exercice 1 DM$_6$: Corrigé ①

1. * $\varphi_n(\lambda P+Q) = (X^2-1)(\lambda P+Q)'' + (2X+1)(\lambda P+Q)'$

$$= (X^2-1)(\lambda P''+Q'') + (2X+1)(\lambda P'+Q')$$

$$= \lambda\left[(X^2-1)P'' + (2X+1)P'\right] + (X^2-1)Q'' + (2X+1)Q'$$

$$= \lambda\varphi_n(P) + \varphi_n(Q) \quad \text{donc } \underline{\varphi \text{ linéaire}}$$

* si $d^\circ P \leq n$, $d^\circ\left((X^2-1)P''\right) \leq 2+n-2 = n$

$$d^\circ\left((2X+1)P'\right) \leq 1+n-1 = n$$

donc $d^\circ \varphi_n(P) \leq \max(n,n) = n$: $\underline{\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]}$

cl : $\boxed{\varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$ φ_n s'appelle l'induit de φ sur $\mathbb{R}_n[X]$

2. $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2X+1$, $\varphi(X^2) = 6X^2+2X-2$

$\forall k \geq 2$ $\varphi(X^k) = (X^2-1)(k(k-1))X^{k-2} + (2X+1)kX^{k-1}$

$$= k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$$

$$\boxed{M_{b_n}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & 3 & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 12 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}}$$

②

3 a Comme la matrice de φ_n dans b_n est triangulaire, les valeurs propres de φ_n sont sur la diagonale

d'où $\boxed{Sp(\varphi_n) = \{0, 2, 6, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)\}}$

b) Comme l'application $x \longmapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (dérivée $= 2x+1 > 0$), les $k(k+1)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ sont 2 à 2 distincts.

Par le corollaire de la 2^me caractérisation, φ_n admet $n+1$ val. propres 2 à 2 distinctes; d'où $\boxed{\varphi_n \text{ diagonalisable}}$

On a de plus, si on note, $\lambda_k = k(k+1)$, $\dim E_{\lambda_k}(\varphi_n) = 1$

Si on observe la matrice on voit que λ_k est vp de φ_k, de $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n$ mais pas de φ_{k-1} (si $k \geq 1$).

Si $P \in \mathbb{R}_k[X]$ | $P \neq 0$ et $\varphi_k(P) = \lambda_k P$ alors $P \notin \mathbb{R}_{k-1}[X]$ sinon λ_k serait vp de φ_{k-1}.

③

On en déduit que $d^\circ P = k$, comme $\dim E_{\lambda_k}(\varphi_n) = 1$,

on a $E_{\lambda_k}(\varphi_n) = \text{vect}(P)$. Si on note $P = \alpha_k X^k + \dots$

$P_{k,1} = \frac{1}{\alpha_k} P = X^k + \dots$ convient pour $k \geq 1$.

Pour $k=0$: comme $\varphi(1) = 0$, $E_0(\varphi_n) = \text{vect}(1)$ et $P_0 = 1$ convient.

Par l'unicité si P_k et Q_k conviennent,

$E_{\lambda_k}(\varphi_n) = \text{vect}(P_k) = \text{vect}(Q_k)$ donc $\exists \mu \in \mathbb{R} \mid Q_k = \mu P_k$

et comme ils sont tous les 2 unitaires, $P_k = Q_k$

cl : $\boxed{\exists !\ b_n = (P_0, \dots, P_n) \text{ base, de } \vec{vp}, \text{ de } E \mid d^\circ P_k = k \text{ et } P_k \text{ unitaire}}$

4. $\underline{P_0 = 1}$, $P_1 = X + a$: $\varphi(P_1) = 2X + 1 = 2(X+a)$ donc $a = \frac{1}{2}$

d'où $\underline{P_1 = X + \frac{1}{2}}$. $P_2 = X^2 + aX + b$: $\varphi(P_2) = 2(X^2-1) + (2X+1)(2X+a)$

