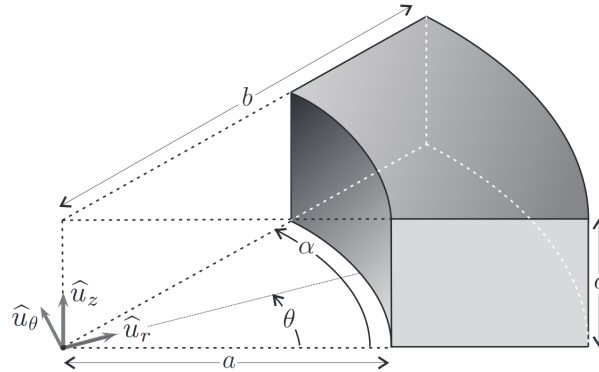


## DM 5

### *Électromagnétisme*

#### Exercice 1 : Résistance d'un conducteur ohmique torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique  $\gamma$  de l'ordre de  $10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ . Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$ , d'épaisseur  $c$ .



On cherche à déterminer la résistance orthoradiale  $R$  d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles  $\theta = 0$  où on applique un potentiel uniforme  $V = U$  et  $\theta = \alpha$  où on applique un potentiel  $V = 0$ . On notera  $\rho(M, t)$  la densité volumique de charges en un point  $M$  du conducteur et à l'instant  $t$ .

**Q.1** Rappeler le nom et l'unité pratique de  $\epsilon_0$ .

**Q.2** Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle que vérifie la densité volumique de charges.

**Q.3** En déduire que  $\rho \simeq 0$  tant que la durée  $T$  caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée  $\tau$  dont on donnera l'expression en fonction de  $\gamma$  et  $\epsilon_0$ . Faire l'application numérique.

**Q.4** Montrer alors qu'un terme peut être négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère dans ces conditions.

Dans la suite, on suppose que  $\rho \simeq 0$

**Q.5** Établir l'équation vérifiée par le potentiel électrique  $V$  en régime permanent dans le conducteur ohmique.

On suppose que  $V$  ne dépend que de l'angle  $\theta$  en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel et de son laplacien :

$$\vec{\text{grad}}V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \quad ; \quad \Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

**Q.6** Déterminer les expressions de  $V(\theta)$ , du champ  $\vec{E}$  et de la densité de courant  $\vec{j}$ .

**Q.7** Déterminer l'expression de l'intensité totale  $I$  traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale  $R$  en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\gamma$ , et  $\alpha$ .

**Q.8** Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section  $S$  et de longueur  $L$ . Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression trouvée pour le conducteur torique quand  $b$  est très proche de  $a$ .

## Exercice 2 : Propagation d'ondes longitudinales dans un plasma

On considère un plasma, électriquement neutre, qui comporte  $N$  ions positifs et  $N$  électrons par unité de volume. Les électrons portent une charge  $-e$  et une masse  $m$ . La permittivité  $\varepsilon_0$  et la perméabilité  $\mu_0$  sont celles du vide.

On considère dans un premier temps le volume de plasma compris entre deux plans perpendiculaires à  $(Ox)$  distants de  $h$  entre  $x = 0$  et  $x = h$ . On considérera que  $h$  est beaucoup plus petit que les dimensions du plasma dans les deux autres directions. Les ions sont supposés fixes alors que les électrons peuvent se déplacer suivant l'axe  $(Ox)$ . On perturbe la distribution d'équilibre en déplaçant tous les électrons du volume d'une distance  $\xi$  telle que  $|\xi| \ll h$ .

- Q.1** Montrer qu'il apparaît alors au sein du plasma deux couches chargées dont on donnera la position et l'épaisseur. Faire un dessin dans le cas  $\xi > 0$  et préciser l'expression de la densité volumique de charge pour chaque couche. Idem dans le cas  $\xi < 0$ .
- Q.2** Expliquer pourquoi on peut assimiler ces deux couches à deux plans infinis chargés en surface avec des densités surfaciques de charge  $\sigma$  et  $-\sigma$ , à exprimer en fonction des données du problème.
- Q.3** Déterminer le champ  $\vec{E}$  entre ces deux plans et en déduire l'expression de la force  $\vec{F}$  agissant sur un électron situé entre les deux couches par suite de cette perturbation.
- Q.4** Écrire l'équation différentielle du mouvement d'un électron de ce cylindre dont la position sur l'axe  $(Ox)$  est repérée par  $\xi$  (la position d'équilibre est en  $\xi = 0$ ). Déterminer la pulsation  $\omega_p$  de ces oscillations en fonction de  $N$ ,  $e$ ,  $m$  et  $\varepsilon_0$ .

