

DS 5 (CCS) (4 heures)***Électromagnétisme***

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrees.
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1–2	1	–3.3%
3–4	2	–6.7%
5–6	3	–10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées, si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

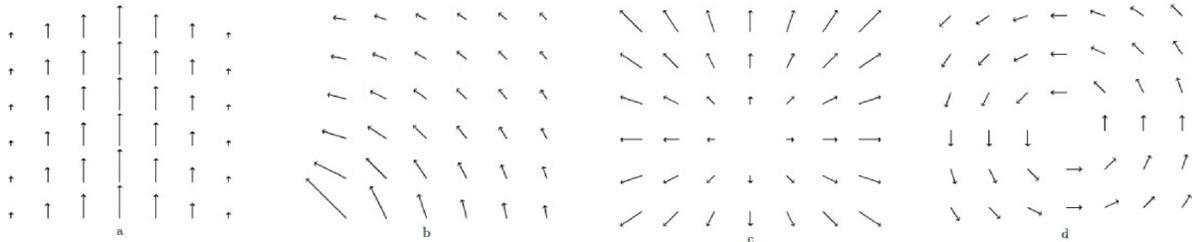
Exercice 1 : À propos du champ magnétique

I – Propriétés du champ magnétique

Q.1 Le champ magnétique est dit à flux conservatif. Écrire cette propriété sous forme intégrale puis indiquer ce que cela signifie concrètement par une phrase.

La figure ci-dessous donne quatre cartes de champ qui représentent une coupe dans un plan perpendiculaire à l'axe (Oz) de champs vectoriels \vec{A} , invariants par translation suivant l'axe (Oz) . Sur la carte b , seul un quart du plan a été représenté. Les champs sont de l'une des trois formes ci-dessous :

$$\alpha : \vec{A} = A(x, y)\vec{u}_y \quad \beta : \vec{A} = A(r, \theta)\vec{u}_r \quad \gamma : \vec{A} = A(r, \theta)\vec{u}_\theta$$



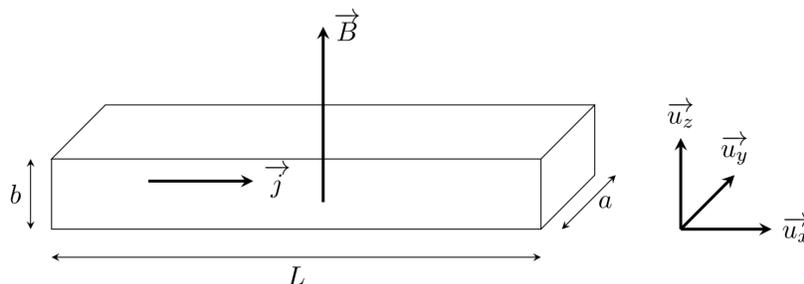
Q.2 Attribuer à chaque carte l'expression de \vec{A} qui convient. Indiquer dans chaque cas de quelle(s) coordonnée(s) dépend sa composante et si le champ peut être à flux conservatif ou non.

Q.3 Parmi les cartes de champs proposées, lesquelles sont celles d'un champ à circulation conservative ?

Q.4 Énoncer le théorème d'Ampère. En déduire (pour les cartes de champ concernées) si des courants sont présents et leur sens éventuel.

II – Effet Hall

On réalise dans un matériau métallique une plaquette parallélépipédique de grande longueur L suivant (Ox) , de largeur a et d'épaisseur b . Cette plaquette est parcourue par une densité de courant uniforme et permanente $\vec{j} = j\vec{u}_x$ avec $j > 0$. On note I l'intensité électrique, supposée positive, à travers une section droite perpendiculaire à (Ox) (voir ci-dessous).