$= 6X^2 + (2a+2)X - 2 + a$

$\varphi(P_2) = 6P_2$ donne $\begin{cases} 2a+2 = 6a \\ a - 2 = 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/4 \end{cases}$: $\underline{P_2 = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}}$

On fait de même pour $P_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$ d'où $\underline{P_3 = X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}}$

5. $P_k = X^k + a_k X^{k-1} + b_k X^{k-2} + \cdots$

$$\varphi(P_k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-1}$$
$$+ a_k\left(k(k-1)X^{k-1} + (k-1)X^{k-2} + \cdots\right)$$
$$+ b_k\left((k-2)(k-1)X^{k-2} + \cdots\right)$$

les ... représentant tjs des poly. de degré $\leq k-3$

$$\varphi(P_k) = k(k+1)P_k = k(k+1)\left(X^k + a_k X^{k-1} + b_k X^{k-2} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^\circ\, k-1 : & k + a_k k(k-1) = k(k+1)a_k \\ d^\circ\, k-2 : & -k(k-1) + (k-1)a_k + b_k(k-2)(k-1) = k(k+1)b_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + a_k(k-1) = (k+1)a_k \\ \left((k-2)(k-1) - k(k+1)\right)b_k = k(k-1) - (k-1)a_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_k = 1/2 \\ (-4k+2)b_k = (k-1)(k-1/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_k = 1/2 \\ b_k = \dfrac{k-1}{-4} \end{cases}$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{coeff}(P_k, X, k-1) &= 1/2 \\ \text{coeff}(P_k, X, k-2) &= \frac{1-k}{4} \end{aligned}}$$

6°) Avec le Théorème fondamental sur la liberté des vecteurs propres associés à des val propres 2 à 2 $\neq$:

la famille $\underline{(P_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ est libre

$\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $\exists n \in \mathbb{N} \setminus Q \in \mathbb{R}_n[X]$ ($n = d^\circ Q$ si $Q \neq 0$, sinon $n = 0$)

comme $(P_0, \dots, P_n)$ est libre de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus Q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$

d'où $\underline{(P_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ est génératrice dans $\mathbb{R}[X]$

<u>cl</u> $\boxed{(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X]}$

exercice 2

①

1) $\chi_{M(a,b)}(x) = \begin{vmatrix} x+a & -a & 0 \\ -2a & x & 0 \\ 0 & 0 & x-b \end{vmatrix}$

$= (x^2 + ax - 2a^2)(x-b)$

$\Delta = a^2 + 8a^2 = (3a)^2$ d'où racines : b, $\dfrac{-a \pm 3a}{2}$

d' $\boxed{Sp(M(a,b)) = \{a, -2a, b\}}$

2) a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^k}{k!}$

$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $P(Y=k) = q^{k-1}p$ avec $q = 1-p$

b) $\det M(a,b) = -\chi_{M(a,b)}(0) = -2a^2 b$

cqs $P(A \text{ est inversible}) = P((X^2 \neq 0) \cap (Y \neq 0))$

$= P(X \neq 0) \times P(Y \neq 0)$ par indépendance

$= (1 - P(X=0)) \times 1$

car $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

d' $\boxed{P(A \text{ est inversible}) = 1 - e^{-\alpha}}$

c) Notons B l'évènement : "A a 3 val. propres 2 à 2 ≠"

$P(B) = P((X \neq -2X) \cap (X \neq Y) \cap (-2X = Y))$

$= P((X \neq 0) \cap (X \neq Y) \cap (-2X \neq Y))$

Attention ! les 3 évènements ne sont pas indépendants.