Le plasma est de nouveau à l'équilibre et on se propose maintenant d'étudier la possibilité de propagation dans le plasma, d'ondes de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \underline{E}(x, t)\vec{u}_x = E_0 \exp[i(\omega t - kx)]\vec{u}_x$$

$k$  est un réel supposé connu et on cherche l'expression de la pulsation  $\omega(k)$ .

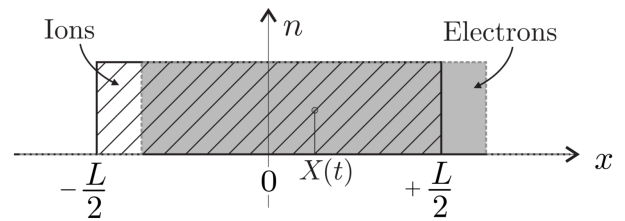
- Q.5** Déterminer l'expression du champ magnétique associé.
- Q.6** Par application du principe fondamental de la dynamique à un électron, déterminer l'expression de la densité volumique de courant  $\vec{j}$  en fonction de  $\underline{E}$ ,  $\omega$  et des constantes définissant le plasma.
- Q.7** À l'aide des équations de Maxwell, montrer que  $\omega$  est ici indépendant de  $k$  et déterminer sa valeur.
- Q.8** Exprimer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$ . Que peut-on en conclure ?
- Q.9** Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique  $u(x, t)$  et de la densité volumique d'énergie cinétique  $e_c(x, t)$  des électrons. Commenter l'expression obtenue pour  $u(x, t) + e_c(x, t)$ .

### Exercice 3 : Interaction laser-plasma

Lorsqu'un faisceau laser de forte puissance est focalisé sur de la matière (gaz ou solide), cette dernière est ionisée quasi-instantanément et se transforme alors en un plasma globalement neutre. L'interaction entre le champ électromagnétique du laser et le plasma ainsi formé met en jeu une physique particulièrement riche et complexe. Sous certaines conditions, un rayonnement laser de haute fréquence (UV ou X) peut être émis par ce plasma. Dans le domaine temporel, ce rayonnement peut être associé à des impulsions très brèves dont la durée se situe dans la gamme des femto-secondes ( $10^{-15}$  s) voire atto-secondes ( $10^{-18}$  s). Toute l'étude est réalisée en une dimension.

#### I – Pulsation propre et propagation

Dans un premier temps, on souhaite déterminer la pulsation propre des oscillations d'un plasma. Initialement, pour  $t < 0$ , le plasma est neutre, immobile et localisé entre les abscisses  $x = -L/2$  et  $x = +L/2$ . Le vide règne de part et d'autre du plasma. On note  $n_e$  la densité particulière des électrons, de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ . On étudie le mouvement d'ensemble des électrons consécutif à une perturbation se produisant à l'instant  $t = 0$ . On considère que les ions restent fixes et qu'à chaque instant  $t > 0$ , la distribution des électrons reste homogène sur une longueur  $L$ . Étudier le mouvement du nuage revient alors à étudier celui d'un électron situé au centre de la distribution, à l'abscisse  $X(t)$ . L'effet de la perturbation peut donc se résumer à un déplacement impulsif du nuage électronique par rapport aux ions : pour  $t < 0$  on a  $X(t) = 0$  et  $X(t = 0) = X_0 > 0$ .