- Q.5** On part d'un état où il n'y a pas de champ magnétique et on suppose que les électrons de conduction ont tous la même vitesse \vec{v} . On établit à l'instant $t = 0$ un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{u}_z$.
- Quelle est l'action du champ magnétique sur un électron de conduction ?
 - Que se passe-t-il pendant le régime transitoire ? Montrer qualitativement qu'il apparaît alors un champ électrique \vec{E}_H . À ce champ électrique est associé un potentiel électrique V et une différence de potentiel se crée entre les points A et C situés sur les faces latérales parallèles au plan (Oxz) et tels que $\overrightarrow{AC} = a\vec{u}_y$. La différence de potentiel $V_C - V_A$ est nommée V_H . Quel est son signe ?
- Q.6**
- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron de conduction en régime permanent, exprimer le champ de Hall \vec{E}_H en fonction, entre autre, de \vec{B} .
 - Donner la relation liant le vecteur densité de courant volumique \vec{j} à la vitesse de déplacement des électrons dans la plaquette, à n_e (nombre d'électrons de conduction par unité de volume) et à e (charge élémentaire).
 - Montrer que $V_H = \frac{R_H I B}{b}$ où R_H est la constante de Hall à expliciter en fonction de n_e et e .
- Q.7** Applications numériques :
- Le matériau est un ruban métallique de masse volumique μ et de masse molaire M . Chaque atome met en jeu un électron libre pour la conduction. Déterminer l'expression et la valeur numérique de n_e .
 - En déduire la valeur de V_H si $B = 0,1 \text{ T}$, $M = 64 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\mu = 8,92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $I = 1,00 \text{ A}$ et $b = 0,1 \text{ mm}$.
 - Les valeurs choisies pour I et B sont-elles réalistes ? Le signe des porteurs de charge mobiles, s'il est inconnu, peut-il être déterminé dans cette expérience ? Comment ?
 - L'apparition de matériaux semi-conducteurs comme l'arséniure d'indium InAs a permis d'obtenir des tensions de Hall plus élevées. Pourquoi ? On donne pour $I = 100 \text{ mA}$, $|V_H| = 126,7 \text{ mV}$. Calculer la valeur du champ magnétique B avec $n_e = 1,7 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$, $b = 0,1 \text{ mm}$, $a = 1 \text{ cm}$ et $L = 3 \text{ cm}$.
 - La constante de Hall R_H varie avec la température suivant la loi $R_H(T) = A \exp\left(\frac{E}{RT}\right)$ où A est une constante, E est homogène à une énergie molaire et T est la température exprimée en Kelvin. Quelles sont, à votre avis, les raisons de cette variation ?
 - Avec E de l'ordre de $17 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, supposée constante dans l'intervalle de température considéré, calculer la variation relative de la constante de Hall lorsque la température s'élève de 10 K par rapport à la température ambiante prise égale à 300 K .

Exercice 2 : Étude de la magnétosphère terrestre

Ce sujet a pour objet l'étude de la magnétosphère de la Terre. Une liste de données numériques et un formulaire sont disponibles à la fin du sujet.

(La magnétosphère terrestre)

D'après Panorama de la physique, sous la direction de Gilbert Pietryk, Belin Pour la Science, 2007.

La magnétosphère est la dernière enveloppe d'une planète, avant le milieu interplanétaire. Ce milieu est dominé essentiellement par le vent solaire, constitué de protons et d'électrons très rapides. Comme son nom l'indique, la magnétosphère est caractéristique des planètes qui ont un champ magnétique propre. La magnétosphère terrestre est la mieux connue puisqu'elle est la plus facilement accessible et qu'elle est explorée depuis l'ère des projets spatiaux. Pourtant de nombreux mystères subsistent quant à son fonctionnement, en particulier sur la manière dont elle répond aux modifications de l'activité solaire.

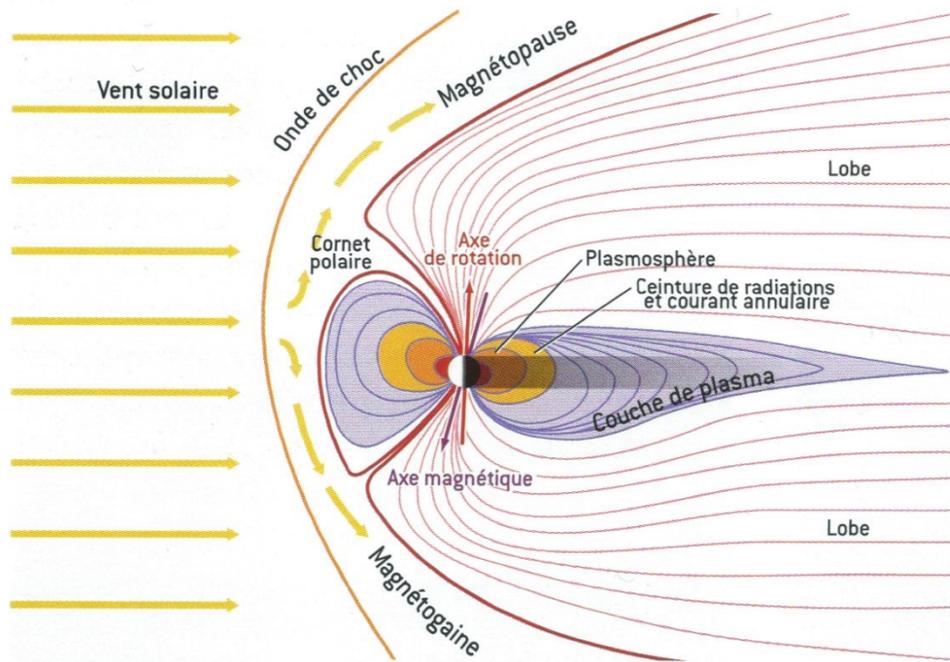


FIGURE 1 – Coupe méridienne de la magnétosphère de la Terre. Le Soleil est loin sur la gauche. Les traits fins symbolisent les lignes de champ magnétique, les flèches jaunes le mouvement du plasma.