On a $\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}((X=0) \cup (X=Y) \cup (-2X=Y))$ (Morgan)

or $(-2X=Y) = \emptyset$ car $X \geqslant 0$ et $Y \geqslant 1$,

d'autre part $(X=0) \cap (X=Y) = \emptyset$ tjs,

donc $\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=Y)$

$$= e^{-\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X=k)\cap(Y=k))$$

$$= e^{-\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!} \times q^{k-1}p \quad \text{(indép. de } X \text{ et } Y)$$

$$= e^{-\alpha} + \frac{p}{q} e^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha q)^k}{k!}$$

$$= e^{-\alpha}\left(1 + \frac{p}{q}\left(e^{\alpha q} - 1\right)\right)$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(B) = 1 - e^{-\alpha}\left(1 + \frac{p}{q}\left(e^{\alpha q} - 1\right)\right)}$

3°) 1ère méthode : on observe la matrice : $M(a,b) = \left(\begin{array}{c|c} aB & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right)$

avec $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\chi_B(x) = x^2 + x - 2$
$= (x-1)(x+2)$

$BX = X \iff \begin{cases} -x + y = x \\ 2x = y \end{cases} \iff y = 2x \iff \begin{cases} x = x \\ y = 2x \end{cases}$; $E_1(B) = \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$BX = -2X \iff \begin{cases} -x + y = -2x \\ 2x = -2y \end{cases} \iff x + y = 0 \iff \begin{cases} x = x \\ y = -x \end{cases}$: $E_{-2}(B) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

cqs posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

on a $AX_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} = aX_1$, $AX_2 = \begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} = -2aX_2$ et $AX_3 = bX_3$

Comme $rg(X_1, X_2, X_3) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$,
$C_2 - C_1$

(X_1, X_2, X_3) est une <u>base de $\vec{vp}$ de $M(a,b)$</u>

d° $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ M(a,b) \text{ diagonalisable ds } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

cor. 2ème caractérisation

<u>2ème méthode</u> : * Si $a, -2a, b$ sont 2 à 2 $\neq$: <u>oui</u> (diagonalisable)

"Code"

* Si $a = -2a$ et $b \neq 0$ les vp sont 0 <u>et</u> b.

$$\chi_{M(a,b)}(x) = x^2(x - b)$$

cqs $M(0,b)$ diagonalisable $\iff \dim E_0 = 2$

$\iff rg\, M(0,b) = 3 - 2 = 1$

On $rg\, M(0,b) = rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = 1$ $(b \neq 0)$ donc <u>oui</u>

* Si $a = -2a$ et $b = 0$: <u>oui</u> $(M(a,b) = (0))$

$* \quad \underset{\substack{\uparrow \\ a\neq 0}}{-2a \neq a}$ et $b = -2a$: $\chi_{M(a,-2a)}(x) = (x-a)(x+2a)^2$ ④

cqs $M(a,b)$ diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E_{-2a} = 2$

$\Leftrightarrow rg(A + 2a I_3) = 1$

or $rg(M(a,b)+2aI_3) = rg\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2a & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$\uparrow b = -2a \qquad C_2 - C_1$ et $a \neq 0$

donc <u>oui</u>

$* \quad -2a \neq a$ et $b = a$, idem $\chi_{M(a,a)}(x) = (x-a)^2(x+2a)$

$rg(M(a,a) - a I_3) = rg\begin{pmatrix} -2a & a & 0 \\ 2a & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

donc <u>oui</u>

cl : $\boxed{M(a,b) \text{ toujours diagonalisable ds } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

exercice 3 E3A 2010

1 a) $M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & AC+CB \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$ et par récurrence :

$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists D_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M^k = \begin{pmatrix} A^k & D_k \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$

d'où si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & \sum_{k=0}^{p} a_k D^k \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$

et $\boxed{\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & D \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}}$

b) Soit P un polynôme annulateur de M (par exemple : $P = \pi_M$: polynôme minimal de M), on a $P(M) = 0$

donc avec le a) $P(A) = P(B) = D = 0$

d. $\exists P$ scindé-simple $\boxed{P(A) = P(B) = 0}$

c) Par la 3ème caractérisation, A et B sont diagonalisable,

2 a) $MN = \begin{pmatrix} A^2 & CB \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$ et $NM = \begin{pmatrix} A^2 & AC \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$ et comme $AC = CB$

d $\boxed{MN = NM}$

b) classique si $MN = NM$ et M et N diagonalisables alors elles sont simultanément diagonalisables.

