CCP MP2 2004

Préliminaires

1. $M = (a_{ij})$ et $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$

$$MX = {}^t(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n)$$

d'où $\|MX\|_\infty = \max(|a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n|, \dots, |a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n|)$

or $\forall i$ $|a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n| \leq |a_{i,1}||x_1| + \dots + |a_{i,n}||x_n|$

$$\leq \frac{1}{n}\|M\|\,\|X\|_\infty + \dots + \frac{1}{n}\|M\|\,\|X\|_\infty = \|M\|\,\|X\|_\infty$$

donc $\boxed{\|MX\|_\infty \leq \|M\|\,\|X\|_\infty}$

2. a). On a $\mathcal{N}(M) = \|X\|_\infty$ avec $\begin{cases} M = \sum_{k=1}^{d} x_k B_k \\ X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

d'où $\mathcal{N}(M) = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow M = 0$

$$\mathcal{N}(\lambda M) = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda|\,\|X\|_\infty = |\lambda|\,\mathcal{N}(M)$$

$\mathcal{N}(M+N) = \|X+Y\|_\infty$ avec $N = \sum y_k B_k$ et $Y = \dots$

$$\leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty \leq \mathcal{N}(M) + \mathcal{N}(N)$$

d $\boxed{\mathcal{N} \text{ norme sur } \mathcal{M}}$

b) $\|\|$ induit une norme sur $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \|\| : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \|n\| \end{aligned}$$

comme $\mathcal{M}$ est de dimension finie, $\|\|$ et $\mathcal{N}$ sont équivalents : $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0 \setminus \|\| \leqslant \alpha \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \leqslant \beta \|\|$ donc $\begin{cases} a = 1/\alpha \\ b = \beta \end{cases}$

$$\boxed{\exists a > 0, \exists b > 0 \setminus \forall n \in \mathcal{M} \quad a\|n\| \leqslant \mathcal{N}(n) \leqslant b\|n\|}$$

c) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1, d]\!] \quad |x_p(k)| \leqslant \mathcal{N}(n_p) \leqslant \sum_{i=1}^{d} |n_p(i)|$

$\Rightarrow]$ si $(n_p) \longrightarrow 0$ alors $0 \leqslant |n_p(k)| \leqslant \mathcal{N}(n_p) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$

par th. d'encadrement : $\boxed{\lim_{p \to \infty} n_p(k) = 0, \forall k \in [\![1, d]\!]}$

$\Leftarrow]$ $0 \leqslant \mathcal{N}(n_p) \leqslant \sum_{i=1}^{d} |n_p(i)| \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$ (TG : d indépendant de p)

par th. d'encadrement : $\boxed{\lim_{p \to \infty} n_p = 0}$

I

3 a) T.R.I. ! $g(x) = \overbrace{g(d) + g'(d)(x-d) + \dots + \frac{g^{(\ell-1)}(d)}{(\ell-1)!}(x-d)^{\ell-1}}^{\overset{0}{\shortparallel} \text{ par hypothèse}}$

$$+ \boxed{\int_d^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} g^{(\ell)}(u)\, du}$$

b) On "vise" $x - u = (x-\lambda)t$ pour avoir $(x-\lambda)^{\ell-1}$ ③

donc $(1-t)x + t\lambda = u$

Effectuons dans le a) le CdV : $\underline{u = (1-t)x + t\lambda}$

$$\forall x \in I \quad f(x) = \int_1^0 \frac{(x-\lambda)^{\ell-1} t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(\ldots)(-x+\lambda)\, dt = \underline{(x-\lambda)^{\ell} h(x)}$$

Avec $\boxed{h(x) = \int_0^1 \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((1-t)x + t\lambda)\, dt}$

Montrons que h est C^∞ sur I :

posons $g(x,t) = \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((1-t)x + t\lambda)$

* g C^∞ sur $I \times [0,1]$ par T.G. et f C^∞ sur I

donc g et toutes ses dérivées partielles (/. x) sont C^0 /. à t et /. x donc intégrables sur $[0,1]$ /. à t,

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} (1-t)^k f((1-t)x + t\lambda)$$

Soit $[\alpha, \beta] \subset I$, comme f est $C^0 / I \times [0,1]$, elle est bornée sur le compact $[\alpha, \beta] \times [0,1]$, donc $\exists M \in \mathbb{R} \setminus$

$\forall t \in [0,1], \forall x \in [\alpha, \beta], \forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!}(1-t)^k \times M \leqslant 1 . M = \varphi(t)$$

φ est intégrable$/[0,1]$ d'où par théorème

de dérivation, <u>h est C^∞ sur I</u>

d'où : $\boxed{\exists h \in C^\infty_I \setminus \forall x \in I \quad f(x) = (x-\lambda)^\ell h(x)}$

4a) $$f^{(k)}(\lambda) = g^{(k)}(\lambda) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} h^{(k-i)}(\lambda) \Pi_A^{(i)}(\lambda) \quad (*)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ grâce à Leibniz.