(La magnétosphère terrestre (suite))

L'avant de la magnétosphère se caractérise par une première frontière nette, le choc. Ce choc est dû au fait que le vent solaire a une vitesse d'ensemble supérieure à toutes les vitesses possibles de propagation des ondes dans le milieu. Derrière le choc se trouve la magnétogaine, région où le plasma du vent solaire est ralenti, chauffé et où l'on observe une turbulence importante. Le champ magnétique est encore celui du vent solaire un peu modifié par la traversée du choc. Cette région intermédiaire est suivie d'une autre frontière nette, la magnétopause. Cette frontière sépare la zone d'influence du champ magnétique terrestre de celle du vent solaire. Cette frontière est une discontinuité mince comme un choc mais ce n'est pas un choc, c'est une frontière qui isole vraiment les deux milieux, l'énorme majorité des particules du vent solaire restant à l'extérieur. On constate donc que ce qui fait obstacle au vent solaire ce n'est pas la planète elle-même, ni son atmosphère, mais son champ magnétique. Le contournement du vent solaire donne à la magnétosphère sa forme caractéristique, avec une queue allongée dans la direction opposée au Soleil et deux immenses *lobes* presque totalement vides. L'ionosphère est une région importante dans la dynamique de la magnétosphère (bien qu'invisible à l'échelle de la figure). Elle résulte de l'ionisation des couches supérieures de l'atmosphère par le rayonnement UV du Soleil qui la rend conductrice, et lui fait jouer un rôle dans la fermeture des courants magnétosphériques.

La magnétosphère et son intense activité électromagnétique ne sont pas visibles du sol sauf dans les régions polaires où elles peuvent se manifester de façon très spectaculaire. Le champ magnétique terrestre est à peu près celui d'un dipôle dont l'axe passe dans les régions polaires. Les lignes de champ qui viennent des régions éloignées de la Terre plongent donc dans l'atmosphère dans les régions polaires. Comme dans la magnétosphère le plasma est peu dense, il n'y a pas de collisions et les particules chargées restent liées aux lignes de champ. Quand une reconfiguration magnétique intervient (ce qu'on appelle un sous-orage magnétique), les particules accélérées dans la queue de la magnétosphère arrivent le long du champ sur les couches denses de l'atmosphère et produisent des aurores. Dans le même temps, ces électrons accélérés émettent un rayonnement radio dont la longueur d'onde est de l'ordre du kilomètre et qui s'échappe de la magnétosphère par les pôles.



FIGURE 2 – Aurore boréale vue du sol sur la Terre. La Lune, visible à côté de l'aurore, donne une idée de la luminosité.

III – Aurores polaires terrestres

Les aurores polaires sont des phénomènes lumineux se produisant entre 80 et 400 km d'altitude causés par la précipitation de particules chargées en provenance de l'espace sur les atomes et les molécules des couches externes de l'atmosphère terrestre. Ces particules sont principalement des électrons dont l'énergie cinétique est de l'ordre du keV pour les aurores les plus spectaculaires.

- Q.1** Expliquer le caractère lumineux d'une aurore polaire.
- Q.2** Pourquoi une aurore boréale (hémisphère nord) apparaît-elle simultanément à une aurore australe (hémisphère sud) ?
- Q.3** Comparer la carte de champ magnétique donnée FIGURE 1 à celle d'un unique dipôle modélisant l'activité magnétique terrestre.

IV – Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Afin d'interpréter l'arrivée des particules chargées à l'origine des aurores polaires, on se propose dans la suite de modéliser la dynamique d'un électron dans une zone de champ magnétique stationnaire.

- Q.4** Dans le référentiel géocentrique (\mathcal{R}) supposé galiléen, on considère tout d'abord un électron de masse m pénétrant en O dans une zone de champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ ($B_0 > 0$). La force gravitationnelle terrestre a-t-elle une influence sur la dynamique de cet électron ? On attend un argument qualitatif fondé sur un calcul d'ordre de grandeur.
- Q.5** On suppose que la vitesse initiale de la particule s'écrit $\vec{v}_0 = v_{0z} \vec{u}_z$ ($v_{0z} > 0$). Comment se déplace l'électron vis à vis des lignes de champ magnétique ?
- Q.6** On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x$ ($v_{0x} > 0$).
- Mettre en évidence une pulsation ω_c caractéristique du mouvement de l'électron et l'évaluer dans le champ magnétique terrestre régnant à l'altitude d'un satellite géostationnaire.
 - Montrer que la trajectoire de l'électron est circulaire en établissant son équation cartésienne. Évaluer son rayon R_c .

Un électron accéléré non relativiste perd de l'énergie en rayonnant à un instant donné une puissance électromagnétique : $\mathcal{P} = \frac{2}{12\pi\epsilon_0} e^2 c^3 \left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|^2$.

- Q.7** Déterminer les valeurs α et β .
- Q.8** Après avoir exprimé la variation de l'énergie cinétique de l'électron dE lorsque R_c varie de dR_c , établir l'expression de la fonction $R_c(t)$. Montrer alors que le temps caractéristique τ mis en évidence s'écrit $\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3}$. Conclure.
- Q.9** On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0z} \vec{u}_z$ ($v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$). Comment se déplace l'électron vis à vis des lignes de champ magnétique ?

V – Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et non uniforme

On se limite ici au cas d'un champ magnétique stationnaire $\vec{B} = B_z(r, z) \vec{u}_z + B_r(r, z) \vec{u}_r$ possédant une géométrie cylindrique autour d'une ligne de champ confondue avec l'axe (Oz).

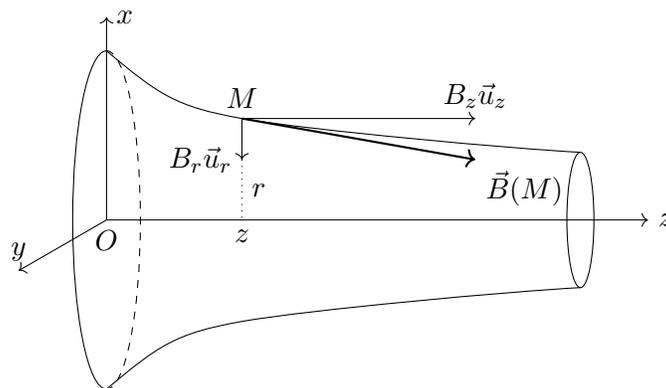


FIGURE 3

On note L l'échelle caractéristique de variation de ce champ magnétique selon l'axe Oz . On supposera en première approximation que B_z ne dépend que de z : $B_z(z)$. Initialement, l'électron est animé d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$ ($v_{0x} > 0$, $v_{0z} > 0$) et se situe au point de coordonnées cartésiennes $(0, -R_c(0), 0)$.

Q.10 Montrer qu'une propriété structurelle du champ magnétique impose : $B_r(r, z) \simeq -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$.

Q.11 À quelle condition sur L , la composante radiale $B_r(r, z)$ du champ magnétique pourra-t-elle être traitée comme une perturbation de la composante axiale B_z ?

Dans la suite, on supposera cette condition vérifiée.

Q.12 Justifier qualitativement l'existence d'un rayon caractéristique $R(z)$, dépendant de z , pour la trajectoire électronique. On donnera l'expression de $R(z)$ en fonction de B_z et de v_θ , composante orthoradiale de la vitesse de l'électron.

Q.13 Associer un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ au mouvement de l'électron et l'exprimer en fonction de $R(z)$ et de la composante du champ magnétique suivant (Oz) . Établir que la relation entre \mathcal{M}_z , composante de $\vec{\mathcal{M}}$ selon \vec{u}_z , et \mathcal{L}_z , moment cinétique de l'électron par rapport à l'axe (Oz) , s'écrit

$$\mathcal{M}_z = -\frac{e}{2m} \mathcal{L}_z$$

Q.14 En supposant que l'on puisse utiliser les résultats relatifs à l'action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique, justifier que \mathcal{M}_z est une constante du mouvement. Comment se déplace l'électron vis à vis des lignes de champ magnétique ?

Q.15 Dans cette question, on suppose un champ axial de la forme $B_z(r, z) \simeq B_0 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right)$.

a) Pourquoi peut-on dire que cette configuration de champ magnétique assure un confinement de l'électron dans un domaine de l'espace situé entre deux limites appelées miroirs magnétiques ?

Le candidat pourra s'appuyer sur la conservation de l'énergie.

b) Exprimer une pulsation caractéristique ω_m associée à ce confinement et en déduire l'ordre de grandeur du temps mis par un électron confiné pour accomplir un aller-retour entre le pôle Nord et le pôle Sud terrestres.

La Terre émet un rayonnement radio au-dessus de ses régions aurorales (cf. document d'introduction).

Q.16 Expliquer les localisations spatiale et spectrale de ce phénomène.

Q.17 Pourquoi a-t-il fallu attendre l'ère spatiale pour observer ce rayonnement ?

VI – Ceintures de Van Allen

La Terre est entourée d'une zone où des particules de haute énergie cinétique, typiquement de quelques 100 MeV au GeV, sont piégées par le champ magnétique. Ces particules sont réparties dans des ceintures autour du plan équatorial dites ceintures de Van Allen ou ceintures de radiation. Ces ceintures sont très stables et contrairement aux autres éléments de la magnétosphère, elles sont peu sensibles aux orages, sous-orages et autres reconfigurations de la magnétosphère. De ce fait, les particules s'en échappent difficilement.

Q.18 Évaluer la vitesse typique d'un électron dans ces ceintures. La dynamique d'un tel électron peut-elle se déduire des résultats précédents ?