- Tout d'abord N est diagonalisable car $P(N) = 0$ avec P du 1° b)

- si $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$, $M = M_{\mathcal{B}_0}(f)$ et $N = M_{\mathcal{B}_0}(g)$. Comme $f \circ g = g \circ f$, le cours assure que $E_\lambda(f)$ est stable par g ($\forall \lambda \in sp(f)$).

Comme g est diagonalisable, l'endo. induit par g sur $E_\lambda(f)$ l'est aussi d'où il existe une base de $E_\lambda(f)$ constitué de $\vec{v}p$ de g. Soit

$\mathcal{B} = \text{concat}(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in sp(f)}$ $\left(= "\bigcup_{\lambda \in sp(f)} \mathcal{B}_\lambda"\right)$. Comme

$\mathbb{C}^{2n} = \bigoplus_{\lambda \in sp(f)} E_\lambda(f)$, $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{C}^{2n}$ constituée de vecteurs propres pour g et f. Soit $R = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0)$

on a $\boxed{M = R^{-1} D R \ , N = R^{-1} D' R}$ avec D et (3)

D' diagonales.

c) $\Delta = M - N = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R^{-1} \underbrace{(D - D')}_{\text{diagonale}} R$

$\underline{d}$ $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ diagonalisable}}$

3) $\Delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = (0)$ donc $\Pi_\Delta \mid X^2$. Comme

Δ est diagonalisable, $\Pi_\Delta = X$ d'où $\Delta^1 = \Delta = 0$

$\underline{d}$ $\boxed{c = 0}$

Problème 2 Corrigé de Madame Lemaire

(20) Par définition, $Ax = \lambda x$ et la ligne n° i s'écrit

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad \text{pour tout } i \in [\![1, m]\!]}$$

(21) Pour $i = i_0$ et en valeur absolue :

$$|\lambda x_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{i_0 j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |a_{i_0 j} x_j| \text{ par inégalité triangulaire.}$$

or $|x_j| \leqslant |x_{i_0}|$ donc $|\lambda x_{i_0}| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |a_{i_0 j}| \, |x_{i_0}|$

or $x \neq 0$ donc $|x_{i_0}| \neq 0$: on multiplie par $\frac{1}{|x_{i_0}|} > 0$

$$\boxed{|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |a_{i_0 j}|}$$

On note $A_i = \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A_k \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} A_i$,

en particulier pour $k = i_0$ donc $\boxed{|\lambda| \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\right\}}$

(22) $A_m(\alpha, \beta)$ est une matrice symétrique réelle donc d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

donc $\boxed{\text{les valeurs propres de } A_m(\alpha, \beta) \text{ sont réelles}}$

(23) D'après (Q21), $|\lambda| \leqslant \max\{|\alpha| + |\beta|, |\alpha| + 2|\beta|\} = |\alpha| + 2|\beta|$

$$\boxed{|\lambda| \leqslant |\alpha| + 2|\beta|}.$$

(24) $\alpha = 0$ et $\beta = 1$: si λ est valeur propre de $A_m(0,1)$ alors $|\lambda| \leqslant 2$ donc $\left|\frac{\lambda}{2}\right| \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant \frac{\lambda}{2} \leqslant 1$ or $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ donc $\exists \theta \in [0, \pi] \,/\, \frac{\lambda}{2} = \cos\theta$.

$$\boxed{\exists \theta \in [0, \pi] \,/\, \lambda = 2\cos\theta}$$

(25) {Ecrire au moins 1 bloc de 9 coeff en haut à gauche pour y voir clair}

$$\chi_{A_n(0,1)}(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & & \\ -1 & X & -1 & & \\ 0 & -1 & X & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & X \end{vmatrix} = X\chi_{A_n(0,1)} \underbrace{+}_{-(-1)^3} \begin{vmatrix} -1 & -1 & & & (0) \\ 0 & X & \ddots & & \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & X \end{vmatrix}$$

donc $\boxed{\chi_{A_n(0,1)}(X) = X\chi_{A_{n-1}(0,1)}(X) - \chi_{A_{n-2}(0,1)}(X)}$ pour $n \geq 3$

donc $\boxed{U_n = 2X\, U_{n-1} - U_{n-2}}$ pour $n \geq 3$

26) On a donc : $\forall n \geq 3$, $U_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\, U_{n-1}(\cos\theta) - U_{n-2}(\cos\theta)$.
$\{\Rightarrow n-2 \geq 1\}$.

