell^2(\mathbb{R})=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad / \quad \left(\sum u_n^2\right) \text{soit convergente}\right\}$ et $\ell^\infty(\mathbb{R})=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n) \text{ soit bornée }\}$

On définit 3 **normes** respectivement sur $\ell^1(\mathbb{R})$, $\ell^2(\mathbb{R})$ et $\ell^\infty(\mathbb{R})$: $\|_1$, $\|_2$ et $\|_\infty$ par

$$\boxed{\forall u=(u_n)_n \quad : \quad \|u\|_1=\sum_{n=0}^{\infty}|u_n| \quad , \quad \|u\|_2=\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}u_n^2} \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|}$$

Théorème : $\boxed{\|_1 \text{ , } \|_2 \text{ et } \|_\infty \text{ sont des } \textbf{normes} \text{ sur } \ell^1(\mathbb{R}) \text{ , } \ell^2(\mathbb{R}) \text{ et } \ell^\infty(\mathbb{R}) \text{ respectivement}}$

Démonstration 5

e) Soient $E_1,\dots,E_p$, p **EVN** (E_i muni de la **norme** N_i). Soit $E=E_1\times\cdots\times E_p$

On définit une **norme** sur E appelée **norme produit** : N par

$$\boxed{N(X)=\max\{N_1(\overrightarrow{x_1}),...,N_p(\overrightarrow{x_p})\}, \text{ avec } X=(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_p})\in E}$$

Théorème :

$$\boxed{N \text{ est une } \textbf{norme} \text{ sur } E}.$$

Démonstration 6

4°) Partie bornée - Application bornée - Application lipschitzienne

Proposition-Définition : Soit $(E,\|)$ un EVN et soit $A\subset E$. On dit que A est **borné** dans E (pour $\|$) si l'une des **2 conditions suivantes équivalentes** est vérifiée :

i) $\boxed{\exists a\in E, \exists r>0 \text{ tel que } A\subset\mathcal{B}_F(a,r)}$ ou ii) $\boxed{\exists M>0 \text{ tel que } \forall x\in A, \|x\|\leqslant M}$.

Démonstration 7

Définition : Soit $f : X\longrightarrow E$ une application d'un ensemble X quelconque vers E un EVN. On dit que f est **bornée** s'il existe $M>0$ tel que $\forall x\in X$, $\|f(x)\|\leqslant M$.

Remarque : Cette ***Définition*** équivaut à l'ensemble $f(X)$ est **borné** dans E.

Exemples 1 : a) Les boules et les sphères sont évidemment bornées.

b) Soit $E=C([0,1],\mathbb{R})$ et $A=\{f\in E \text{ telle que } \int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant 1\}$. Montrer que A est **borné** dans E pour la norme N_1 mais que, à l'aide d'un dessin, A **n'est pas borné** dans E pour la norme N_∞.

Définition : On note $\boxed{\mathcal{B}(X,E)}$ **l'ensemble des fonctions** de X dans E qui sont **bornées**.

Proposition : $\boxed{\mathcal{B}(X,E) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel}}$

Démonstration 8

Définition-proposition :

$$\boxed{N_\infty : \begin{cases} \mathcal{B}(X,E)\longrightarrow\mathbb{R} \\ f\longmapsto\sup\limits_{x\in X}\|f(x)\| \end{cases} \quad \text{est une } \textbf{norme} \text{ sur } \mathcal{B}(X,E)}$$

Démonstration 9

Application lipschitzienne :

Définition : On considère 2 espaces vectoriels normés (E,N) et $(F,\|.\|)$.

Si A est une partie de E et f une application de A dans F, on dit que f est **lipschitzienne sur A** si :

$$\boxed{\exists k\in\mathbb{R} \text{ tel que } \forall (x,y)\in A^2, \|f(y)-f(x)\|\leqslant\ k\ N(y-x)}.$$

Théorème : $\boxed{\| \text{ est 1- } \textbf{lipschitzienne} \text{ de } (E,\|) \text{ sur } \mathbb{R}}$, c'est-à dire :

Démonstration 10

Conséquence : Si x et y sont **proches** l'un de l'autre alors leurs normes sont **également proches**.

Théorème : Toute composée d'applications lipschitziennes est **lipschitzienne**.

Démonstration 11

Remarque : On dit qu'une application est $\boxed{\textbf{contractante}}$ si elle est k-lipschitzienne avec $\boxed{0 \leqslant k < 1}$.

Définition : On appelle distance de $x \in E$ à $A \subset E$, le réel $\boxed{\mathrm{d}(x,A) = \inf\{\|x-a\| \text{ , } a \in A\}}$

Proposition : Soit $(E,\|)$ un EVN et $A \subset E$, non vide, alors $\boxed{f : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{d}(x,A) \end{array} \right. \text{ est } \textbf{1-lipschitzienne}}$

Démonstration 12

Exercices 2 : a) Montrer que l'application sin est lipschitzienne de E dans F avec $E = F = \mathbb{R}$.

b) Montrer que l'application F définie par $F(f) = \displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$ avec $E = C([0,2],\mathbb{R})$, lorsque E est muni respectivement de la norme N_∞, N_1 et N_2.

c) Étudier la "lipschitziennité" de la fonction F définie par $F(f) = f(1/2)$ de E dans $\mathbb{R}$ avec $E = C([0,1],\mathbb{R})$, lorsque E est muni respectivement de la norme N_∞, N_1 (et N_2).

II. SUITES D'UN EVN - COMPARAISON DES NORMES

1°) Convergence

Définition 1 : Soit $(E,\|)$ un espace vectoriel normé et soit $L \in E$. On dit que la suite $u = (u_n)_n$ à valeurs dans E, $\boxed{\textbf{converge vers } L \in E}$ si la suite réelle ($\|u_n - L\|$)$_n$ **converge vers 0**, c'est à dire :

$\forall \varepsilon > 0$,

Définition 1bis : Soit $(E,\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que la suite $u = (u_n)_n$ à valeurs dans E, $\boxed{\textbf{converge}}$ s'il existe $L \in E$ tel que la suite $u = (u_n)_n$ converge vers L, c'est à dire :

Définition 2 : Soit $(E,\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que la suite $u = (u_n)_n$ à valeurs dans E, $\boxed{\textbf{diverge}}$ si elle n'est pas convergente, c'est à dire :

$\forall$

Unicité du "L", notion de limite.

