

## DM 6

### *Électromagnétisme, Optique géométrique, Oxydoréduction*

#### Exercice 1 : Moment cinétique d'un champ électromagnétique

##### I – Rayonnement d'un dipôle de direction fixe

Un dipôle électrique oscillant, de moment dipolaire  $\vec{p}(t) = p(t)\vec{e}_z$  et situé en  $O$  produit, en un point  $M(r, \theta, \varphi)$  situé à grande distance, un champ magnétique qui s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{dp}{dt} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{rc} \frac{d^2p}{dt^2} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{e}_\varphi$$

- Q.1** Justifier la direction de ce champ à l'aide d'arguments de symétrie. Commenter sa dépendance en fonction de la quantité  $t - r/c$ .

On suppose que le moment dipolaire varie sinusoidalement :  $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$ .

- Q.2** Trouver une condition sur  $r$  pour que, dans l'expression du champ magnétique donnée, le terme en  $1/r$  ait une amplitude au moins 100 fois supérieure au terme en  $1/r^2$ . Comment s'appelle cette hypothèse ?

Nous admettrons cette condition dans la suite. Le champ magnétique s'écrit donc :

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi rc} p_0 \omega^2 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{e}_\varphi$$

- Q.3** Donner l'expression du champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  associé à cette onde.
- Q.4** En déduire l'expression du vecteur de Poynting moyen,  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  et exprimer la puissance moyenne  $\langle P_{ray} \rangle$  qui traverse une sphère de rayon  $R$ , en fonction de  $\mu_0$ ,  $c$ ,  $p_0$  et  $\omega$ . Commenter le fait que le résultat obtenu soit indépendant de  $R$ . On donne  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ .

##### II – Rayonnement d'un dipôle tournant

Un électron de charge  $-e$  situé en  $M$ , tourne dans le plan  $(xOy)$  autour d'une charge  $+e$ , immobile au point  $O$ . Le mouvement de cet électron est circulaire uniforme de rayon  $a$  et de vitesse angulaire de rotation  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ . Le vecteur position de l'électron est ainsi  $\vec{OM} = a \cos(\omega t) \vec{e}_x + a \sin(\omega t) \vec{e}_y$ .

- Q.5** Montrer que le rayonnement de ce système peut être assimilé à celui de deux dipôles oscillant  $\vec{p}_1(t)$  et  $\vec{p}_2(t)$  respectivement dirigés selon les directions fixes  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .
- Q.6** Exprimer le champ électrique et décrire l'état de polarisation de l'onde rayonnée par ce dipôle tournant aux points suivants, situés à grande distance :
- Point  $A$  de coordonnées  $x = r$ ,  $y = z = 0$  ;
  - Point  $D$  de coordonnées  $x = y = 0$ ,  $z = r$  ;
  - Point  $F$  de coordonnées  $x = y = 0$ ,  $z = -r$ .
- Q.7** Montrer que le vecteur de Poynting moyen  $\langle \vec{\Pi}_t \rangle$  de l'onde est, en tout point, la somme des vecteurs de Poynting moyens  $\langle \vec{\Pi}_1 \rangle$  et  $\langle \vec{\Pi}_2 \rangle$  respectivement créés par les dipôles  $\vec{p}_1(t)$  et  $\vec{p}_2(t)$ .

- Q.8** En déduire que la puissance moyenne totale rayonnée, notée  $\langle P_t \rangle$  est donnée par  $\langle P_t \rangle = \frac{\mu_0 a^2 e^2 \omega^4}{6\pi c}$ .

### III – Force et couple de diffusion

On décrit dans cette partie le mouvement d'un électron lié à un atome (centré en  $O$ ) dans le modèle de l'électron élastiquement lié. Dans ce modèle, l'électron situé en  $M$  et de masse  $m_e$  est soumis, en plus de la force de Lorentz, aux forces suivantes :

- une force de rappel  $\vec{f}_r = -m_e\omega_0^2\vec{r}$  qui modélise l'attraction du reste de l'atome
- une force dissipative  $\vec{f}_{AL} = \alpha m_e \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$  dite force d'Abraham-Lorentz, qui modélise la dissipation d'énergie mécanique de l'électron associée à l'émission de rayonnement et dans laquelle  $\alpha$ , homogène à un temps, est une constante.