- Q.1** Tracer l'allure de la densité volumique de charge  $\rho(x)$ . Déterminer le champ électrique qui règne à l'intérieur du plasma, où la densité volumique de charge est nulle. Déterminer l'équation du mouvement d'un électron du plasma et en déduire que la pulsation propre du plasma est donnée par :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m \varepsilon_0}}$$

On souhaite étudier la propagation d'une onde électromagnétique plane, de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et de pulsation  $\omega$ , dans un plasma homogène au sein duquel on néglige l'agitation thermique. On cherche les champs électrique et magnétique sous la forme  $\vec{E} = \Re(\underline{\vec{E}})$  et  $\vec{B} = \Re(\underline{\vec{B}})$  avec  $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  et  $\underline{\vec{B}} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ .

- Q.2** Rappeler les équations de Maxwell. Le plasma étant supposé peu dense, localement neutre et le mouvement des électrons étant supposé non-relativiste, exprimer la conductivité complexe du milieu puis déterminer l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le plasma. Montrer que la relation de dispersion s'écrit  $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$ . La pulsation  $\omega$  étant fixée, en déduire qu'à partir d'une certaine densité particulière électronique critique  $n_c$ , que l'on explicitera, la propagation n'est pas possible dans le plasma. Qu'advient-il alors de l'onde électromagnétique ?

On s'intéresse maintenant à la propagation, sous incidence normale, de l'onde électromagnétique dans la zone hétérogène à la surface d'un plasma homogène (FIGURE 1 à gauche). On considère que la relation de dispersion établie à la question précédente est encore valable, mais avec  $\omega_p = \omega_p(x)$ . Cette zone de transition entre le vide et l'intérieur homogène est modélisée par une évolution exponentielle de la densité particulière électronique  $n_e$ . On suppose que  $n_{max}$ , qui correspond à la densité particulière électronique lorsque la cible est totalement ionisée vaut  $n_{max} = Z \times n_i (> n_c)$  où  $n_i$  est la densité particulière atomique du solide et  $Z$  le numéro atomique de l'élément.

- Q.3** Déterminer l'abscisse  $x_c$  correspondant à la réflexion de l'onde électromagnétique.

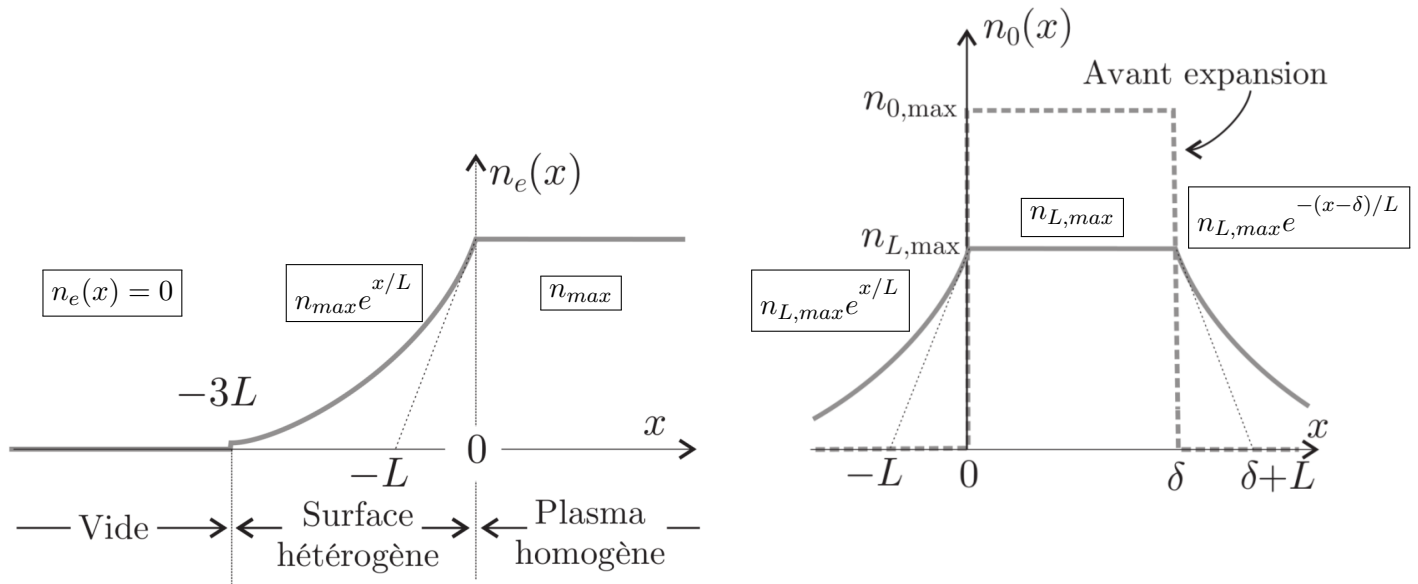
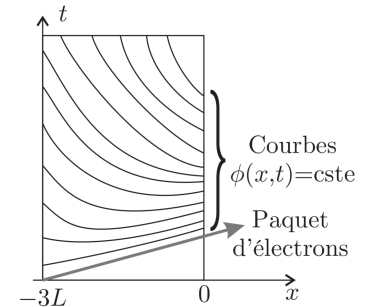