Lemme : $\boxed{\text{Soit } (E,\|)\text{, un EVN et soient } (L,L') \in E^2. \text{ Si } L \neq L' \text{ alors } \exists r > 0 \text{ tel que } \mathcal{B}_F(L,r) \cap \mathcal{B}_F(L',r) = \emptyset}$.

Démonstration 13 (faire un dessin !)

Corollaire : Soit $(E,\|)$ un EVN et soit la suite $u = (u_n)_n$ à valeurs dans E convergente vers $L \in E$, alors "le" L est $\boxed{\textbf{unique}}$.

Démonstration 14

Conséquence : "Le" L (unique) est appelé $\boxed{\textbf{limite de la suite } u = (u_n)_n}$ et l'on note

$$\boxed{L = \lim u = \lim_{n\to\infty} u_n} \quad \text{ou} \quad \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L}.$$

Exercices 3 :

a) Montrer que la suite de $E = \mathbb{R}^2$ définie par $u_n = \left(\dfrac{3n+5}{2n-7}, \cos\dfrac{1}{n+1}\right)$ converge pour les 3 normes usuelles de E.

b) Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par : f_n est continue et affine par morceaux sur $[0,1]$, nulle sur $[1/n,1]$, $f(0) = 0$ et enfin $f(1/2n) = 1$.

Étudier la convergence de la suite (f_n) pour les normes usuelles N_∞ et N_1 de E.

Conséquences :

Théorème : **Théorèmes Généraux (TG)** : L'ensemble des suites convergentes à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et on a les **théorèmes généraux** : si $(u_n)_n$, suite de E, **converge** vers L, si $(v_n)_n$, suite de E, **converge** vers L', si $(\lambda_n)_n$, suite de $\mathbb{K}$ **converge** vers μ et si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors

$(\alpha u_n + v_n)_n$ **converge** vers $\alpha L + L'$, $(\lambda_n u_n)_n$ **converge** vers μL et $(\|u_n\|)_n$ **converge** vers $\|L\|$

Démonstration 15

2°) Valeurs d'adhérences

On a, **de même que sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$**, la notion de **suites extraites**, de **valeurs d'adhérences** (mêmes ***Définitions***, mêmes **Propriétés** et mêmes **Démonstrations**...)

3°) Convergence dans un produit fini d'espaces vectoriels

Proposition 1 :

Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ munit de la **norme produit**.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Pour tout entier n, on pose $u_n = (u_n(1), u_n(2), \cdots, u_n(p))$ et $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p)$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** dans E vers ℓ SSI les **suites** $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent** vers ℓ_k dans E_k pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Démonstration 16

4°) Comparaison des normes

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-EV. 2 normes N et N' sur E sont **équivalentes** s'il existe 2 réels α et β, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\boxed{\forall x \in E,\ N(x) \leqslant \alpha\, N'(x) \quad \text{et} \quad N'(x) \leqslant \beta\, N(x).}$$

Notation : Si l'on a : $\forall x \in E,\ N(x) \leqslant \alpha N'(x)$, on notera $N \preceq \alpha N'$

Remarque (HP) : Si l'on a $N \preceq \alpha N'$, on dit que N est dominée par N' (ou que N' est plus fine que N).

Propriété : La relation "est équivalent" est une relation d'équivalence sur

Démonstration 17

Interprétation "boulesque" : Avec les notations de la ***Définition*** on a

$\mathcal{B}_F^{(N)}(a, r) \subset \mathcal{B}_F^{(N')}(a, \quad)$ et $\mathcal{B}_F^{(N')}(a, r) \subset \mathcal{B}_F^{(N)}(a, \quad)$ avec indépendants de .

Théorème : Soient N et N', **2 normes équivalentes** de E et soit $(u_n)_n$ une suite de E, alors :

$$\boxed{(u_n)_n \text{ converge vers } L \text{ pour } N \Longleftrightarrow (u_n)_n \text{ converge vers } L \text{ pour } N'.}$$

Démonstration 18

Remarques pratiques :

a) Pour montrer que N et N' **sont équivalentes**, on part de $N(x)$ que l'on essaye de majorer par $\alpha N'(x)$ avec **α indépendant de x** et on fait pareil dans "l'autre sens".

b) Pour montrer que N et N' **ne sont pas équivalentes**, on doit montrer que (par exemple) $\forall \alpha > 0$, il existe $x \in E$ tel que $N(x) > \alpha N'(x)$. Pour cela il peut être pratique d'exhiber une suite $(u_n)_n$ tel que (par exemple) $(N'(u_n))_n$ converge vers 0 et $(N(u_n))_n$ ne converge vers pas vers 0 (Démonstration : exercice).

5°) Comparaison des normes usuelles de $\mathbb{K}^p$ et $E = C([a,b],\mathbb{K})$

a) Théorème : Sur $\mathbb{K}^p$, $\|_1, \|_2$ et $\|_\infty$ sont **2 à 2 équivalentes** et plus précisément, on a (les "**meilleurs constantes**") :

$\boxed{\|_1 \leqslant \quad \|_\infty \text{ et } \|_\infty \leqslant \quad \|_1}$ $\boxed{\|_2 \leqslant \quad \|_\infty \text{ et } \|_\infty \leqslant \quad \|_2}$ $\boxed{\|_1 \leqslant \quad \|_2 \text{ et } \|_2 \leqslant \quad \|_1}$

Démonstration 19

b) Comparer les 3 **normes** N_∞ , N_2 et N_1 sur $E = C([a,b],\mathbb{K})$.