Pour $n \geq 1$, on pose H_n : " $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ "

- $U_1(\cos\theta) = \chi_{A_1(0,1)}(2\cos\theta) = \det(2\cos\theta) = 2\cos\theta$

or $\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta = U_1(\cos\theta)$: H_1 est vraie.

$U_2(\cos\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -1 \\ -1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = 4\cos^2\theta - 1$

$\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin(\theta+2\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\overbrace{\sin 2\theta}^{2\sin\theta\cos\theta}}{\sin\theta} = \cos 2\theta + 2\cos^2\theta$

or $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ donc $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = 4\cos^2\theta - 1 = U_2(\cos\theta)$

H_2 et vraie.

- soit $n \geq 3$, on suppose que H_{n-2} et H_{n-1} sont vraies alors

{verif de la 1ère hérédité pour $n = 3$: si $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$ sont vraies alors
OK !

$U_n(\cos\theta) = 2\cos\theta \times \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} - \dfrac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$

or $\sin(n\theta)\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta\right]$

{Ecrire au br :
$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \dots$
$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \dots$

donc $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$; H_n et vraie

<u>Concl</u> : on a montré par 1 récurrence à 2 pas que $\forall n \geq 1$, $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

(27) On pose $\boxed{\alpha_j = 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)}$ pour $j \in [\![1, n]\!]$.

on a $0 < \frac{j\pi}{n+1} < \pi$ donc $U_n(\alpha_j) = \dfrac{\sin\left((n+1)\frac{j\pi}{n+1}\right)}{\sin \frac{j\pi}{n+1}} = 0$

donc $\chi_{A_n(0,1)}(\alpha_j) = 0$

donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, α_j est valeur propre de $A_n(0,1)$

or les $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont distincts 2 à 2 donc $A_n(0,1)$ a n valeurs propres distinctes et ne peut en avoir plus ($\dim A_n = n$)

donc $\boxed{Sp(A_n(0,1)) = \{\ \alpha_j \ / \ 1 \leq j \leq n\}}$.

$d^\circ \chi_{A_n(0,1)} = n$ et a pour racines les α_j pour $1 \leq j \leq n$

donc, ce sont des racines simples : $\boxed{\alpha_j \text{ est d'ordre } 1}$

et donc $\boxed{\dim E_{\alpha_j}(A_n(0,1)) = 1}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

(28) Par définition d'un vecteur propre, $x \neq (0)$ et :

$A_n(0,1)\, x = 2(\cos\theta_j)\, x \iff \begin{cases} -2\cos(\theta_j)\, x_1 + x_2 = 0. \\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)\, x_k + x_{k+1} = 0 \text{ pour } 2 \leq k \leq n-1 \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)\, x_n = 0. \end{cases}$

on transpose

(29) {Le plus rapide : faire le début de Q30 en même temps}.

$(u_k)_k$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

(EC) : $r^2 - 2\cos\theta_j\, r + 1 = 0 \iff (r - e^{i\theta_j})(r - e^{-i\theta_j}) = 0$.

$\iff r = e^{i\theta_j}$ ou $r = \overline{e^{i\theta_j}}$ $\quad \{ r = \rho e^{i\theta} : u_n = \rho^n(\lambda \cos n\theta + \mu \ldots)$

donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall k \geq 0,\ u_k = \lambda\cos(\theta_j k) + \mu \sin(\theta_j k)$

On note $v_k = \cos\theta_j k$ et $w_k = \sin\theta_j k$ alors $E = \text{Vect}((v_k)_k, (w_k)_k)$

avec $(v_k)_k$ et $(w_k)_k$: 2 suites réelles, donc E est un s.e.v de l'ensemble des suites réelles : $\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-e.v}}$

et $\boxed{\dim E = 2}$.