FIGURE 1 – Évolution de la densité particulaire (cas d'une cible solide à gauche et d'une feuille mince à droite)

## II – Excitation d'ondes plasma à la surface

Lors de la traversée de la surface hétérogène du miroir plasma, les paquets d'électrons excitent des oscillations plasma. On raisonne toujours sur une seule dimension d'espace :  $x$ . On suppose qu'un paquet d'électron traverse la surface vers les  $x > 0$  avec une vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$  constante. On choisit l'origine des temps lorsque le paquet passe en  $x = -3L$ . Lors de son passage, il excite localement des ondes plasma (voir figure ci-contre) qui se mettent à osciller à la pulsation plasma locale  $\omega_p(x)$  comme dans la première partie, avec  $X(x, t) = X_0 \cos \phi(x, t)$ .



- Q.4** Donner l'expression de l'instant  $t_0(x)$  de passage du paquet d'électron à l'abscisse  $x$ . Déterminer, pour  $t > t_0(x)$ , l'expression de la phase  $\phi(x, t)$  en un point d'abscisse  $x$ . On prendra  $\phi(x, t = t_0(x)) = 0$  et on exprimera le résultat en fonction de  $t$ ,  $t_0(x)$  et  $\omega_p(x)$  puis en fonction de  $t$ ,  $v$ ,  $L$ ,  $x$  et  $\omega_{max}$ , où  $\omega_{max}$  désigne la pulsation plasma associée à la densité particulaire maximale  $n_{max}$ .

On définit le vecteur d'onde des oscillations plasma  $\vec{k}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}[\phi(x, t)]$  et on admet que les oscillations plasma ne peuvent émettre une onde électromagnétique que lorsque  $\vec{k}_p \cdot \vec{u}_x = 0$ .

- Q.5** Montrer que les oscillations plasma peuvent effectivement émettre un rayonnement mais qu'elles n'auraient pas pu le faire si elles avaient été excitées par un paquet d'électrons se déplaçant vers les  $x < 0$ .

## III – Interaction avec une feuille mince

On s'intéresse au cas où l'épaisseur du miroir plasma est nanométrique (de 10 nm à 100 nm). Dans ce cas, la totalité de la cible est vaporisée et ionisée pour former un plasma. L'expansion de ce plasma dans le vide a pour conséquence une diminution de la densité particulaire maximale de la cible. L'allure du profil de densité particulaire électronique avec et sans expansion est reportée sur la FIGURE 1. On note  $\delta$  l'épaisseur de la cible, et  $L$  la longueur caractéristique de l'hétérogénéité de densité aux surfaces. Cette dernière longueur dépend de la température  $\theta_e$  du plasma et de la durée  $T$  de l'impulsion laser incidente. On peut l'estimer par une relation de la forme  $L = c_s T$  avec  $c_s = \sqrt{\frac{Zk_B\theta_e}{m_i}}$  où  $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  désigne la constante de Boltzmann,  $m_i$

la masse ionique et  $Z$  le nombre de charge de l'atome. Dans ce modèle, l'épaisseur  $\delta$  de l'intérieur homogène du plasma ne varie pas pendant l'interaction. Lorsque l'on fait varier l'épaisseur  $\delta$  de la cible, on observe que l'étendue du spectre varie (voir FIGURE 2) : l'harmonique maximale du spectre augmente avec l'épaisseur du miroir plasma.