D'où si λ est une racine d'ordre m de Π_A,

alors on a : $\Pi_A^{(i)}(\lambda) = 0$, $\forall i \in [\![0, m-1]\!]$ donc

dans $(*)$:

on a ; $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$ $f^{(k)}(\lambda) = g^{(k)}(\lambda) + 0$ (5)

$\underline{d'où}$ $\boxed{f \underset{A}{\equiv} g}$

b) On raisonne par récurrence sur le nombre de racines ;

H_r : $\underline{\text{si}}$ $\forall j \in [\![1, r]\!]$ $\forall k \in [\![0, m_j - 1]\!]$ $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$

$\underline{\text{Alors}}$ $\exists h \in C^\infty_I \mid \forall x \in I$ $(f-g)(x) = \prod_{j=1}^{r} (x-\lambda_j)^{m_j} h(x)$

* On a H_1 grâce au 3 b) avec $\lambda = \lambda_1$ et $f-g$:

$(f-g)(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} h(x)$

* si H_r est vrai et si $\forall j \in [\![1, r+1]\!]$ $\forall k \in [\![0, m_j - 1]\!]$

$f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$, alors d'après H_r :

$\exists h_1 \in C^\infty_I \mid \forall x \in I$ $(f-g)(x) = \prod_{j=1}^{r} (x-\lambda_j)^{m_j} h_1(x)$

de + λ_{r+1} racine d'ordre m_{r+1} de $f-g$ d'où

λ_{r+1} racine d'ordre m_{r+1} de $x \longmapsto \prod_{j=1}^{r} (x-\lambda_j)^{m_j} h_1(x)$

par récurrence et par Leibniz on a ;

λ_{r+1} racine d'ordre m_{r+1} de h_1 d'où toujours le 3 b)

$\exists h_1 \in C^\infty_I \mid \forall x \in I \quad h(x) = (x - \lambda_{r+1})^{m_{r+1}} h_1(x)$ 6

csq $\quad (f-g)(x) = \prod_{j=1}^{r+1} (x-\lambda_j)^{m_j} \, h(x)$

d'où pour $\Pi_A = \prod_{j=1}^{r} (x-\lambda_j)^{m_j}$ on a $\boxed{f = g + h\,\Pi_A}$

5) (1) $\Rightarrow$ (2) si $P \underset{A}{\equiv} Q \quad \exists h \in C^\infty_{\mathbb{R}} \mid P = Q + h\,\Pi_A$

effectuons la division euclidienne de $P-Q$ par Π_A : $\exists (H, R) \in \mathbb{R}[X] \mid P - Q = H\,\Pi_A + R$

d'où $h\,\Pi_A = H\,\Pi_A + R$ et donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_A$:

$h(x) = H(x) + \dfrac{R(x)}{\Pi_A(x)}$. Si $R \neq 0$ alors $\dfrac{R}{\Pi_A}$ est une fraction qui admet au moins un pôle (parmi $\lambda_1, \dots, \lambda_j$). Au voisinage de ce pôle, $\left|\dfrac{R(x)}{\Pi_A(x)}\right|$ tend vers $+\infty$. Or au voisinage de ce pôle λ :

$$h(x) - H(x) \xrightarrow[x \neq \lambda]{x \to \lambda} h(\lambda) - H(\lambda) \in \mathbb{R} \quad (h \; C^\infty/I)$$

Absurde donc $R = 0$ et $P - Q = H\,\Pi_A$ d'où $\underline{P = Q + H\,\Pi_A}$

$(2) \Rightarrow (1)$: c'est le 4 a) avec $h = H \in C^\infty_{\mathbb{R}}$ 7

d'où $\boxed{(1) \Leftrightarrow (2)}$

II

6) * $\varphi(\lambda P + Q) = ((\lambda P + Q)(\lambda_1), (\lambda P + Q)'(\lambda_1), \dots)$

$= (\lambda P(\lambda_1) + Q(\lambda_1), \lambda P'(\lambda_1) + Q'(\lambda_1), \dots)$

$= \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)$

d'où $\underline{\varphi \text{ linéaire}}$

* $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n = n$. Il suffit donc de montrer que φ est injective $\Leftrightarrow \ker \varphi = \{0\}$

* Soit P tel que $\varphi(P) = 0$

donc $P \underset{A}{\equiv} 0$ avec $\Pi_A = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_j}$.

et d'après le 5) $\exists H \in \mathbb{R}[X] \setminus P = 0 + \Pi_A \cdot H$

et $\underbrace{d^\circ P}_{\leq n-1} = \underbrace{d^\circ \Pi_A}_{= n} + d^\circ H$. donc $d^\circ H = d^\circ P - d^\circ \Pi_A$

$= d^\circ P - n$

≤ -1

d'où $d^\circ H = -\infty$ et $H = 0$ donc $P = 0$

d'où $\boxed{\ker \varphi = \{0\} \text{ et } \varphi \text{ bijective}}$

8

7. Analyse : $f \underset{A}{\equiv} P \iff \varphi(f) = \varphi(P)$ en prolongeant φ à C^∞_I d'où

unicité : $f \underset{A}{\equiv} P \in \mathbb{R}_{m-1}(X)$ et $f \underset{A}{\equiv} Q \in \mathbb{R}_{m-1}(X) \Rightarrow P \underset{A}{\equiv} Q \Rightarrow \varphi(P) = \varphi(Q)$

d'où (φ bijectif) : $\underline{P = Q}$

existence : $\exists P \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \setminus \varphi(P) = \left((f^{(k_1)}(\lambda_1))_{\dots}, \dots \right)$

et donc $f \underset{A}{\equiv} P$ d'où $\boxed{\exists ! P_f \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \setminus f \underset{A}{\equiv} P_f}$

$\left[\text{et } P_f = \varphi^{-1}\left((f^{(k)}(\lambda_j))_{k,j} \right) \right]$

B

8. On divise f par Π_A : $\exists (Q, R) \in \mathbb{R}[X] \setminus$

$f = Q\Pi_A + R$ et $d^\circ R \leq m-1$

d'après le 5) $f \underset{A}{\equiv} R$ et comme $d^\circ R \leq m-1$

l'unicité au 7) donne $R = P_f$ d'où

$f(A) = Q(A) \underbrace{\Pi_A(A)}_{=0} + P_f(A)$ donc $\boxed{f(A) = P_f(A) = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k}$