Exercice 3 : La ruée vers l'or

Les suspensions de nanoparticules d'or ("or colloïdal") sont connues depuis l'Antiquité pour leur couleur rouge intense. Elles ont été notamment utilisées pour la coloration d'objets en verre. La coloration rouge rubis des vitraux de la cathédrale de Chartres est due à la présence de nanoparticules d'or. L'étude scientifique de ces nanoparticules a débuté avec les travaux de Michaël Faraday au milieu du XIX^e siècle et elles sont à l'heure actuelle l'objet d'un intérêt scientifique intense et présentent plusieurs applications prometteuses.

Ce sujet propose la modélisation et l'étude de la réponse d'une nanoparticule d'or à une excitation électromagnétique. Un ensemble de valeurs numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé.

I – Propriétés optiques de l'or métallique

On souhaite modéliser les propriétés optiques de l'or à l'état métallique à l'aide du modèle de Drüde. Pour ce faire, on considère que le métal est composé d'un ensemble d'ions supposés fixes, qui constituent le réseau cristallin, et d'un gaz d'électrons libres de se déplacer sur des distances très largement supérieures aux distances interatomiques. Chaque électron porte la charge $-e$ et possède une masse notée m_e .

En l'absence d'excitation électromagnétique extérieure, l'état du métal est stationnaire et qualifié d'état de repos. Il est désigné par les grandeurs physiques indicées par 0, indépendantes du temps. Les champs électrique et magnétique au repos, en un point M , sont identiquement nuls : $\vec{E}_0(M) = \vec{0}$ et $\vec{B}_0(M) = \vec{0}$. Les électrons sont animés d'un mouvement d'agitation thermique, mais la vitesse moyenne des électrons qui se situent au voisinage d'un point M est nulle : $\vec{v}_0(M) = \vec{0}$. Au repos, le métal est électriquement neutre à l'échelle locale : le nombre moyen d'électrons par unité de volume est égal au nombre moyen d'ions par unité de volume. On note n_{e0} le nombre moyen d'électrons par unité de volume dans l'état de repos du métal, supposé uniforme.

La propagation d'une onde électromagnétique vient perturber localement l'état de repos du métal. On suppose que cette perturbation est d'amplitude suffisamment faible pour que les différentes grandeurs physiques puissent s'écrire comme la somme de la valeur de cette grandeur au repos, indicée par 0 et d'une valeur perturbée, indicée par le chiffre 1. Ainsi, le champ électrique, le champ magnétique, le champ de vitesse des électrons et le nombre moyen d'électrons libres par unité de volume s'écrivent respectivement comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M, t) &= \vec{E}_0(M) + \vec{E}_1(M, t) = \vec{E}_1(M, t) & \vec{B}(M, t) &= \vec{B}_0(M) + \vec{B}_1(M, t) = \vec{B}_1(M, t) \\ \vec{v}(M, t) &= \vec{v}_0(M) + \vec{v}_1(M, t) = \vec{v}_1(M, t) & n_e(M, t) &= n_{e0} + n_{e1}(M, t)\end{aligned}$$

Les grandeurs $\vec{E}_1(M, t)$, $\vec{B}_1(M, t)$, $\vec{v}_1(M, t)$ et $n_{e1}(M, t)$ sont associées à la propagation de l'onde électromagnétique dans le milieu. Leurs amplitudes respectives sont supposées suffisamment faibles pour qu'on se limite à un traitement linéaire : tous les calculs se limiteront à des termes qui s'expriment au premier ordre vis-à-vis des amplitudes indicées par le chiffre 1. Ci-dessous est présenté un exemple de linéarisation au premier ordre du produit de deux grandeurs $a(M, t)b(M, t)$ où le terme du second ordre est finalement négligé :

$$\begin{aligned}a(M, t)b(M, t) &= \left(a_0 + a_1(M, t)\right) \left(b_0 + b_1(M, t)\right) \\ &= \underbrace{a_0 b_0}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{a_0 b_1(M, t) + b_0 a_1(M, t)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{a_1(M, t) b_1(M, t)}_{\text{ordre 2 négligeable}} \\ &\simeq a_0 b_0 + a_0 b_1(M, t) + b_0 a_1(M, t)\end{aligned}$$

I.A Mouvement des électrons libres

On s'intéresse dans un premier temps au mouvement des électrons libres. Le gaz d'électrons libres est assimilé à un fluide. On note respectivement m_e et $-e$ la masse et la charge électrique d'un électron. On suppose qu'en plus de la force d'interaction avec le champ électromagnétique de l'onde, les électrons sont soumis à une force

dissipative qui modélise leurs interactions avec le réseau cristallin : $-\frac{m_e}{\tau}\vec{v}_1(M, t)$. Le mouvement des électrons est supposé non relativiste ($\|\vec{v}_1\| \ll c$, où c est la célérité de la lumière dans le vide). Dans l'approximation linéaire, l'équation du mouvement des électrons se met sous la forme approchée

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(M, t) = -e\vec{E}_1(M, t) - \frac{m_e}{\tau}\vec{v}_1(M, t) \quad (1)$$

- Q.1** Expliquer pourquoi, compte tenu des hypothèses retenues, la composante magnétique de la force exercée par l'onde électromagnétique sur les électrons n'apparaît pas dans l'équation du mouvement (1).
- Q.2** Exprimer, dans l'approximation linéaire, la densité volumique de courant électrique $\vec{j}_1(M, t)$ dans le métal en fonction, entre autres, de la vitesse moyenne des électrons $\vec{v}_1(M, t)$, puis établir l'équation différentielle liant $\vec{j}_1(M, t)$ et $\vec{E}_1(M, t)$.