Démonstration 20

III. TOPOLOGIE D'UN EVN

1°) Voisinage

Définition 1 :

Soit $(E,\|)$ un EVN et $a \in E$. Le sous-ensemble $V \subset E$ est appelé **voisinage** de a si $\boxed{\exists r > 0 \text{ tel que } \mathcal{B}_F(a,r) \subset V}$

Définition 2 : **L'ensemble des voisinages de a** est **noté** $\boxed{\mathcal{V}(a)}$.

Remarque : Cette notion rend **rigoureux** toutes les assertions du type "**au voisinage de** ... " ou "**proche de**..." et leur donne une vision plus géométrique.

Voisinage et convergence :

$$\boxed{L = \lim u = \lim_{n\to\infty} u_n \iff \forall V \in \mathcal{V}(L),\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0 : u_n \in V}.$$

Démonstration 21

Voisinage et normes équivalentes :

Soient N et N' 2 normes **équivalentes** de E, soit $a \in E$ et soit $V \subset E$, alors :

$$\boxed{V \text{ est un } \textbf{voisinage} \text{ de } a \text{ pour } N \iff V \text{ est un } \textbf{voisinage} \text{ de } a \text{ pour } N'}.$$

Démonstration 22

Conséquence : Toutes les **notions** (**ouvert, fermé, continuité**...) qui dépendront directement des **voisinages** seront **indépendantes pour des normes équivalentes**.

2°) Ouvert

Définition : Soit $(E,\|)$ un EVN. Une partie U de E est un **ouvert** (de E) si U est voisinage de tous ses points.

C'est-à-dire : $\boxed{\forall a \in U \quad , \quad \exists r > 0 \quad , \qquad \mathcal{B}_F(a,r) \subset U}$.

Exemple 2 : Une boule ouverte est un **ouvert** et une boule fermée **n'est pas un ouvert** dans $E \neq \{0\}$.

Théorème (stabilité des ouverts) :

Soit E un **EVN**.

i) $\emptyset$ et E sont des **ouverts** de E.

ii) Une réunion **quelconque** d'**ouverts** est un **ouvert** de E.

iii) Une intersection **finie** d'**ouverts** est un **ouvert** de E.

Démonstration 23

Exercices 5 :

a) Montrer que $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

b) Donner un contre exemple d'une intersection infinie d'ouvert qui n'est pas ouverte.

Propriétés : Soient N et N', 2 normes **équivalentes** de E :

$$\boxed{U \text{ est un ouvert de } E \text{ pour } N \iff U \text{ est un ouvert de } E \text{ pour } N'}$$

Démonstration 24

Propriétés : Si U et V sont des **ouverts** de E et F respectivement alors $U \times V$ est un **ouvert** de $E \times F$ (pour la **norme produit**).

Démonstration 25

3°) Fermé

Définition : Soit $(E, \|\|)$ un EVN. Une partie Ω de E est un $\boxed{\textbf{fermé}}$ (de E) si son **complémentaire** est un **ouvert** de E. C'est-à-dire si $\boxed{E - \Omega = \complement_E \Omega \text{ est ouvert de } E}$.

Exemple 3 : Une boule fermée est **fermée** et une boule ouverte **n'est pas fermée** dans $E \neq \{0\}$.

Théorème (stabilité des fermés) :

Soit E un **EVN**.

i) $\emptyset$ et E sont des **fermés** de E.

ii) Une intersection **quelconque** de fermés est un **fermé** de E.

iii) Une réunion **finie** de **fermés** est un **fermé** de E.

Démonstration 26

Exercices 6 :

a) Montrer que $\mathbb{N}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Régler le problème des intervalles : quels sont ceux qui sont ouverts, fermés, ni l'un ni l'autre.

b) Donner un contre exemple d'une réunion infinie de fermés qui n'est pas fermé.

Propriétés : Soient N et N', 2 normes **équivalentes** de E :

$$\boxed{\Omega \text{ est un } \textbf{fermé} \text{ de } E \text{ pour } N \Longleftrightarrow \Omega \text{ est un } \textbf{fermé} \text{ de } E \text{ pour } N'}$$

Démonstration 27

Propriétés : Si U et V sont des **fermés** de E et F respectivement alors $U \times V$ est un **fermé** de $E \times F$.

Démonstration 28

4°) Point adhérent - Adhérence d'un sous-ensemble - Densité

Définition : Soit $(E, \|\|)$ un EVN et soit A une partie de E. On dit que $x \in E$ est un $\boxed{\textbf{point adhérent à } A}$ si :

$$\boxed{\forall r > 0 \quad , \quad \mathcal{B}_F(x, r) \cap A \neq \emptyset} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\forall V \in \mathcal{V}(x) \quad , \quad V \cap A \neq \emptyset}.$$

Définition : Soit $(E, \|\|)$ un EVN et soit A une partie de E. On appelle $\boxed{\textbf{adhérence} \text{ de } A}$, **l'ensemble des points adhérents** à A. On le **note** $\boxed{\overline{A}}$.

Exemples 4 :

a) Donner l'ensemble des points adhérents à $]0, 1]$, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\}$ (dans $\mathbb{R}$).

b) Donner l'ensemble des points adhérents à $\mathcal{B}_O(O, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ munit de la norme $\|\|_2$.

Attention : Ne pas confondre point adhérent à un ensemble et valeurs d'adhérence d'une suite.

Théorème : Caractérisation séquentielle d'un point adhérent :

$$\boxed{x \text{ de } E \text{ est } \textbf{adhérent} \text{ à } A \Longleftrightarrow x \text{ est } \textbf{limite d'une suite d'éléments de } A}.$$

Démonstration 29

Exercice 7 : Soit $E = \ell^1(\mathbb{R})$ munit de la norme $\|\|_1$ et soit $A = \{$suites presque nulles de $\mathbb{R}$ $\}$. Montrer que $A \subset E$. Soit $x = (1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots, \ldots)$. Montrer que $x \in \overline{A}$. Déterminer $\overline{A}$.

Théorème : Structure de $\overline{A}$: $\boxed{\overline{A} \text{ est le } \textbf{plus petit fermé} \text{ (pour l'inclusion) de } E \text{ qui } \textbf{contient } A}$.