(30) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu \sin\left(\frac{j\pi}{n+1} \times (n+1)\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu \in \mathbb{R} \text{ car } \sin(j\pi) = 0 \end{cases}$

$\iff \boxed{u_k = \mu \sin(\theta_j k)}$ où $\mu \in \mathbb{R}$.

(31) On considère la suite : $\begin{cases} u_k = x_k \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant n. \\ u_0 = u_{n+1} = 0. \\ \forall k \geqslant n+1, \quad u_{k-1} - 2\cos\theta_j u_k + u_{k+1} = 0. \end{cases}$

$\{$si $k = n+1$, on définit $u_{n+2}\}$.

alors $(u_k)_k \in E$ d'après le système de (Q28) et $u_0 = u_{n+1} = 0$

donc $u_k = \mu \sin(\theta_j k)$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\quad x_k = \mu \sin(\theta_j k)$

par exemple : (pour $\mu = 1$) $\boxed{\tilde{x} = \begin{pmatrix} \sin\theta_j \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix}} \in E_{2\cos\theta_j}$ et $x \neq 0$

or $\dim E_{2\cos\theta_j} = 1$

donc $\boxed{E_{\cos\theta_j} = \mathrm{Vect}(\tilde{x})}$

(32) <u>si $\beta = 0$</u>, $A_n(\alpha, 0) = \mathrm{diag}(\alpha, \dots, \alpha)$ donc $Sp(A_n(0,\alpha)) = \{\alpha\}$.

et $E_\alpha(A_n(\alpha, 0)) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $\{$ou $\mathbb{R}^n\}$

<u>Si $\beta \neq 0$</u>

$$\chi_{A_n(\alpha,\beta)}(X) = \begin{vmatrix} X-\alpha & -\beta & \cdots & \\ -\beta & X-\alpha & & \\ 0 & -\beta & & \\ \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \end{vmatrix} = \beta^n \begin{vmatrix} \frac{X-\alpha}{\beta} & -1 & \cdots \\ -1 & \frac{X-\alpha}{\beta} & \\ 0 & -1 & 0 \\ \vdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{X-\alpha}{\beta} \end{vmatrix}$$

donc $\chi_{A_n(\alpha,\beta)}(X) = \beta^n \chi_{A_n(0,1)}\left(\frac{X-\alpha}{\beta}\right)$

On résout : $\frac{X-\alpha}{\beta} = 2\cos\theta_j \iff X = \boxed{\alpha + 2\beta\cos\theta_j \text{ noté } \beta_j}$

$\boxed{Sp(A_n(\alpha,\beta)) = \{\beta_j \ / \ 1 \leqslant j \leqslant n\}}$

$(A_n(\alpha,\beta) - \beta_j)x = 0 \iff (A_n(0,\beta) - 2\beta\cos\theta_j I_n)x = 0 \iff \underbrace{\beta}_{\neq 0}(A_n(0,1) - 2\cos\theta_j I_n)x = 0$

$\iff (A_n(0,1) - 2\cos\theta_j I_n)x = 0 \iff x = \mu\tilde{x}$: $\boxed{E_{\beta_j}(A_n(\alpha,\beta)) = \mathrm{Vect}(\tilde{x})}$

II (33) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ CD-DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$

car C et D commutent

D'après et la forme des 2 matrices triangulaires par blocs : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \det D \underbrace{\det I_m}_{=1} = \det(AD-BC)\det D.$

or $\det D \neq 0$ car D est inversible donc $\boxed{\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC)}$

(35) $\det\left(D + \frac{1}{p} I_m\right) = (-1)^m \det\left(-\frac{1}{p} I_m - D\right) = (-1)^m \chi_D\left(-\frac{1}{p}\right)$ où χ_D est le polynôme caractéristique : il est de degré m donc admet au plus m racines, or 0 est racine car D non inversible : on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines $\neq 0$ de χ_D avec λ_1 la plus petite en module, donc $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_j|$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ - {quitte à réindexer}.