9. Notons χ_A le polyn. caractéristique de A : $\chi_A = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$

Comme $A \neq I_2$ $A - I_2 \neq 0$ et d'après C. H. : (9)

$(A - I_2)^2 = 0$ d'où $\boxed{\Pi_A(X) = (X-1)^2}$

b) (1) $f(A) = aA + bI_2$ d'où $\boxed{f(A) = \begin{pmatrix} 5a+b & -4a \\ 4a & -3a+b \end{pmatrix}}$

(2) calculons $P_f = \alpha X + \beta \in \mathbb{R}_{2-1}[X]$. P_f est défini

par $P_f(1) = f(1) = 0$, et $P_f'(1) = f'(1) = -\pi$ soit $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = -\pi \end{cases}$

d'où $\underline{P_f = -\pi(X-1)}$ et $f(A) = -\pi(A - I_2)$

d'où $\boxed{f(A) = \begin{pmatrix} -4\pi & 4\pi \\ -4\pi & 4\pi \end{pmatrix}}$

(3) $f(1) = f'(1) = 0$, comme $P_f = \alpha X + \beta$, on a $\alpha + \beta = \alpha = 0$

donc $\boxed{f(A) = (0)}$

III

10) Analyse : si $P_f = \sum_j \sum_h f^{(h)}(\lambda_j) Q_{j,h}$, $\forall f \in C^\infty_I$

alors $\varphi(P_f) = \sum_j \sum_h f^{(h)}(\lambda_j) \varphi(Q_{j,h})$

"(j,h)"

il faut et il suffit que $\varphi(Q_{j,h}) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

Synthèse :

Précisons Posons $\underline{Q_{j,k} = \varphi^{-1}((0,0,\dots,0,\dots,1,0\dots))}$ (10)

où le 1 est à la $\underline{m_1+m_2+\dots+m_j+k\text{-ième place}}$

On a donc $\varphi\left(\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}\right) = (f(\lambda_1), f'(\lambda_1), \dots, f^{(m_r-1)}(\lambda_r))$

$= \varphi(P_f)$

d'où $\left[\begin{array}{l} \underline{P_f = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}} \\ \forall f \in C^\infty_I \end{array}\right.$ d'où l'existence des $Q_{j,k}$

unicité : soit $(R_{j,k})$ telle que $\forall f \in C^\infty_I$ $P_f = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) R_{j,k}$

pour $f_0 = Q_{j_0,k_0}$ on a $P_f = 0 + 1.R_{j_0,k_0}$

et comme $d^\circ Q_{j_0,k_0} \leq m-1$ $P_{f_0} = Q_{j_0,k_0}$ (voir le 8.) d'où

$R_{j_0,k_0} = Q_{j_0,k_0}$ d'où l'unicité.

cl $\boxed{\exists!\,(Q_{j,k}) \setminus \forall f \in C^\infty_I \quad P_f = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}}$

11. $\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} z_{j,k} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} Q_{j,k}(A) = 0$

$\Rightarrow P(A) = 0$ avec $P = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} Q_{j,k}$

donc Π_A divise P : $\exists Q \in \mathbb{R}[X] \mid P = Q\Pi_A$ (11)

Or $d^\circ P \leq \max(d^\circ Q_{j,h}) \leq m-1$ $\left(Q_{j,h} = \varphi^{-1}(\dots) \in \mathbb{R}_{m-1}[X]\right)$

donc c. $d^\circ \Pi_A = m$ on a $Q = 0$ d'où $P = \sum\sum \alpha_{j,h} Q_{j,h} = 0$

Or les $(Q_{j,h})_{j,h}$ sont libres comme famille image de la base canonique de $\mathbb{R}^{m-1}$ par φ^{-1} qui est bijective d'où $\forall j,h : \alpha_{j,h} = 0$

$\underline{cl}$ $\boxed{(Z_{j,h})_{j,h} \text{ sont libres}}$

et $\boxed{\forall f \in C^\infty_I \quad f(A) = P_f(A) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=0}^{m_j-1} f^{(h)}(\lambda_j) Z_{j,h}}$

B 12) a) Ici $r = 1$, $\lambda_1 = 1$ et $m_1 = 2$. D'où en posant $\boxed{Z_1 = Z_{1,0}}$ et $\boxed{Z_2 = Z_{1,1}}$ on a :

$$\boxed{\forall f \in C^\infty_I \quad f(A) = f(1) Z_1 + f'(1) Z_2}$$

b) On utilise le 9 b)

* $f(x) = 1$: $f(A) = I_2 = Z_1$
* $f(x) = x - 1$: $f(A) = A - I_2 = Z_2$

d' $\boxed{Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Z_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}}$

c) * $A^{2016} = f(1) Z_1 + f'(1) Z_2$ avec $f(x) = x^{2016}$

$= Z_1 + 2016\, Z_2$ d' $\boxed{A^{2016} = \begin{pmatrix} 8065 & -8064 \\ 8064 & -8063 \end{pmatrix}}$

* $\sqrt{A} = Z_1 + \frac{1}{2} Z_2$ d' $\boxed{\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$

* $A^\alpha = Z_1 + \alpha Z_2$ d' $\boxed{A^\alpha = \begin{pmatrix} 1+4\alpha & -4\alpha \\ 4\alpha & 1-4\alpha \end{pmatrix}}$

13. a) $\chi_A = -\begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ 2 & -2-X & 1 \\ 1 & -1 & -X \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2}{=} -\begin{vmatrix} -X & -1 & 1 \\ -X & -2-X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} = +X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2-X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix}$

$= +X \begin{vmatrix} 0 & 1+X & 0 \\ 1 & -2-X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} 1+X & 0 \\ -1 & -X \end{vmatrix}$