L'atome placé dans le vide est exposé à une onde plane de longueur d'onde très grande devant ses dimensions, de vecteur d'onde  $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e}_z$  et de champ électrique complexe  $\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)e^{j(\omega t - kz)}$ .

On admet de plus que la perturbation apportée par la force d'Abraham-Lorentz est faible : la quantité  $\frac{\alpha\omega^3}{\omega_0^2}$  est considérée comme un infiniment petit du premier ordre.

- Q.9** Quel est l'état de polarisation de l'onde incidente ? Déterminer le champ magnétique associé à cette onde puis justifier que les effets de ce dernier sur le mouvement de l'électron puissent être négligés en première approximation devant ceux du champ électrique.
- Q.10** Dans cette hypothèse, et en admettant que l'analyse est effectuée dans l'approximation de Rayleigh ( $\omega \ll \omega_0$ ), déterminer le déplacement complexe  $\vec{r}(t)$  de l'électron en régime harmonique établi, en fonction de  $E_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega$ ,  $t$ ,  $\alpha$  et des constantes physiques de l'électron.
- Q.11** En déduire la puissance moyenne  $\langle P_{AL} \rangle$  de la force  $\vec{f}_{AL}$ . Quelle est la relation entre cette puissance et la puissance perdue par rayonnement ? Déduire des résultats de la question **Q.8** que l'on a nécessairement  $\alpha = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c m_e}$ .
- Q.12** Montrer que l'atome est en réalité soumis à une force magnétique moyenne  $\langle \vec{F}_{mag} \rangle = -e \langle \vec{v} \wedge \vec{B} \rangle$  non nulle que l'on exprimera en fonction de  $\langle P_{AL} \rangle$  et  $c$ .
- Q.13** À partir de l'expression du couple subit par un dipôle de moment  $\vec{p}$  plongé dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ , déduire l'expression du couple moyen  $\langle \vec{\Gamma} \rangle$  auquel l'atome est soumis de la part de l'onde, en fonction de  $\langle P_{AL} \rangle$  et  $\omega$ .
- Q.14** Quelle serait la valeur de  $\langle \vec{\Gamma} \rangle$  si :
- a) l'onde était polarisée circulairement dans l'autre sens que celui considéré jusqu'à présent ?
  - b) l'onde était polarisée rectilignement ?

### IV – Interprétation corpusculaire

Les résultats de la partie précédente peuvent être interprétés en termes corpusculaires. On peut en effet considérer que l'atome est placé dans un faisceau homocinétique de photons, d'énergie  $\varepsilon$ , d'impulsion  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  et se déplaçant à la vitesse  $c$ . Le transfert d'énergie entre l'onde incidente et l'atome est décrit comme l'absorption de photons par l'atome.

- Q.15** À l'aide d'un bilan énergétique, déterminer le nombre  $N_{abs}$  de photons absorbés par l'atome par unité de temps du fait de la diffusion, en fonction de  $\langle P_t \rangle$  et  $\varepsilon$ .

- Q.16** Relier  $\langle \vec{F}_{mag} \rangle$  à  $N_{abs}$  et  $\vec{p}$  en effectuant un bilan de quantité de mouvement. En déduire une relation entre  $p$ ,  $\varepsilon$  et  $c$ .
- Q.17** À partir d'un bilan de moment cinétique, montrer que les photons possèdent un moment cinétique intrinsèque  $\vec{\ell} = \ell \vec{e}_z$ , que l'on exprimera en fonction de  $\langle \vec{\Gamma} \rangle$  et  $N_{abs}$ . En déduire une relation très simple entre  $\ell$ ,  $\varepsilon$  et  $\omega$ , pulsation de l'onde.
- Q.18** Quel serait le moment cinétique intrinsèque du photon pour une polarisation circulaire de sens opposé à celui étudié ici ? Et pour une polarisation rectiligne ?

## Exercice 2 : Corrosion de l'argent

Les objets en argent se recouvrent d'une couche d'un composé noir ou gris foncé de sulfure d'argent  $\text{Ag}_2\text{S}_{(s)}$ . Ce ternissement est dû à la présence de sulfure de dihydrogène gazeux  $\text{H}_2\text{S}$  dans l'atmosphère, dont une partie peut être dissoute sous forme  $\text{H}_2\text{S}_{(aq)}$  dans un film d'eau naturellement présent à la surface du métal.