Démonstration 30 : Montrons que :

i) $A \subset \overline{A}$, ii) $\overline{A}$ est un fermé de E et iii) Si F est un fermé de E tel que $A \subset F$ alors $\overline{A} \subset F$.

Remarque : $\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F$

Corollaire 1 : $\boxed{A \text{ est } \textbf{fermé} \iff A = \overline{A}}$.

Démonstration 31

Corollaire 2 : **Caractérisation séquentielle d'un fermé**

Soit A une partie de E,

A est **fermée** $\iff$ **toute suite** $(a_n)_n$ **d'éléments** de A qui **converge** (dans E) , **a sa limite dans** A.

Démonstration 32

5°) Densité

Définition : Soit E un EVN, $A \subset B \subset E$. On dit que A est **dense** dans B si $B \subset \overline{A}$ c'est-à-dire si **tout élément de** B **est limite d'une suite d'éléments de** A.

6°) Point intérieur - Intérieur d'un sous-ensemble

Définition : Soit $(E, \|)$ un EVN et soit A une partie de E. On dit qu'un élément a de E est **intérieur** à A si :

$$\boxed{\exists r > 0, \mathcal{B}_F(a, r) \subset A}$$

Définition : Soit $(E, \|)$ un EVN et soit A une partie de E. On appelle **intérieur de** A, **l'ensemble des points intérieurs à** A. On le **note** $\boxed{\overset{o}{A}}$.

Exemples 5 :

a) Donner l'ensemble des points intérieurs à $]0, 1]$, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ (dans $\mathbb{R}$).

b) Donner l'ensemble des points intérieurs à $\mathcal{B}_F(O, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ munit de la norme $\|_\infty$.

Théorème : Structure de $\overset{o}{A}$: $\overset{o}{A}$ est **le plus grand ouvert** (pour l'inclusion) de E **inclus** dans A.

Démonstration 33 : Montrons que :

i) $\overset{o}{A} \subset A$, ii) $\overset{o}{A}$ est un ouvert de E et iii) Si U est un ouvert de E tel que $U \subset A$ alors $U \subset \overset{o}{A}$.

Remarque : $\overset{o}{A} = \bigcup_{U \text{ ouvert}, U \subset A} U$

Corollaire : $\boxed{A \text{ est ouvert} \iff A = \overset{o}{A}}$.

Démonstration 34

7°) Frontière

Définition : Soit $(E, \|)$ un EVN et soit A une partie de E. On appelle **frontière** de A et on la note

$$\boxed{\mathrm{Fr(A)} = \overline{\mathrm{A}} - \overset{o}{\mathrm{A}}}.$$

Exemples 6 :

a) Donner la frontière de $]0, 1]$, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ (dans $\mathbb{R}$).

b) Donner la frontière de $\mathcal{B}_O(O, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ munit de la norme $\|_2$.

c) A-t-on toujours $\mathrm{Fr(A \cup B)} = \mathrm{Fr(A)} \cup \mathrm{Fr(B)}$?

Proposition 1 : Pour tout $A \subset E$, on a : $\boxed{E = \overset{o}{A} \cup \mathrm{Fr(A)} \cup (\mathrm{E} - \overline{\mathrm{A}})}$ (réunion disjointe)

Démonstration 35

8°) Voisinage, ouvert, fermé relatif

Définition : Soit $(E, \|)$ un EVN et soit A une partie de E, fixée et non vide.

a) Voisinage relatif : On dit que $V \subset A$ est un **voisinage relatif** de a dans A s'il existe un voisinage de a dans E, W, tel que $\boxed{V = W \cap A}$. L'ensemble des voisinages relatifs de a dans A est noté $\mathcal{V}_A(a)$.

b) <u>Ouvert relatif</u> : On dit que $U \subset A$ est un $\boxed{\textbf{ouvert relatif}}$ dans A s'il existe un ouvert dans E, U', tel que $\boxed{U = U' \cap A}$.

c) <u>Fermé relatif</u> : On dit que $F \subset A$ est un $\boxed{\textbf{fermé relatif}}$ dans A s'il existe un fermé dans E, F', tel que $\boxed{F = F' \cap A}$.

<u>Exemples 7</u> : $E = \mathbb{R}$ et $A = [0,1] \cup [2,3]$. Montrer que $[0,1/2]$ est un voisinage relatif de 0 dans A, que $]0,1]$ est un ouvert relatif de A. Que peut-on dire de $[0,1]$?

<u>Proposition</u> :

> Soit A une partie non vide d'une EVN E et soit $F \subset A$. Alors :
> F est un fermé relatif de $A \iff A - F$ est un ouvert relatif de A.

<u>Démonstration 36</u>

<u>Caractérisation séquentielle des fermés relatif</u>

<u>Proposition</u> :

> Soit A une partie non vide d'une EVN E et soit $F \subset A$. Alors les **assertions suivantes sont équivalentes** :
> i) F est un fermé relatif de A,
> ii) pour toute suite d'élément de F convergeant vers $\ell \in A$, on a $\ell \in F$.

<u>Démonstration 37</u>

IV. ÉTUDE LOCALE D'UNE APPLICATION - CONTINUITÉ

1°) Limite d'une application

<u>Définition</u> : Soient $(E, \|)$ et $(F, \|)$ 2 EVN, A une partie de E, et f une application de A dans F. Soit a un point adhérent à A.

On dit que $\boxed{f \textbf{ admet une limite en } a}$ s'il existe $L \in F$ tel que :

> $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0$ tel que

<u>Proposition-Définition</u> : Le L est unique. On l'appelle $\boxed{\textbf{limite} \text{ de } f \text{ en } a}$ et on la **note** $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$

<u>Démonstration 38</u> On fait exactement comme pour les suites.

<u>Définition bis</u> : On dit que f $\boxed{\textbf{diverge}}$ en a si elle n'est pas convergente en a.

<u>Interprétation avec les voisinages</u> :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall V \in \mathcal{V}(L)\ ,\ \ \exists W \in \mathcal{V}(a) \text{ tel que } f(W \cap A) \subset V}.$$

<u>Démonstration 39</u>

<u>Définition : Limite selon un sous-ensemble</u> : Soient $(E, \|)$ et $(F, \|)$ 2 EVN, A une partie de E, et f une application de A dans F, soit $P \subset A$ et enfin soit $a \in \overline{P}$.