$= X^2(1+X)$

cherchons E_0 : $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & L_1 - L_3 \\ x = y \end{cases}$

d'où $E_0 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ d'où $\dim E_0 \neq 2$ et donc

A non diagonalisable. D'autre part $\Pi_A \mid X^2(1+X)$ (C-H) d'où $\Pi_A \in \{X, X+1, X(X+1), X^2(X+1)\}$. Les 3 1ers cas sont impossibles sinon par la 3ème caractérisation A serait diagonalisable. On conclut : 13

cl $\boxed{A \text{ non diagonalisable et } \Pi_A = X^2(X+1)}$

b) On fait comme au 12) $r=2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$

$\forall f \in C^\infty_I \quad f(A) = f(0) Z_{1,0} + f'(0) Z_{1,1} + f(-1) Z_{2,0}$

Pour $f(x) = x^2$: $f(A) = A^2 = Z_{2,0}$

$f(x) = x(x+1)$; $f(A) = A^2 + A = f'(0) Z_{1,1} = Z_{1,1}$

$f(x) = (x+1)(ax+b)$. On veut $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

d'où $b = 1$ et $a + b = 0$ soit $f(x) = (x+1)(1-x)$

$f(A) = I_3 - A^2 = Z_{1,0}$

cl $\boxed{Z_{1,0} = I_3 - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; Z_{1,1} = A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; Z_{2,0} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

IV

14. a) On a $P_{\alpha f + g} = \varphi^{-1}\left(\left((\alpha f + g)^{(k)}(\lambda_j)\right)\right)$

$= \alpha \varphi^{-1}\left(\left(f^{(k)}(\lambda_j)\right)\right) + \varphi^{-1}\left(\left(g^{(k)}(\lambda_j)\right)\right)$

car φ^{-1} et $f \mapsto f'$ linéaires d $\boxed{P_{\alpha f} = \alpha P_f \quad \text{et} \quad P_{f+g} = P_f + P_g}$

b) $\forall k, j \quad P_{fg}^{(k)}(\lambda_j) = (fg)^{(k)}(\lambda_j) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(\lambda_j) g^{(k-i)}(\lambda_j)$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P_f^{(i)}(\lambda_j) P_g^{(k-i)}(\lambda_j)$$

$$= (P_f P_g)^{(k)}(\lambda_j)$$

donc $\underline{P_{fg} \underset{A}{\equiv} P_f P_g}$ d'où avec le 5) :

$$\boxed{\exists H \in \mathbb{R}[X] \setminus P_{fg} = P_f P_g + H \Pi_A}$$

15 a) Soient A, B, α :

* $S(\alpha f + g) = (\alpha f + g)(A) = P_{\alpha f + g}(A) = \alpha P_f(A) + P_g(A)$

$$= \alpha f(A) + g(A)$$

* $S(fg) = fg(A) = P_{fg}(A) = P_f(A) P_g(A) + H(A) \cdot \overbrace{\Pi_A(A)}^{0}$

$$= f(A) f(B)$$

* $S(1_{\mathbb{R}}) = 1(A) = I_n$ avec le 8)

d $\boxed{S \text{ morphisme de } \mathbb{R}\text{-algèbres}}$

b) Soit $f \in C^{\infty}_I \setminus S(f) = 0$ donc $P_f(A) = 0$

d'où Π_A divise P_f comme $d^\circ P_f \leq n-1 < d^\circ \Pi_A$ (15)

on a $P_f = 0$ d'où $f \underset{A}{\equiv} 0$ (fct nulle / I)

d'après le 4 b) $\exists h \in C^\infty_I \mid f = h\,\Pi_A$

<u>réciproquement</u> si $f = h\,\Pi_A$ alors $f \underset{A}{\equiv} 0$ d'où

$P_f = 0$ et donc $f(A) = S(f) = 0$

cl $\boxed{\mathrm{Ker}\, S = \{ h\,\Pi_A ,\ h \in C^\infty_I \} \text{ (idéal engendré par } \Pi_A)}$

16 a) $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = (\cos A)(\cos A) + (\sin A)(\sin A)$

$= S(\cos)\,S(\cos) + S(\sin)\,S(\sin)$

$= S(\cos\cos + \sin\sin)$ S morphisme !

$= S(1) = 1(A) = I_n$ cl $\boxed{(\cos A)^2 + (\sin^2 A)^2 = I_n}$

b) $(\sqrt{A})^2 = S(f_1 \times f_1) = S(id_{\mathbb{R}_+^*}) = X(A) = A$

$\frac{1}{A} \cdot A = S(f_2) \times S(id_{\mathbb{R}_+^*}) = S(1) = I_n$

cl $\boxed{(\sqrt{A})^2 = A \text{ et } \frac{1}{A} = A^{-1} \text{ (inverse de } A)}$

17. $\star$ $\mathcal{M}_A = \mathrm{im}\, S$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$* \ I_n = 1(A) \in \mathcal{M}_A$ (16)

$*$ soit $B = f(A) \in \mathcal{M}_A$ et $C = g(A) \in \mathcal{M}_A$

$BC = fg(A) \in \mathcal{M}_A$ et $CB = gf(A) = fg(A) \ (= S(fg))$
$= BC$

d $\boxed{\mathcal{M}_A \text{ sous-algèbre commutative de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

dimension : Les $Z_{j,h}$ définies au 10. sont dans $\mathcal{M}_A$: $Z_{j,h} = S(Q_{j,h})$

$\forall f \in C^\infty_I \quad f(A) = \sum_j \sum_h f^{(h)}(\lambda_j) Z_{j,h}$ d'où la famille $(Z_{j,h})$ est génératrice de $\mathcal{M}_A$. On a vu au 11) qu'elle est libre.