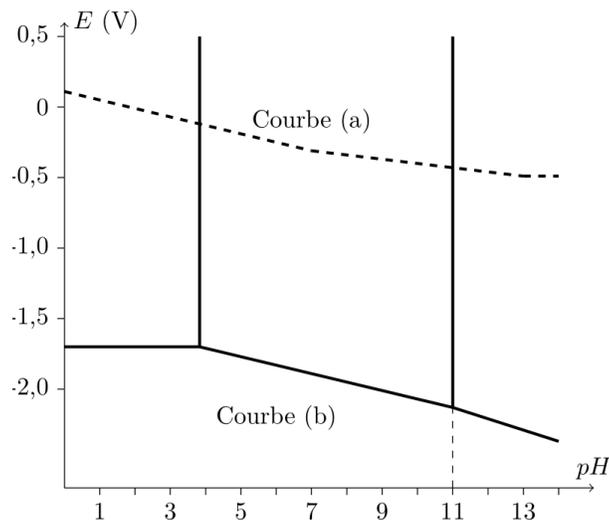
On donne :

- les potentiels rédox standards des différents couples :  $E^0(\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(l)}) = 1,23 \text{ V}$ ,  $E^0(\text{H}_{(aq)}^+/\text{H}_{2(g)}) = 0 \text{ V}$ ,  $E^0(\text{Ag}_{(aq)}^+/\text{Ag}_{(s)}) = 0,8 \text{ V}$  à  $pH = 0$  et à  $298 \text{ K}$
- Les  $pK_a$  successifs du sulfure d'hydrogène :  $pK_{a1} = 7$  (couple  $\text{H}_2\text{S}/\text{HS}^-$ ) et  $pK_{a2} = 13$  (couple  $\text{HS}^-/\text{S}^{2-}$ ).
- Le produit de solubilité du sulfure d'argent  $K_s = 10^{-49}$ .

**Q.1** Écrire les deux demies-équations rédox dans lesquelles interviennent les couples de l'eau.

**Q.2** Tracer, en justifiant, le diagramme  $E - pH$  de l'eau pour un  $pH$  compris entre 0 et 14.

Le diagramme  $E - pH$  de l'argent dans une solution de sulfures est donné ci-dessous (courbe (a)).

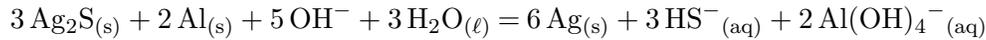


Il a été tracé pour une concentration en soufre dissout égale à  $1,00 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Les espèces de l'argent prises en compte sont :  $\text{Ag}_{(s)}$  et  $\text{Ag}_2\text{S}_{(s)}$ .

- Q.3** Recopier l'allure de ce diagramme et préciser les domaines de prédominance des deux espèces  $\text{Ag}_{(s)}$  et  $\text{Ag}_2\text{S}_{(s)}$ .
- Q.4** Expliquer les changements de pente à  $pH = 7$  et  $pH = 13$ . Retrouver par le calcul les valeurs numériques des différentes pentes.

- Q.5** Retrouver par le calcul la valeur du potentiel de la zone frontière du couple  $\text{Ag}_2\text{S}_{(s)}/\text{Ag}_{(s)}$  pour un  $pH > 13$ .
- Q.6** Interpréter l'oxydation de l'argent par le dioxygène de l'atmosphère sous forme de sulfure d'argent et écrire la réaction d'oxydoréduction correspondante pour un  $pH$  de l'ordre de 8.

On peut lire dans la littérature que l'on peut faire disparaître ce dépôt noir de sulfure d'argent en faisant chauffer une solution aqueuse de carbonate de sodium  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  avec l'objet à traiter dans une casserole en aluminium. Nous allons vérifier la pertinence de cette affirmation. La réaction concernée serait :



Sur le diagramme  $E - pH$  précédent, on a également tracé le diagramme de l'aluminium (courbe (b)) pour une concentration en ion aluminium de  $1,00 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Les espèces considérées sont :  $\text{Al}_{(s)}$ ,  $\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}$ ,  $\text{Al}(\text{OH})_4^-_{(\text{aq})}$ ,  $\text{Al}(\text{OH})_3_{(s)}$ .