La cible est ici en carbone avec  $Z = 6$  et  $m_i = 2 \times 10^{-26}$  kg. On peut estimer que l'énergie cinétique moyenne d'un électron du plasma est égale à  $\frac{3}{2}k_B\theta_e$ . L'amplitude du champ laser est constante durant la durée de l'impulsion  $T = 30$  fs et elle est nulle avant et après cette impulsion. La période des oscillations du champ laser est notée  $T_0$  et correspond dans le vide à une longueur d'onde  $\lambda_0 = 800$  nm. L'énergie totale de l'impulsion laser est  $W_T = 1$  J. On étudie l'effet de l'expansion du plasma dans le vide sur le spectre du rayonnement émis afin d'estimer un ordre de grandeur de la température du plasma dans un modèle simplifié.

- Q.6** Justifier que si la température  $\theta_e$  du plasma est assez élevée, alors on pourra, en première approximation, modéliser le plasma comme un gaz parfait. Montrer alors que la température  $\theta_e$  du plasma reste inchangée pendant l'expansion du plasma dans le vide.
- Q.7** Déterminer l'expression de  $n_{L,max}$  en fonction de  $\delta$ ,  $L$  et de la densité particulaire électronique  $n_{0,max}$  avant expansion. En déduire l'expression de la pulsation plasma maximale  $\omega_{L,max}$  en fonction de  $\delta$ ,  $L$  et de la pulsation plasma  $\omega_{0,max}$  associée à la densité particulaire  $n_{0,max}$ . Pour des éventuelles applications numériques, on prendra par la suite  $\omega_{0,max} \simeq 18,7\omega_0$ .

On suppose dans un premier modèle que la température  $\theta_e$  des électrons du plasma est indépendante de l'épaisseur  $\delta$  de la cible choisie.

- Q.8** Estimer dans ce modèle et à partir de la FIGURE 2, un ordre de grandeur de la température électronique  $\theta_e$  du plasma.

On suppose, dans un second modèle, que l'énergie cinétique totale des électrons du plasma ne dépend pas de l'épaisseur du plasma. On note  $\delta_0$  l'épaisseur de la feuille la plus épaisse lors de l'expérience ( $\delta_0 = 100$  nm) et  $L_0$  la longueur caractéristique du gradient de ce plasma d'épaisseur  $\delta_0$ .

- Q.9** Comment varie alors la température électronique  $\theta_0$  du plasma avec l'épaisseur  $\delta$ ? Déterminer l'expression de  $\omega_{L,max}$  en fonction de  $\delta$ ,  $\omega_{0,max}$ ,  $\delta_0$  et  $L_0$ . Que penser de ces deux modèles compte-tenu des spectres expérimentaux de la FIGURE 2?

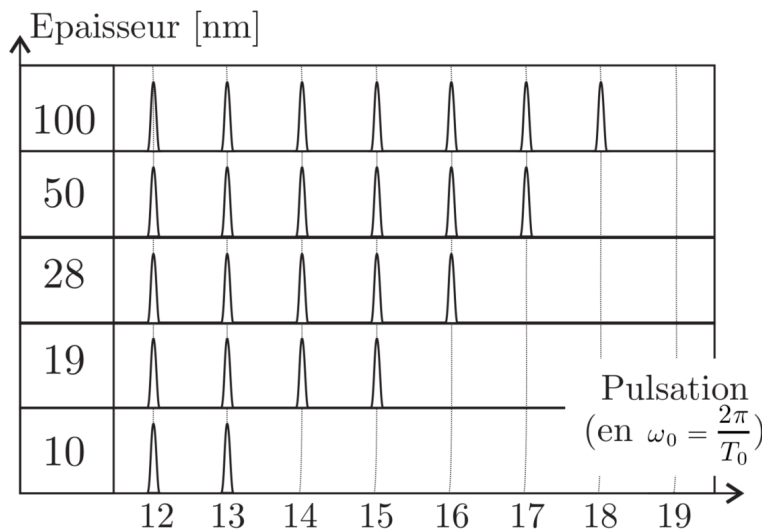


FIGURE 2 – Spectres