d $\boxed{\dim \mathcal{M}_A = m \text{ et } (Z_{j,h})_{(1\leq j\leq r,\, 0\leq h\leq m_j-1)} \text{ base de } \mathcal{M}_A}$

18. classique : si $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors son inverse est un polynôme en A' :

posons $\Pi_{A'} = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_s X^s$, $s \geq 1$

$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A' + \dots + \alpha_s A'^s = 0$ comme A' inversible, en multipliant par A'^{-1} : $\alpha_0 A'^{-1} + \alpha_1 I_n + \dots + \alpha_s (A')^{s-1} = 0$

si $\alpha_0 = 0$ alors $Q(A') = 0$ et $Q = \alpha_1 + \alpha_2 X + \dots + \alpha_p X^{p-1}$

et comme $p \geq 1$ et $\Pi_{A'} \neq 0$ on a $Q \neq 0$ qui contredit la minimalité de $\Pi_{A'}$ ($\Pi_{A'} \mid Q$) donc $\alpha_0 \neq 0$

d'où $A'^{-1} = \dfrac{-\alpha_1}{\alpha_0} I_n + \dots + \dfrac{-\alpha_p}{\alpha_0} (A')^{p-1}$

csq si $A' \in \mathcal{M}_A$ et A' inversible on a

$A'^{-1} = \beta_0 I_n + \dots + \beta_{p-1} (A')^{p-1} \in \mathcal{M}_A$ (sous-algèbre)

cl $\boxed{A' \in \mathcal{M}_A \text{ et } A' \text{ inversible} \Rightarrow A'^{-1} \in \mathcal{M}_A}$

19. * (1) $\Rightarrow$ (2) ; soit $f(A) \in \mathcal{M}_A$ inversible vu le 18

$\exists g \in C^\infty_I \mid f(A) g(A) = I_n$ d'où $S(fg - 1) = 0$

soit $fg - 1 \in \operatorname{Ker} S$, donc $\exists h \in C^\infty_I \mid fg - 1 = h \Pi_A$

$\forall j \in [\![1, r]\!]$ $f(\lambda_j) g(\lambda_j) = 1 + 0 = 1 \Rightarrow \underline{f(\lambda_j) \neq 0}$

* (2) $\Rightarrow$ (1) $\forall j \in [\![1, r]\!]$ $f(\lambda_j) \neq 0$

<u>Rappel</u> : si $\Pi_A = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_j}$ alors χ_A scindé ds $\mathbb{R}$:

sinon $\exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ racine de χ_A d'où $\bar{\alpha}$ aussi

supposons $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - pX + q \not\mid \Pi_A$ (ds $\mathbb{R}[X]$)

alors $X^2 - pX + q \wedge \Pi_A = 1$ d'où Bezout : $(X^2 - pX + q)U + V\Pi_A = 1$

$(A^2 - pA + q I_n) U(A) + V(A) \times 0 = I_n$ (18)

d'où $(A - \alpha I_n)(A - \bar{\alpha} I_n) U(A) = I_n$

$\Rightarrow \det(A - \alpha I_n) \neq 0$ Absurde car $\chi_A(\alpha) = 0$

csq A scindé donc trigonalisable ds $\mathbb{R}$

et $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \setminus A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

$$P_g(A) = P \begin{pmatrix} P_g(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & P_g(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & g(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$$

d'où $\det g(A) = g(\lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times g(\lambda_n)^{m_n} \neq 0$

csq $g(A)$ inversible cqfd $\boxed{(1) \Leftrightarrow (2)}$

20. ? $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ & $g(x) = x^2$ $g(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$\left(\Lambda_A = \{2, 3\}\right) \cap \left(\Lambda_{A^2} = \{4, 9\}\right) = \emptyset$

Cependant : si λ_{j_0} vp réel de A

$g(A) - g(\lambda_{j_0}) I_n$ non inversible car $g(\lambda_{j_0}) - g(\lambda_{j_0}) = 0$

d'où $g(\lambda_{j_0})$ vp de $g(A)$ d'où $\underline{g(\Lambda_A) \subset \Lambda_{g(A)}}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $g(x) = x^2 + 1$ $g(A) = (0)$

$\Lambda_A = \emptyset$ donc $g(\Lambda_A) = \emptyset$ or $\Lambda_{g(A)} = \{0\}$

d $\boxed{\forall A \ \forall f \in C^{\infty}_{I} \quad f(\Lambda_A) \subset \Lambda_{f(A)}}$

V

21) c'est le préliminaire et les 10) - 11) :

avec les B_i (du préliminaire) qui sont les $Z_{j,k}$

d'où $f_p(A) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m_j-1} f_p^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$ et

$(f_p(A) - f(A))$ converge vers 0 ssi $\forall j \ \forall k$:

$n_p(j,k) = f_p^{(k)}(\lambda_j) - f^{(k)}(\lambda_j)$ converge vers 0

d $\boxed{(1) \Leftrightarrow (2)}$

22) On utilise le 21 avec $f = f_t$ et $(f_t)_p(x) = \sum_{l=0}^{p} \frac{t^l x^l}{l!}$

posons $a_n = \frac{t^n}{n!}$ le rayon de convergence de la série entière $(\sum a_n x^n)$ vaut $+\infty$ d'où toutes ses séries dérivées convergent simplement sur $\mathbb{R}$ et $\forall k$ $\left((f_t)_p^{(k)}\right)$ converge simplement vers $f_t^{(k)}$ d'où

on a le (2) du 21) donc on a le (1) :

d $$\boxed{f_t(A) = \lim_{p \to \infty} (f_t)_p(A) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} A^l}$$

23. $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On sait par le cours que si $X_0 = X(0)$ la solution du système est $\underline{X(t) = \exp(tA).X_0}$