I.B Relation de dispersion

On suppose que le métal est soumis à une onde électromagnétique, harmonique de pulsation ω , dont le champ électrique s'écrit en notation complexe : $\vec{E}_1(M, t) = \tilde{E}_1 \exp \left[i \left(\omega t - \underline{n} \frac{\omega}{c} x \right) \right] \vec{e}_y$ où $\underline{n} \in \mathbb{C}$ est appelé *indice complexe* du métal. L'espace est rapporté à la base orthonormée cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- Q.3** Justifier que l'onde électromagnétique considérée peut être qualifiée de plane, progressive, transverse et que son état de polarisation est rectiligne.
- Q.4** Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans le milieu considéré, en faisant intervenir $\vec{E}_1(M, t)$, $\vec{B}_1(M, t)$, $\vec{j}_1(M, t)$ et $n_{e1}(M, t)$.
- Q.5** Montrer que les caractéristiques de l'onde électromagnétique imposent $n_{e1}(M, t) = 0$.
- Q.6** Établir l'équation aux dérivées partielles qui régit l'évolution spatiale et temporelle du champ électrique $\vec{E}_1(M, t)$ dans le métal. On fera apparaître la pulsation plasma définie par la relation $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_{e0}}{m_e \epsilon_0}}$.
- Q.7** Établir que le champ électrique proposé est solution de l'équation aux dérivées partielles précédente à condition que :

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}} \quad (2)$$

- Q.8** Déterminer les expressions des constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2 (qui sont des grandeurs réelles) telles que $\underline{n}^2 = \epsilon_1 - i\epsilon_2$. Exprimer ϵ_1 et ϵ_2 en fonction de ω , ω_p et τ .
- Q.9** En déduire les expressions asymptotiques des constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2 dans la limite où $\omega\tau \gg 1$, et comparer ϵ_1 et ϵ_2 dans cette limite.

La FIGURE 4 représente un ensemble de données expérimentales relatives aux constantes diélectriques de différents métaux. Sur la figure de gauche est représentée l'allure de $-\epsilon_1$ en fonction du carré de la longueur d'onde ($\lambda = 2\pi c/\omega$) et sur la figure de droite, ϵ_2/λ en fonction du carré de la longueur d'onde, dans une certaine gamme de longueurs d'onde.