Dans ce cas, si $\frac{1}{p} < |\lambda_1|$ alors $\forall j \in [\![1, p]\!], -\frac{1}{p} \neq \lambda_j$ (à dém par l'abs.)

donc $\chi_D\left(-\frac{1}{p}\right) \neq 0$.

$\frac{1}{p} < |\lambda_1| \iff p > |\lambda_1|$: on pose $p_0 = \lfloor |\lambda_1| \rfloor + 1 > |\lambda_1|$.

donc $\forall p \geqslant p_0$, $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p_0} < |\lambda_1|$ donc $\chi_D\left(-\frac{1}{p}\right) \neq 0$ donc $\det\left(D + \frac{1}{p}\right) \neq 0$ donc $D + \frac{1}{p} I_m$ est inversible

(36) D'après (34) et (35) $\exists p_0 \in \mathbb{N}^* \,/\, \forall p \geqslant p_0$, en notant $M_p = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p} I_n \end{pmatrix}$ et $N_p = A\left(D + \frac{1}{p} I_m\right) - BC$, on a : $\det M_p = \det N_p$

or le déterminant est une fonction C^0 sur $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est une forme n ou $2n$-linéaire, donc quand $p \to +\infty$,

$\lim\limits_{p \to +\infty} \det M_p = \det\left(\lim\limits_{p \to +\infty} M_p\right)$ or $\lim\limits_{p \to +\infty} M_p = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC)}$

13 / CCP 19

(37) $\mu \in Sp(N) \iff \chi_N(\mu) = 0 \iff \det(\mu I_{2n} - N) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} \mu I_n & -I_n \\ -M & \mu I_n \end{vmatrix} = 0$ or $-M$ et μI_n commutent

donc d'après (Q35), $\mu \in Sp(N) \iff \det(\mu^2 I_n - M) = 0$.

$\iff \chi_M(\mu^2) = 0 \iff \mu^2 \in Sp(M)$

$\boxed{Sp(N) = \{\mu \in \mathbb{C} \, / \, \mu^2 \in Sp(M)\}}$

(38) Par hypothèse $Mx = \mu^2 x$ et $x \neq 0_n$ alors

$N\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \mu x \\ M \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu^2 x \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}$ or $x \neq 0_n$ donc

$\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \neq 0_{2n}$ donc $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } N \text{ associé à la valeur propre } \mu}$

(39) $M 0_n = 0_n M = 0_n$ donc d'après (Q36), $\det N = \det(0_n - I_n M)$

donc $\det N = (-1)^n \det M$: $\boxed{\text{si } M \text{ est inversible alors } N \text{ aussi}}$

{et même mieux : $\det M \neq 0 \iff \det N \neq 0$}.

Si M est {diagonalisable et inversible} alors on note $\mu_1, \dots, \mu_n$ ses valeurs propres (non forcément $\neq$) et $B = (u_1, \dots, u_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M, puis on note $B' = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \mu_1 u_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_n \\ \mu_n u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ -\mu_1 u_1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} u_n \\ -\mu_n u_n \end{pmatrix}\right)$

et U = la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ et V de colonnes $(\mu_1 u_1, \dots, \mu_n u_n)$ alors

$\det B' = \det\begin{pmatrix} U & U \\ V & -V \end{pmatrix} = \det(U \times (-V) - UV)$ car $V \times (-V) = -V \times V = -V^2$

d'après (Q36)

$\det B' = \det(-2UV) = (-2)^n \det U \times \det V$ or $\det V = \mu_1 \times \dots \times \mu_n \det U$

donc $\det B' = (-2)^n \prod_{k=1}^{n} \mu_k (\det U)^2 \neq 0$ car $(u_1, \dots u_n)$ est 1 base donc $\det U \neq 0$ et M est inversible donc $0 \notin Sp(M)$

donc B' est une base de vecteurs propres de N

donc N est diagonalisable

$\boxed{\text{Si } M \text{ est diagonalisable et inversible alors } N \text{ aussi}}$