Grâce au 13 b) on a :

$$\exp(tA) = f(0) Z_{1,0} + f'(0) Z_{1,1} + f(-1) Z_{2,0}$$

avec $f(x) = e^{tx}$; $f(0) = 1$, $f(-1) = e^{-t}$ et $f'(0) = t$

d'où $$\exp(tA) = Z_{1,0} + t Z_{1,1} + e^{-t} Z_{2,0}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+t & -t & t \\ 1+t-e^{-t} & -t+e^{-t} & t \\ 1-e^{-t} & -1+e^{-t} & 1 \end{pmatrix}.$$

et donc si $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} a(1+t) - bt + ct \\ a(1+t-e^{-t}) + b(-t+e^{-t}) + ct \\ a(1-e^{-t}) + b(-1+e^{-t}) + c \end{pmatrix}}$$

Concours Centrale-Supélec 2005

Epreuve : Mathématiques II

Corrigé

Partie I

IA1) $*$ $N_\infty(A) = 0 \Longrightarrow \forall i \in [1,n]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 0$. D'où $\forall i \in [1,n]$, $\forall j \in [1,n]$: $|a_{i,j}| = 0$ et donc $A = 0$.

$*$ $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ $\forall i \in [1,n]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}| \leq |\lambda| N_\infty(A)$, donc $N_\infty(\lambda A) \leq |\lambda| N_\infty(A)$

Si $\lambda \neq 0$, $N_\infty(A) = N_\infty(\dfrac{1}{\lambda}\lambda A) \leq |\dfrac{1}{\lambda}| N_\infty(\lambda A)$, donc $|\lambda| N_\infty(A) \leq N_\infty(\lambda A)$, d'où l'égalité : $|\lambda| N_\infty(A) = N_\infty(\lambda A)$

Si $\lambda = 0$, l'égalité est triviale.

$*$ $\forall i \in [1,n]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leq N_\infty(A) + N_\infty(B)$, donc $N_\infty(A+B) \leq N_\infty(A) + N_\infty(B)$.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{N_\infty \text{ est une norme sur } M_n(\mathbf{C})}$

IA2a) $A(z) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{1,j} z_j|, \ldots, \sum_{j=1}^{n} |a_{n,j} z_j|\right)$

Donc pour tout $i \in [1,n]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \|z\|_\infty \leq N_\infty(A) \|z\|_\infty$.

D'où $\boxed{\|A(z)\|_\infty \leq N_\infty(A)\|z\|_\infty}$.

IA2b) $\forall z \in \mathbf{C}^n - \{0\}$, $\dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq N_\infty(A)$ donc $N_\infty(A)$ majore l'ensemble des réels $\dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}$.
Soit $i_0 \in [1,n]$ tel que $N_\infty(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$ et soit $z_0 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ tel que $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 0$ et $\varepsilon_j = \dfrac{|a_{i_0,j}|}{a_{i_0,j}}$ sinon. On a alors

$N_\infty(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\varepsilon_j$, $A(z_0) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\varepsilon_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\varepsilon_j\right)$ et donc $\|A(z_0)\|_\infty = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

Comme $\|z_0\|_\infty = max(1, \ldots, 1) = 1$, on a donc : $\dfrac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = N_\infty(A)$

<u>Conclusion</u>: $\boxed{N_\infty(A) = \max \dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}}$

IA2c) Soit $\lambda_0 \in \sigma_A$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$ et z_0 un vecteur propre tel que $A(z_0) = \lambda_0 z_0$, on a alors $\dfrac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = \dfrac{\|\lambda_0 z_0\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = |\lambda_0| = \rho(A) \leq N_\infty(A)$.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\rho(A) \leq N_\infty(A)}$.

IA3) N_∞ est une norme subordonnée à la norme $\|_\infty$ sur $\mathbf{C}^n$, c'est donc une norme d'algèbre et vérifie donc : $\boxed{N_\infty(AB) \leq N_\infty(A) N_\infty(B)}$.

Remarque : On peut aussi redémontrer ceci : pour tout z non nul, $\dfrac{\|AB(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq \dfrac{N_\infty(A)\|B(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq N_\infty(A)N_\infty(B)$ et on retrouve $N_\infty(AB) \leq N_\infty(A)N_\infty(B)$.

IA4a) $*$ $N_Q(A) = 0$ implique $Q^{-1}AQ = 0$ ce qui implique que $A = Q0Q^{-1} = 0$

$*$ $N_Q(\lambda A) = N_\infty(Q^{-1}\lambda AQ) = |\lambda| N_Q(A)$

$*$ $N_Q(A+B) = N_\infty(Q^{-1}(A+B)Q) = N_\infty(Q^{-1}AQ + Q^{-1}BQ) \leq N_\infty(Q^{-1}AQ) + N_\infty(Q^{-1}BQ) = N_Q(A) + N_Q(B)$.

On en déduit que N_Q est une norme.

Enfin $N_Q(AB) = N_\infty(Q^{-1}(AB)Q) = N_\infty(Q^{-1}AQQ^{-1}BQ) \leq N_\infty(Q^{-1}AQ)N_\infty(Q^{-1}BQ) = N_Q(A)N_Q(B)$

Conclusion: $\boxed{N_Q \text{ est une norme matricielle}}$.

IA4b) Toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont équivalentes donc il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $N_\infty \leq \alpha N_Q$ et $N_Q \leq \beta N_\infty$, donc pour tout A, $\dfrac{1}{\alpha}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A)$.

Si $\beta \leq \alpha$, on a $\dfrac{1}{\alpha}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A) \leq \alpha N_\infty(A)$ et $C_Q = \alpha$ convient.