On dit que f admet une $\boxed{\textbf{limite en } a \textbf{ selon } P}$ si f restreint à P admet une limite en a.

<u>Notation</u> : $\boxed{\lim_{x \to a,\ x \in P} f(x) = L}$

<u>Extension de la notion de limite</u> : Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans F, et si $a = +\infty$ (ou $a = -\infty$), on dit que f admet une limite en $+\infty$ s'il existe $L \in F$ tel que :

Si f est une application de $A \subset E$ dans $\mathbb{R}$, et si $L = +\infty$ (ou $L = -\infty$), on dit que f tend vers $+\infty$ en $a \in \overline{A}$ si :

<u>Voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$)</u> : ***<u>Définition :</u>*** On dit que V est un $\boxed{\textbf{voisinage} \text{ de } +\infty}$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $[M, +\infty[\subset V$.

Cette ***<u>Définition</u>*** permet une **unification** de la définition de la **notion de limite** et des 2 extensions ci-dessus :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall V \in \mathcal{V}(L),\ \exists W \in \mathcal{V}(a) \text{ tel que } f(W\cap A)\subset V}.$$

Démonstration 40

Théorème : **Critère séquentiel de la limite** :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \text{pour tout suite } (x_n)_n \text{ de } E \text{ qui converge vers } a,\ (f(x_n))_n \text{ converge vers } L}.$$

$$\boxed{f \text{ converge en } a \iff \text{pour tout suite } (x_n)_n \text{ de } E \text{ qui converge vers } a,\ (f(x_n))_n \text{ converge dans } F}.$$

Démonstration 41

Théorème : **(Théorèmes Généraux (TG))** :

L'ensemble des fonctions convergentes de $A \subset E$ dans F est un $\mathbb{K}$-EV et on a les **Théorèmes généraux** : si f et g, fonctions de $A \subset E$, **converge** respectivement vers L et L' en $a \in \overline{A}$, si φ, fonction $A \subset E$ dans $\mathbb{K}$ **converge** vers μ en a et si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors

$\alpha f + g$ **converge** vers $\alpha L + L'$, φf **converge** vers μL et $\|f\|$ **converge** vers $\|L\|$

On a de plus la **Composition des limites** :

Si $f : A \subset E \longrightarrow B \subset F$, $h : B \subset F \longrightarrow G$, si f **converge** respectivement vers $b \in \overline{B}$ en $a \in \overline{A}$ et h **converge** vers L en b, alors $h \circ f$ **converge** vers L en a

Démonstration 42

Remarque Les T.G. englobent également tous les autres **Théorèmes** avec $\pm\infty$ où dans les cas particuliers tel que par exemple si f va de $A \subset E$ dans $\mathbb{R}$, que $\forall x \in A,\ f(x) \neq 0$ et que f converge en $a \in \overline{A}$ vers $L \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ converge en a vers $\dfrac{1}{L}$ etc....

Exercice 8 : Étudier les limites en $(0,0)$ avec $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|_\infty$ des fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $g : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

2°) Limite dans un produit fini d'espaces vectoriels

Proposition :

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ avec E un EVN quelconque et $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ munit de la **norme produit**.
Soit, pour tout élément x de A , on pose $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$ et $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p)$.
Soit enfin, $a \in \overline{A}$. Alors
f **converge** dans E vers ℓ en a SSI les **fonctions** f_k **convergent** vers ℓ_k en a pour tout $k \in [\![1,p]\!]$

Démonstration 43

3°) Continuité

Définition 1 : Soient $(E, \|)$ et $(F, \|)$ 2 EVN, A une partie de E, et f une application de A dans F. Soit a **un point de** A.

On dit que f est **continue en** a si $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0$ tel que

Définition 1bis : **f est continue sur A** si elle est **continue en tout point de** A.

Notation : On note $C(A,F)$ l'ensemble des applications continues sur A et $C(A)$ l'ensemble des applications continues sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Théorème : $(C(A,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-EV et $(C(A), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-**algèbre**

Démonstration 44

Prolongement par continuité : si f est continue sur A, si a est adhérent à A, $a \notin A$ et si $\lim_{x \to a} f(x) = b$, on dit que f admet un **prolongement par continuité** (PPC) en a et on pose ...

Par analogie avec les limites, on a le critère séquentiel de la continuité, les **Théorèmes généraux** (somme, composée....), la restriction d'une application continue est continue....

Exemples 8 :

Toute application polynomiale en $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est continue sur $\mathbb{R}^p$ (muni de l'une de ses 3 normes usuelles)

Tout "**cocktail**" (sommes, produit, composée, inverse, module...) d'applications usuelles (sin, cos, exp, $\sqrt{\ }$...) est continue sur son domaine de ***Définition*** **par T.G.**.

Exemple 9 : $f : (x, y, z) \longmapsto \dfrac{\sin x - \cos y + \sqrt{z}}{x - y}$ est continue par TG sur

Continuité et Densité :

Proposition :

Soient $(E, \|)$ et $(F, \|)$ 2 EVN, A une partie de E, f et g, 2 applications de A dans F.

Soit $D \subset A$, **dense dans** A.

On suppose que f et g sont continues sur A et que $\forall x \in D$, $f(x) = g(x)$, alors $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$.

Démonstration 45

Continuité et Topologie :

Théorème :

Soient E et F, 2 EVN, A une partie de E, f une application de A dans F.

On suppose que f est **continue sur** A. Alors

L'image **réciproque** de tout **ouvert** de F est un **ouvert relatif** de A.

L'image **réciproque** de tout **fermé** de F est un **fermé relatif** de A.

Plus précisément,

a) si W est un ouvert de F, alors il existe V ouvert de E tel que $f^{-1}(W) = V \cap A$

b) si Ω est un fermé de F, alors il existe Δ fermé de E tel que $f^{-1}(\Omega) = \Delta \cap A$.