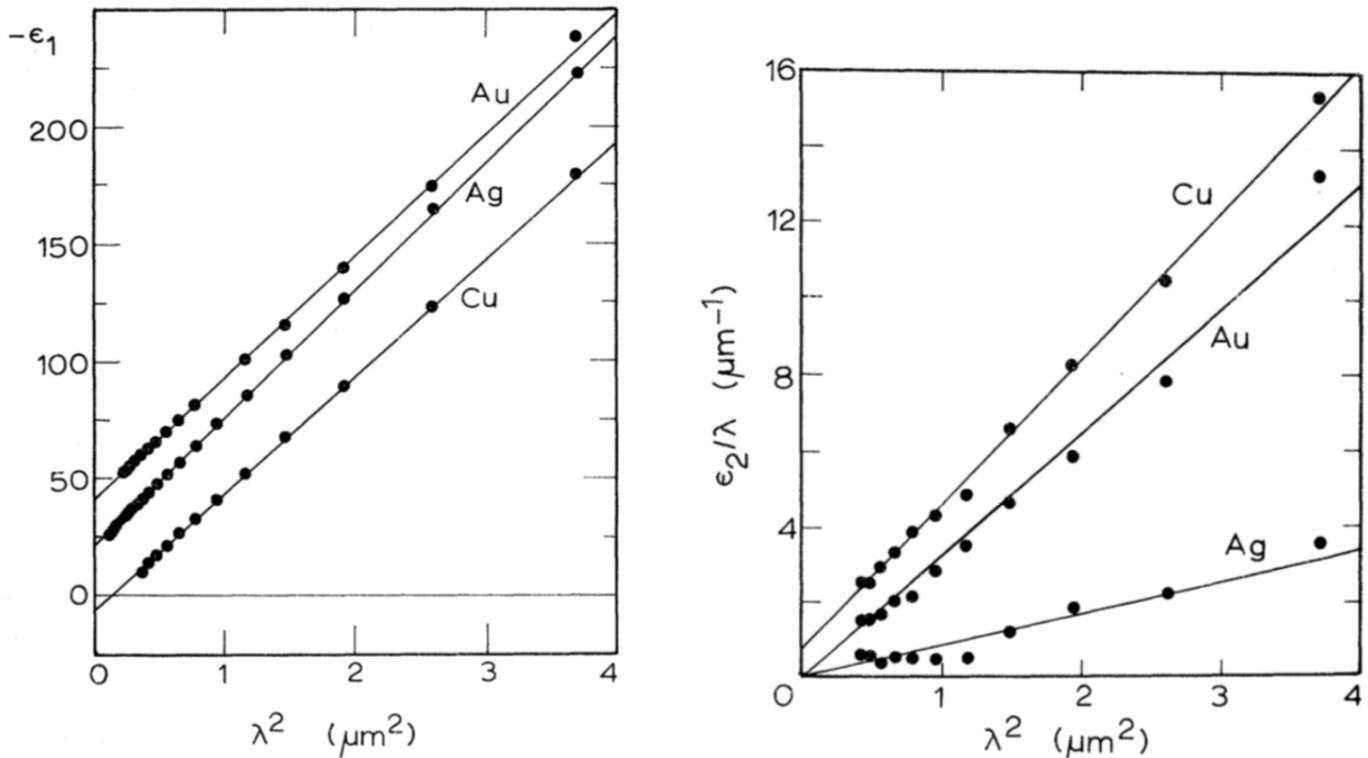


FIGURE 4 – Évolution des constantes diélectriques de différents métaux en fonction de la longueur d'onde ; par souci de lisibilité, l'ordonnée à l'origine des droites représentant $-\epsilon_1$ en fonction de λ^2 pour l'or (Au) et l'argent (Ag) est arbitraire.

Q.10 Exploiter la FIGURE 4 et les résultats théoriques précédents pour déterminer des valeurs numériques approchées du nombre moyen d'électrons libres n_{e0} dans le métal or et de la constante de temps τ . Comparer la valeur de n_{e0} obtenue à celle qu'on peut déduire des données relatives à l'or qui figurent en fin d'énoncé.

II – Résonance plasmon des nanoparticules d'or

Pour interpréter le rappel du nuage des électrons libres et en déduire une expression de la pulsation propre Ω de son mouvement d'oscillation, il faut s'intéresser à la séparation des charges électriques qui résulte du déplacement de ce nuage électronique. La (FIGURE 5) suggère qu'on peut modéliser cette distribution de charges électriques par la superposition de deux boules, de même rayon R , qu'on peut considérer uniformément chargées en volume, l'une correspondant au nuage des électrons libres, l'autre au réseau cristallin des noyaux métalliques, et dont le décalage est donné par le vecteur $\vec{r}(t)$. Ce déplacement reste bien inférieur au rayon R de la nanoparticule.

(Les nanoparticules d'or)

D'après l'article *Synthèse et détermination de la taille de nanoparticules d'or*, par J. Piard et al., *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 107, mars 2013.

Lorsqu'une particule métallique est soumise à un champ électromagnétique dont la longueur d'onde λ est beaucoup plus grande que la taille des particules, tous les électrons libres subissent le même champ et oscillent collectivement et en phase. En effet, lorsque le nuage d'électrons est déplacé par rapport aux noyaux métalliques par interaction avec le champ électrique, il se crée une force de rappel due à l'attraction coulombienne entre noyaux et électrons (FIGURE 5). Lorsque la fréquence de l'onde incidente correspond à la fréquence propre de ces oscillations, il se produit un phénomène de résonance, appelé résonance de plasmon de surface.

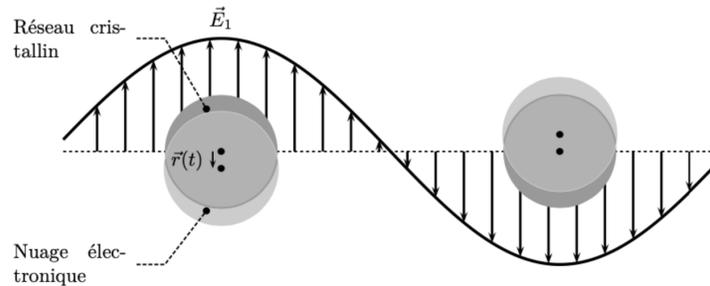


FIGURE 5 – Représentation schématique des oscillations de plasmon pour une nanoparticule sphérique, montrant le déplacement des électrons libres par rapport au réseau cristallin des noyaux métalliques.

La fréquence de résonance plasmon dépend de la nature du métal. Elle a lieu dans le domaine du visible, seulement pour l'or, le cuivre et l'argent, d'où la coloration particulière de ces nanoparticules. Si la particule est sphérique et beaucoup plus petite que la longueur d'onde (rayon inférieur à quelques dizaines de nanomètres) alors la position de la résonance plasmon est indépendante de la taille de la particule [...]. Elle dépend alors des propriétés du métal et du milieu environnant. Ainsi, des nanoparticules d'or de 20 nm ont une bande de résonance plasmon vers 520–530 nm (absorption dans le vert) et sont rouges. L'or sous forme de nanoparticules perd donc sa couleur dorée si caractéristique.