Sinon on a $\dfrac{1}{\beta} \leq \dfrac{1}{\alpha}$ et donc $\dfrac{1}{\beta}N_\infty(A) \leq \dfrac{1}{\alpha}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A)$ et $C_Q = \beta$ convient.

IB) On a facilement $D_S^{-1}TD_S = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2}s & t_{1,3}s^2 & \cdots & t_{1,n}s^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-2,n}s^2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n}s \\ 0 & \dots & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$

D'où $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = \max\limits_i(|t_{i,i}| + P_i(|s|))$ où $P_i = \sum\limits_{j=i+1}^{n} |t_{i,j}|s^{j-i}$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui vérifie $P_i(0) = 0$. On en déduit qu'il existe s_0 tel que pour tout $i \in [1,n]$, $|P_i(s_0)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc pout tout $i \in [1,n]$, $|t_{i,i}| + P_i(|s_0|) \leq \rho(T) + \dfrac{\varepsilon}{2}$, car les valeurs propres de T sont les $t_{i,i}$ d'où on conclut :

Conclusion: $\boxed{N_{D_S}(T) \leq \rho(T) + \dfrac{\varepsilon}{2} < \rho(T) + \varepsilon}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ alors A est trigonalisable (car son polynôme caractéristique est scindé) donc il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible Q tel que $A = QTQ^{-1}$. D'autre part il existe $s \in \mathbf{C}^n$ tel que $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$. Or $\rho(T) = \rho(A)$ et $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = N_\infty(D_S^{-1}Q^{-1}AQD_S) = N_{QD_S}(A)$. Posons donc $N_\varepsilon = N_{QD_S}$, on a alors $N_\varepsilon(A) = N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$

Conclusion: $\boxed{N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon}$

IC) $\Longrightarrow$] Soit $\lambda_0 \in \sigma_A$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$ et z_0 un vecteur propre tel que $A(z_0) = \lambda_0 z_0$, on a alors pour tout entier k : $\|A^k(z_0)\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$. D'où $\|\lambda_0^k z_0\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$ et donc $|\lambda_0|^k\|z_0\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$. On en déduit alors $0 \leq |\lambda_0|^k \leq N_\infty(A^k)$. Comme $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} N_\infty(A^k) = 0$ et par théorème d'encadrement on obtient : $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_0|^k = 0$ ce qui n'est possible que Si $|\lambda_0| < 1$, donc que $\rho(A) < 1$.

$\Longleftarrow$] Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \dfrac{1-\rho(A)}{2}$). Posons enfin $q = \rho(A) + \varepsilon$, on a donc $0 < q < 1$. D'après le IB), on a $0 \leq N_\varepsilon(A^k) \leq N_\varepsilon(A)^k \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k = q^k$. On conclut alors par théorème d'encadrement que $\lim\limits_{k\to\infty} N_\varepsilon(A^k) = 0$

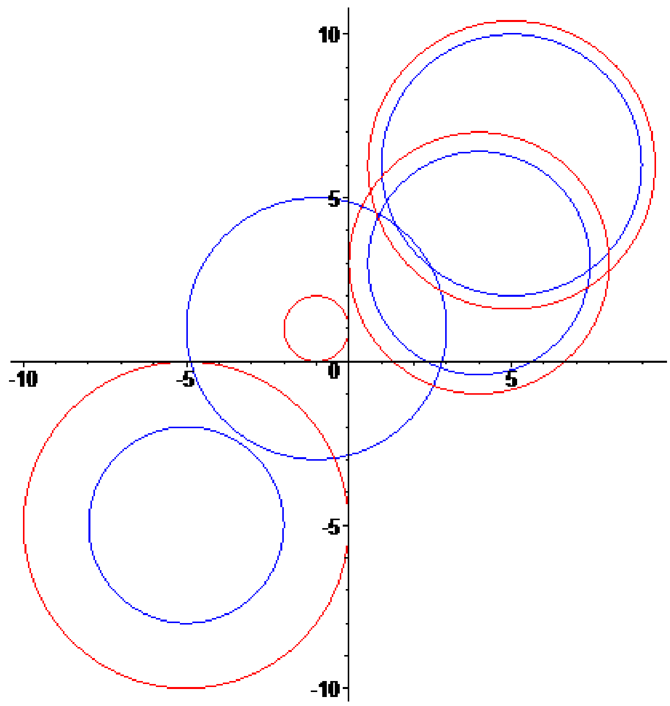
Conclusion: $\boxed{\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0 \Longleftrightarrow \rho(A) < 1}$

Partie II

IIA1) On a $G_L(A) = D(4+3i, 4) \cup D(-1+i, 1) \cup D(5+6i, \sqrt{2}+3) \cup D(-5-5i, 5)$ et

$G_C(A) = D(4+3i, 2+\sqrt{2}) \cup D(-1+i, 4) \cup D(5+6i, 4) \cup D(-5-5i, 3)$

```
> c1:= circle([4,3], 4, color=red):
  c2:= circle([-1,1], 1, color=red):
  c3:= circle([5,6], sqrt(2)+3, color=red):
  c4:= circle([-5,-5], 5, color=red):
  d1:= circle([4,3], 2+sqrt(2), color=blue):
  d2:= circle([-1,1], 4, color=blue):
  d3:= circle([5,6], 4, color=blue):
  d4:= circle([-5,-5], 3, color=blue):
  plots[display](c1,c2,c3,c4,d1,d2,d3,d4);
```



IIA2a) $Z = (z_1, \dots, z_n)$ et on a les relations pour tout $i \in [1, n]$: $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} z_j = 0$, donc $m_{i,i} z_i = - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_{i,j} z_j$, d'où : $|m_{i,i}||z_i| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{i,j}||z_j| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{i,j}| \|Z\|_\infty = L_i \|Z\|_\infty$.