Démonstration 46

Remarque : Attention pour l'image **directe**, **on ne peut rien dire** !

Corollaire important :

Soient $f : E \longrightarrow F$ (E et F, 2 EVN) On suppose que f est **continue sur E tout entier**. Alors l'image **réciproque** de tout **ouvert** de F est un **ouvert** de E.

l'image **réciproque** de tout **fermé** de F est un **fermé** de E.

Démonstration 47

Corollaire très classique : Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$A_1 = \{x \in E / f(x) = \alpha\}$ et $A_2 = \{x \in E / f(x) \leqslant \alpha\}$ sont des **fermés** dans E ;

$A_3 = \{x \in E / f(x) < \alpha\}$ est un **ouvert** de E.

Démonstration 48

Exercice 9 :

a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec E muni de la norme $\|_\infty$ (relativement à la base canonique de E).

b) Montrer que tout SEV de $E = \mathbb{K}^p$ est fermé (pour l'une de ses 3 normes usuelles).

V. APPLICATION LINÉAIRE CONTINUE

1°) Critère de Continuité

Théorème :

Soit $u : E \longrightarrow F$, E et F, 2 EVN. On suppose que u est **linéaire**.

Alors les **assertions suivantes sont équivalentes** :

i) u est **continue** sur E ii) u est **continue** en 0_E

iii) u est **lipschitzienne** (ou **uniformément continue**) sur E

iv) u est **bornée sur la boule unité de** E

v) $\boxed{\exists k > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant k \ \|x\|}$ (**la plus pratique dans les exercices**)

Démonstration 49

Définition-proposition : On appelle $\mathcal{L}_C(E, F)$, l'ensemble des **applications linéaires et continues** de E dans F. C'est un $\mathbb{K}$-EV (SEV de $\mathcal{L}(E, F)$)

Démonstration 50

Définition : **Homéomorphisme**. On dit que $f : A \subset E \longrightarrow B \subset F$ est un **Homéomorphisme** ou f est **bi-continue** si

f est bijective de A dans B, f **et** f^{-1} sont **continues** respectivement sur A et sur B.

2°) Norme Subordonnée

Théorème-Définition :

Soit $u : (E, N) \longrightarrow (F, \|\|)$ **linéaire et continue** sur E, le réel, noté $|||u|||$, $\boxed{|||u||| = \sup\limits_{N(x)\leqslant 1} \{\|u(x)\|\}}$ existe

on l'appelle **norme de** u **subordonnée** à N et $\|.\|$

$|||u|||$ est aussi **notée** parfois $\|u\|$.

Relation fondamentale : $\boxed{\forall x \in E \ , \ \|u(x)\| \leqslant |||u||| \ N(x)}$

Remarques pratiques : Pour calculer $|||u|||$, on part de $\|u(x)\|$ que l'on majore "au plus près", sous la contrainte $N(x) \leqslant 1$, par un réel indépendant de x : α. On a alors $|||u||| \leqslant \alpha$.

Dans de nombreux cas (notamment si E est de dimension finie), pour montrer que $|||u||| = \alpha$, on montre que $|||u||| \leqslant \alpha$, puis on cherche un vecteur **non nul** x_0 tel que $N(x_0) = 1$ et $\|u(x_0)\| = \alpha$. On a dans cas : $|||u||| =$

Exercice 10 :

Si $u(x, y) = 6x - 4y$, calculer la norme de u subordonnée à $\|_\infty$ puis à $\|_2$ puis à $\|_1$. (Donner la norme de l'espace d'arrivée)

Propriétés 1 : Si u et v sont 2 applications linéaires et continues respectivement de E dans F et de F dans G, alors $\boxed{|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \ |||u|||}$.

Démonstration 51

Corollaire : $\boxed{\text{Si } u \in \mathcal{L}_C(E),\ (E, \|\|) \text{ un EVN et } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } |||u^n||| \leqslant |||u|||^n}$.

Démonstration 52

Propriétés 2 : $\boxed{|||.||| \text{ définit une } \textbf{norme} \text{ sur } \mathcal{L}_C(E, F)}$

Démonstration 53

Corollaire :

$|||.|||$ est une **norme** sur $\mathcal{L}_C(E)$, et de plus on a $\boxed{\forall (u, v) \in \mathcal{L}_C(E)^2 \ : \ |||v \circ u||| \leqslant |||v||| \cdot |||u|||}$.

Si une norme (quelconque) sur $\mathcal{L}_C(E)$ vérifie $\|v \circ u\| \leqslant \|v\| \ \|u\|$, on dit alors que $\|$ est une **norme d'algèbre**.

On a donc $|||$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_C(E)$.

Démonstration 54

4°) Exemples importants

3°) Continuité et Application bilinéaire

Théorème : Si $(E,\|)$, $(F,\|)$ et $(G,\|)$ sont 3 EVN et $E\times F$ est muni de la norme produit. Soit B, une application **bilinéaire** de $E\times F$ dans G. alors

$$\boxed{B \text{ est } \textbf{continue} \text{ sur } E\times F \iff \exists k>0 \text{ tel que } \forall (x,y)\in E\text{x}F\ ,\ \|B(x,y)\| \leqslant k\|x\|\|y\|}.$$

Démonstration 55

Corollaires :

$$\begin{cases} B : \mathbb{K}\times E \longrightarrow E \\ \quad (\lambda,x) \longmapsto \lambda x \end{cases} \text{ et } \begin{cases} B : E\times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x,y) \longmapsto (x|y) \end{cases} (E \text{ PHR}) \quad \text{sont } \textbf{continues}.$$

Démonstration 56

Extension : On a de même le **Théorème** : Si $(E_i,\|)$ et $(G,\|)$ sont des EVN et $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est muni de la norme produit. Soit B, une application **p-linéaire** de $\prod_{i=1}^{p} E_i$ dans G. alors

$$\boxed{B \text{ est } \textbf{continue} \text{ sur } \prod_{i=1}^{p} E_i \iff \exists k>0 \text{ tel que } \forall x_i\in E_i,\ \|B(x_1,\cdots,x_p)\| \leqslant k\|x_1\|\cdots\|x_p\|}$$

Démonstration 57

VI. COMPACITE

1°) Partie compacte d'un EVN

Définition (de Bolzano-Weierstrass) : Soit E un EVN. $A\subset E$ est dit partie $\boxed{\textbf{compacte}}$ de E (ou compact de E) **si toute suite de A possède au moins une valeur d'adhérence dans A** (c'est-à-dire s'il existe une suite extraite qui converge **vers un élément** de A).