Q.11 Déterminer une expression du champ électrostatique à l'intérieur de la nanoparticule, qui résulte du déplacement du nuage électronique par rapport au réseau cristallin. Commenter le résultat obtenu.

On considère une nanoparticule d'or sphérique, de rayon R , placée dans le vide. En première approche, on assimile son nuage électronique à un oscillateur de masse égale à $\frac{4}{3}\pi R^3 n_{e0} m_e$ excité par le champ électrique d'une onde électromagnétique incidente. On note $\vec{E}_1(0, t)$ le champ électrique de cette onde au centre O de la nanoparticule, à l'instant t . On admet que ce centre se confond avec le centre du réseau cristallin, considéré comme fixe dans le référentiel d'étude. On suppose également que le champ électrique est uniforme à l'échelle de la nanoparticule.

Q.12 Justifier que l'équation différentielle vérifiée par le vecteur déplacement $\vec{r}(t)$ du nuage électronique par rapport au centre O de la nanoparticule s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} + \Omega^2 \vec{r}(t) = -\frac{e}{m_e} \vec{E}_1(O, t)$$

en exprimant Ω en fonction de ω_p .

On se place désormais en régime sinusoïdal forcé où $\vec{E}_1(O, t) = \vec{E}_1 \cos(\omega t - \varphi)$ avec φ une constante.

- Q.13** Déterminer l'expression de la représentation complexe du déplacement \vec{r} en régime sinusoïdal forcé en fonction, entre autres, de \vec{E}_1 , représentation complexe du champ électrique de l'onde incidente.
- Q.14** En déduire l'expression du moment dipolaire électrique \vec{p} de la nanoparticule en fonction de \vec{E}_1 sous la forme $\vec{p} = \varepsilon_0 \underline{\alpha}(\omega) \vec{E}_1$.
- Q.15** Expliciter la polarisabilité complexe $\underline{\alpha}(\omega)$ en fonction de ω , Ω , ω_p et R . Préciser la dimension du module $|\underline{\alpha}(\omega)|$ de cette polarisabilité complexe.

La polarisabilité complexe de la nanoparticule traduit sa réponse à une excitation électromagnétique sinusoïdale extérieure.

- Q.16** Étudier et interpréter qualitativement le comportement de $|\underline{\alpha}(\omega)|$ en fonction de la pulsation ω . Indiquer quelle modification principale entraîne la prise en compte d'effets dissipatifs dans le mouvement du nuage électronique.

Un modèle plus précis, tenant à la fois compte du caractère dissipatif du mouvement du nuage électronique et de l'indice optique n_0 du milieu transparent dans lequel se trouve la nanoparticule d'or, conduit à l'expression suivante de la polarisabilité complexe :

$$\underline{\alpha}(\omega) = 4\pi R^3 \frac{\underline{n}^2 - n_0^2}{\underline{n}^2 + 2n_0^2} \quad (3)$$

où \underline{n} est l'indice complexe de l'or, donné par la relation (2). On montre aussi que la puissance électromagnétique absorbée par une nanoparticule d'or est proportionnelle à la valeur absolue de la partie imaginaire de sa polarisabilité complexe $\underline{\alpha}(\omega)$.

- Q.17** Vérifier que la relation (3) est compatible avec l'expression, déterminée à la Q.14, de la polarisabilité complexe d'une nanoparticule placée dans le vide lorsqu'on néglige les phénomènes dissipatifs ($\omega\tau \gg 1$).
- Q.18** Calculer la valeur de la longueur d'onde principalement absorbée par des nanoparticules d'or présentes dans le verre d'un vitrail ($n_0 = 1,5$). Conclure quant à la couleur par transmission des vitraux de la cathédrale de Chartres mentionnés dans l'introduction du sujet.

• • • FIN • • •

Données

Constantes physiques

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Masse de l'électron	$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$
Vitesse angulaire de rotation propre de la Terre	$\Omega_T = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Rayon de l'orbite géostationnaire	$R_g = 4,22 \times 10^4 \text{ km}$
Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Ordre de grandeur du champ magnétique à la surface de la Terre	$B_T \approx 5 \times 10^{-5} \text{ T}$

Données relatives à l'or :

Type de réseau cristallin	cubique à faces centrées
Rayon atomique	135 pm
Configuration électronique à l'état fondamental	$[\text{Xe}] (6s)^1 (4f)^{14} (5d)^{10}$

Formulaire :

Impulsion d'une particule relativiste : $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Énergie cinétique d'une particule relativiste : $E_c = mc^2(\gamma - 1)$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Champ créé au point M par un dipôle de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ placé en O :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(3 \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \vec{\mathcal{M}} \right) \quad \text{avec} \quad \vec{r} = O\vec{M}$$

Couple subi par un dipôle de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ dans un champ magnétique extérieur \vec{B} :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Opérateur divergence en coordonnées cylindriques au point $M(r, \theta, z)$:

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$