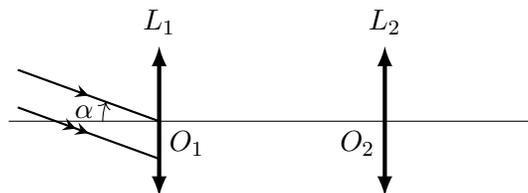
- Q.7** Préciser le domaine de prédominance de chaque espèce.
- Q.8** On utilise une solution de carbonate de sodium  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  de concentration  $c = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Quel est le  $pH$  de la solution ?  
On donne :  $pK_a(\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-) = 6,3$  et  $pK_a(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}) = 10,3$ .
- Q.9** La réaction proposée pour traiter le métal est-elle réaliste ?

### Exercice 3 : Lunette astronomique

Dans cet exercice, on étudie une lunette astronomique dans le but d'observer la planète Mars. La lunette est un système optique afocal constitué de deux lentilles minces convergentes placées sur le même axe optique :

- la lentille  $L_1$  (l'objectif) de distance focale image  $f'_1 = \overline{O_1F'_1}$  ;
- la lentille  $L_2$  (l'oculaire) de distance focale image  $f'_2 = \overline{O_2F'_2}$ .

On choisit  $f'_1 = 5f'_2$ . La lunette peut être modélisée comme sur la figure suivante (échelle non respectée) :



On rappelle qu'un œil normal voit un objet sans accommoder si cet objet se trouve à l'infini. La planète Mars est vu à l'œil nu sous un angle noté  $\alpha$ .

- Q.1** Quelle est la propriété d'un système afocal ? En déduire la distance  $\overline{O_1O_2}$  entre les deux lentilles.
- Q.2** Reproduire le schéma de la lunette ci-dessus en indiquant la position des foyers des lentilles. Compléter la marche des deux rayons lumineux provenant de Mars. L'image intermédiaire est notée  $A'B'$ .
- Q.3** En plaçant notre œil à la sortie de la lunette, voit-on une image droite ou inversée ? (justifier la réponse)
- Q.4** La lunette est caractérisée par son grossissement  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$  avec  $\alpha'$  l'angle formé entre les rayons émergents et l'axe optique. Exprimer  $G$  en fonction de  $f'_1$  et  $f'_2$  et faire l'application numérique.

On veut maintenant augmenter le grossissement de cette lunette et remettre l'image droite. Pour cela, on ajoute une lentille convergente  $L_3$  entre  $L_1$  et  $L_2$  ( $O_3$  se trouve alors entre  $F'_1$  et  $F_2$ ). On note  $f'_3 = \overline{O_3F'_3}$  la distance focale image de  $L_3$ . Pour conserver une image finale à l'infini, on doit déplacer la lentille  $L_2$ .

On note  $A'B'$  la première image intermédiaire (formée par  $L_1$ ) et qui joue le rôle d'objet pour  $L_3$ . On note  $A''B''$  la seconde image intermédiaire (formée par  $L_3$ ) et qui joue le rôle d'objet pour  $L_2$  :

$$\text{Mars} \xrightarrow{L_1} A'B' \xrightarrow{L_3} A''B'' \xrightarrow{L_2} \text{image finale}$$

L'image finale est vue sous un angle noté  $\alpha''$ .

- Q.5** Où doit se trouver l'image intermédiaire  $A''B''$  formée par  $L_3$  pour que l'image finale soit à l'infini ? En déduire le couple de points qui sont conjugués par  $L_3$  pour que le système soit afocal.
- Q.6** Faire un schéma du montage en plaçant les trois lentilles et leurs foyers. Tracer la marche de deux rayons provenant de Mars (rayons parallèles et formant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique).
- Q.7** Donner la définition du grossissement  $\gamma_3$  de  $L_3$  en fonction de  $\overline{A'B'}$  et  $\overline{A''B''}$ . Exprimer alors ce grossissement en fonction de  $\overline{O_3F_2}$  et  $\overline{O_3F'_1}$ .
- Q.8** Donner la relation de conjugaison de  $L_3$  en fonction de  $f'_3$ ,  $\overline{O_3F_2}$  et  $\overline{O_3F'_1}$ . En déduire l'expression de  $\overline{O_3F'_1}$  en fonction de  $f'_3$  et  $\gamma_3$ .
- Q.9** En s'aidant du schéma de la question 6, déterminer le nouveau grossissement  $G'$  du système en fonction de  $\gamma_3$ ,  $f'_1$  et  $f'_2$ . Faire l'application numérique avec  $\gamma_3 = -2$ .

• • • FIN • • •