Exemple 10 : $[a,b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. C'est une conséquence directe du **Théorème** de

2°) Propriétés

$\boxed{\mathbf{P}_1}$ A **compact** $\Longrightarrow$ A **fermé**, $\boxed{\mathbf{P}_2}$ A **compact** $\Longrightarrow$ A **borné**.

Attention : A **fermé et borné n'implique pas que** A soit **compact**.

$\boxed{\mathbf{P}_3}$ Soit A un ensemble **compact** Une suite de A converge **si et seulement si** elle admet une unique valeur d'adhérence.

$\boxed{\mathbf{P}_4}$ Si $B\subset A$ et si A est **compact** alors B **fermé** $\Longrightarrow$ B **compact**.

$\boxed{\mathbf{P}_5}$ Si A est un **compact** de E et B un **compact** de F (E,F 2 EVN), alors $A\times B$ est un **compact** de $E\times F$ (munit de la **norme produit**).

Corollaire : Si A_i est un **compact** de E_i alors $\prod_{i=1}^{p} A_i$ est un **compact** de $\prod_{i=1}^{p} E_i$ (munit de la norme produit) et donc $[-r,r]^p$ est un **compact** de $\mathbb{R}^p$ et $D_F(o,r)^p$ est un **compact** de $\mathbb{C}^p$ pour la norme $\|_\infty$ (canonique).

Démonstration 58

3°) Applications et Compacité

Théorème : **Image d'un compact**

L'image d'un compact par une application **continue** est **compact**.
C'est-à-dire si $f : A\subset E \longrightarrow F$ avec E,F 2 EVN.
Si f est **continue** sur A et si $K\subset A$ est un **compact** de E alors $f(K)$ est un **compact** de F.

Démonstration 59

Corollaire : Théorème des bornes atteintes : Si f est **continue sur un compact** K non vide de E et à valeurs **réelles**, alors f est **bornée sur** K **et atteint ses bornes**.

Démonstration 60

4°) Application uniformément continue - Théorème de Heine

Définition : **Application uniformément continue.**

On dit que $f : A \subset E \longrightarrow F$ avec E, F, 2 EVN est **uniformément continue sur A** si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x,y) \in A^2 \ , \ \|x-y\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon}$$

Théorème de Heine :

$f : K \subset E \longrightarrow F$ avec E, F 2 EVN.

Si f est **continue** sur K et si K est un **compact** de E alors f est **uniformément continue** sur K

Démonstration 61

Proposition : $\boxed{f \text{ lipschitzienne} \Longrightarrow f \text{ uniformément continue} \Longrightarrow f \text{ continue}}$

Démonstration 62

VII. CONNEXITÉ PAR ARCS

1°) Définition

Définition 1 : Soit E un espace vectoriel normé. On appelle **arc** ou **chemin continue** toute application γ de $[0,1]$ dans E et **continue** sur $[0,1]$. $\gamma([0,1])$ s'appelle le **support** de l'arc γ. C'est un **compact** de E. $\gamma(0)$ s'appelle **l'origine** et $\gamma(1)$ **l'extrémité** de l'arc.

Définition 2 : Soit $A \subset E$, E un espace vectoriel normé. On dit que A est **connexe par arcs** si pour tout couple de points de A, il existe un arc qui joint ces 2 points et dont le support reste dans A : $\forall (a,b) \in A^2$, $\exists\ \gamma : [0,1] \longrightarrow E$ contin

2°) Composantes connexes par arcs

Relation d'équivalence :

Définition : Soit E un espace vectoriel normé et soit $A \subset E$. Soit $(x,y) \in A^2$. On dit que x et y sont connectés dans A s'il existe un chemin continue γ **dans A** (c'est -à-dire $\forall t \in [0,1,]$: $\gamma(t) \in A$) d'origine x et d'extrémité y.

Proposition :

Soit E un espace vectoriel normé et soit $A \subset E$.

La relation définie sur A par $\forall (x,y) \in A^2$: $x\mathcal{R}y$ si x et y sont connectés dans A est une relation d'équivalence.

Démonstration 63

Définition :

Les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence s'appelle les **composantes connexes par arcs** de A.

3°) Connexité par arcs et Continuité

Théorème : **Image d'un connexe par arcs**

L'image d'un **connexe par arcs** par une application **continue** est **connexe par arcs**.

C'est-à-dire si $f : A \subset E \longrightarrow F$ avec E, F, 2 EVN.

Si f est **continue** sur A et si $K \subset A$ est un **connexe par arcs** de E alors $f(K)$ est un **connexe par arcs** de F.

Démonstration 64

4°) Connexité par arcs et Convexité

Proposition : $\boxed{A \text{ convexe} \Longrightarrow A \text{ connexe par arcs}}$ **Attention** : **Réciproque fausse**.

Démonstration 65

5°) Connexité par arcs de $\mathbb{R}$

Théorème : $\boxed{\text{Soit } A \in \mathbb{R}.\ A \text{ connexe par arcs } \textbf{SSI } A \text{ intervalle } \textbf{SSI } A \text{ convexe}}$

Démonstration 66

Remarque : (issue du programme) Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs.

6°) Partie étoilé

Définition : Soit E un espace vectoriel normé et soit $U \subset E$.

U est dit **étoilé par rapport à un point** x_0 de U si pour **tout point** x de U, les **points du segment** $[x_0, x]$ sont aussi **dans** U.

Proposition : $\boxed{U \text{ étoilé par rapport à un point} \Longrightarrow U \text{ connexe par arcs}}$ ***Démonstration 67***

Exemple 11 : Déterminer les composantes connexes par arcs dans $E = \mathbb{R}^2$ munit de l'une des 3 normes usuelles (équivalentes) de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 - y^2 = 1\}$.

VIII. EVN DE DIMENSION FINIE

1°) Théorème fondamental

Lemme :

Dans $E = \mathbb{K}^p$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$ (canonique), une partie A de E est **compacte SSI** elle est **fermée** et **bornée**

Démonstration 68

Corollaire :

Soit E un $\mathbb{K}$-EV et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $N_\infty(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p}(|x_i|)$ avec $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i\ e_i$.

Alors $A \subset E$ est **compact** pour N_∞ **SSI** A est **fermé et borné**.

Démonstration 69

Théorème Fondamental :

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont 2 à 2 équivalentes

Démonstration 70

Conséquence Fondamentale

L'équivalence des normes sur E, de **dimension finie** montre que de nombreux concepts sont indépendants du choix d'une norme sur E : Voisinage, partie bornée, application bornée, application lipschitzienne, continue, uniformément continue, partie ouverte, fermé, adhérence, intérieur, limite, suite convergente, partie compacte, partie connexe par arcs. Par conséquent, pour toutes ces notions, il est légitime de se placer dans E **sans préciser d'une norme particulière**.

Exemples Fondamentaux :

Théorème 1 : $A \subset E$ (E de dimension finie) est compact **SSI** A est fermé et borné.

Théorème 2 : Tout SEV de **dimension finie** d'un espace vectoriel normé **quelconque** est fermé.

Démonstrations 71

2°) Continuité des applications linéaires

Théorème 1 :

$u : E \longrightarrow F$ avec **E un espace vectoriel de dimension finie** et F EVN **quelconque**.
Si u est **linéaire** alors u est **continue** sur E.

Démonstration 72

Théorème 1bis : $u : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$ avec les **E_i de dimension finie** et F EVN **quelconque**.

Si u est p-**linéaire** alors u est **continue** sur $E_1 \times \cdots \times E_p$

Démonstration 73

3°) Liens avec les coordonnées

Théorème (convergence des suites) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, **E un espace vectoriel de dimension finie** et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une **base** de E.
Soit, pour tout entier n, $u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n(k)\ e_k$, avec $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ **les suites coordonnées de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Soit $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k\ e_k$ avec $\ell_k \in \mathbb{K}$. Alors
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** dans E vers ℓ SSI les **suites coordonnées** $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent** vers ℓ_k pour tout $k \in [\![1, p]\!]$

Démonstration 74

Exercice 11 : Si $A_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n}{n!} & \dfrac{n}{e} - ne^{\frac{1-n}{n}} \\ \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^5 & \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \end{pmatrix}$, donner la limite de (A_n).

Théorème (convergence des fonctions) :

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ avec E un EVN quelconque et **F un espace vectoriel de dimension finie**.
$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une **base** de F. Soit, pour tout élément x de A , $f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\ e_k$, avec f_k **les fonctions coordonnées de la fonction** f dans la base $\mathcal{B}$. Soit $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k\ e_k$ et soit $a \in \overline{A}$. Alors
f **converge** dans E vers ℓ en a SSI les **fonctions coordonnées** f_k **convergent** vers ℓ_k en a pour tout $k \in [\![1, p]\!]$

Démonstration 75

IX. SÉRIE DANS UN EVN DE DIMENSION FINIE

1°) Définitions

Soit E un EVN de dimension finie. On appelle **série de terme général $u_n \in E$**, notée $(\sum u_n)$, la suite des sommes partielles : $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ pour tout entier n.

$(\sum u_n)$ est dite **convergente** si la suite (S_n) **converge** dans E.

La **somme de la série $(\sum u_n)$** , notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est la **limite** de la suite (S_n).

$(\sum u_n)$ est dite **absolument convergente** si la série $(\sum \|u_n\|)$ **converge** dans E.

$(\sum u_n)$ est dite **semi-convergente** si la série $(\sum u_n)$ est **convergente** et si la série $(\sum \|u_n\|)$ **diverge**.

2°) Convergence absolue entraine convergence

Proposition :

Soit $(\sum u_n)$ une série d'un EVN de dimension finie.

Si $(\sum u_n)$ est **absolument** convergente alors $(\sum u_n)$ **converge** dans E.

De plus, si $\|\|$ est une norme sur E alors $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left\| u_n \right\|$.

Démonstration 76

3°) Applications

Définition : Soit $(E\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ \circ)$ une $\mathbb{K}$-**algèbre**. On dit que la norme $\|\|$ sur E est une **norme d'algèbre**, si $\boxed{\forall (u,v) \in E^2\ :\ \|u \circ v\| \leqslant \|u\|\ \|v\|}$.

Lemme : Soit $(E\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ \circ)$ une $\mathbb{K}$-**algèbre** de dimension **finie**, alors E possède des normes d'algèbre. ***Démonstr***

L'élément neutre 1_E pour la loi $\circ$ sera noté 1.

a) **Série géométrique** :

Proposition : Soit $u \in E$ tel que $\|u\| < 1$, alors $(\sum u^n)$ est **absolument convergente**.

De plus $1-u$ est inversible dans E et $(1-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$

Démonstration 78

Exercice∗ : Soit $\mathcal{I} = \{v \in E$ tel que v est **inversible** dans $E\ \}$. Soit $\varphi \begin{cases} \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I} \\ v \longmapsto v^{-1} \end{cases}$

On a $\mathcal{I}$ est un **ouvert** de E et φ est **continue** sur $\mathcal{I}$.

Démonstration 79

b) **Série exponentielle** :

Proposition :

Soit $a \in E$, alors $\left(\sum \frac{a^n}{n!}\right)$ est **absolument convergente**. Sa **somme** est notée $\exp(a) = e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

Démonstration 80

Exemple 12 : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $e^{t\ A}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque : **Attention** en général on n'a pas $e^{u+v} = e^u \circ e^v$. (cependant un cas suffisant est $u \circ v = v \circ u$).