On choisit $i = p$, un indice pour lequel $\|Z\|_\infty = |z_p| \neq 0$, on a donc :

$|m_{p,p}| \|Z\|_\infty \leq L_p \|Z\|_\infty$. D'où : $\boxed{|m_{p,p}| \leq L_p}$

IIA2b) Soit $\lambda \in \sigma_A$, $M = A - \lambda I_n$ n'est pas inversible donc le système $(A - \lambda I_n)Z = 0$ admet une solution non nulle d'où il existe $p \in [1, n]$ tel que $|m_{p,p}| \leq L_p(M)$ (avec $L_p(M)$: la somme définie au début de II avec une matrice M). Comme $m_{p,p} = a_{p,p} - \lambda$ et que $L_p(M) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{i,j}| = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} (|a_{i,j} - 0|) = L_p(A) = L_p$, on a donc

$|a_{p,p} - \lambda| \leq L_p$ ce qui veut dire $\lambda \in D_p(A) \subset G_L(A)$

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\sigma_A \subset G_L(A)}$

IIA2c) λ est valeur propre de A SSI λ est valeur propre de ${}^tA$, donc $\sigma_A = \sigma_{{}^tA}$. D'autre part les sommes L_i de A correspondent exactement aux sommes C_i de ${}^tA$ et les sommes C_i de A correspondent exactement aux sommes L_i de ${}^tA$. On en déduit $\sigma_A = \sigma_{{}^tA} \subset G_L({}^tA) = G_C(A)$, on conclut avec le IIA2b) :

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\sigma_A \subset G_L(A) \cap G_C(A)}$

IIA3a) On a montré au IIA2a) et b) que si μ est valeur propre de A, x un vecteur propre associé et si $|x_k| = \|x\|_\infty$ alors $|a_{k,k} - \mu| \leq L_k$, comme μ est sur le bord de $G_L(A)$, on a pour tout i et donc pour k : $|a_{k,k} - \mu| \geq L_k$. On en déduit que $|a_{k,k} - \mu| = L_k$ ce qui veut dire que : $\boxed{\mu \in C_k(A)}$.

IIA3b) De $Ax = \mu x$ on égalise les k-ièmes coordonnées (avec les notations du IIA3a)) : $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j = \mu x_k$, donc

$(\mu - a_{k,k}) x_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{k,j} x_j$, donc $|\mu - a_{k,k}||x_k| = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{k,j} x_j$, or $|\mu - a_{k,k}| = L_k$ (d'après le IIA3a)), donc

$L_k |x_k| = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{k,j}||x_k| \leq \left| \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{k,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{k,j}||x_j|$, on en déduit donc que

$\sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{k,j}| (|x_j| - |x_k|) \leq 0$. Or pour tout i, j, on a $a_{i,j} \neq 0$, donc $|a_{i,j}| > 0$ et d'autre part, $|x_j| - |x_k| \leq 0$ pour tout j. On doit donc avoir $|x_j| - |x_k| = 0$ pour tout j. Donc $|x_j| = \|x\|_\infty$ et grâce au IIA3a), on obtient $\mu \in C_j(A)$ pour tout j.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\mu \in \bigcap_{j=1}^{n} C_j(A)}$

IIA4) Comme le précise l'énoncé, on notera $D = D_p$ (la matrice).

On trouve alors $D^{-1}AD = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{p_2}{p_1}a_{1,2} & \frac{p_3}{p_1}a_{1,3} & \dots & \frac{p_n}{p_1}a_{1,n} \\ \frac{p_1}{p_2}a_{2,1} & a_{2,2} & \frac{p_3}{p_2}a_{2,3} & \dots & \frac{p_n}{p_2}a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{p_1}{p_n}a_{n,1} & \frac{p_2}{p_n}a_{n,2} & \dots & \frac{p_{n-1}}{p_n}a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$

On en déduit que pour tout $i \in [1, n]$, $L_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|\frac{p_j}{p_i}$ et donc

$D_i(D^{-1}AD) = \left\{ z \in \mathbf{C} \text{ , } |z - a_{i,i}| \leq L_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|\frac{p_j}{p_i} \right\}$ et $G_L(D^{-1}AD) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i(D^{-1}AD)$.

IIA5a) Soit $\lambda_0 \in \sigma_A$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$, λ_0 est valeur propre de A donc λ_0 est aussi valeur propre de $D_p^{-1}AD_p$ (même polynôme caractéristique) et donc d'après IIA2) il existe i tel que $|\lambda_0 - a_{i,i}| \leq L_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|\frac{p_j}{p_i}$, donc $|\lambda_0| \leq |a_{i,i}| + L_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\frac{p_j}{p_i} = \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{i,j}|$, donc $\rho(A) = |\lambda_0| \leq \displaystyle\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{i,j}| \leq \max_{i=1,..,n} \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{i,j}|$ et ceci pour tout $p > 0$, donc $\rho(A)$ est un minorant des $\displaystyle\max_{i=1,..,n} \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{i,j}|$, $p > 0$. Par définition de la borne inf on conclut :

Conclusion: $\boxed{\rho(A) \leq \inf_{p>0} \displaystyle\max_{i=1,..,n} \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{i,j}|}$

IIA5bi) Montrer que le majorant de $\rho(A)$ de la question précédente est supérieur ou égal à 83/3 revient à montrer que pour tout $p > 0$, $\displaystyle\max_{i=1,..,3} \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{3} p_j|a_{i,j}|$ est supérieur ou égal à 83/3.

Supposons le contraire alors pour $i = 1, 2, 3$, on aurait $\displaystyle\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{3} p_j|a_{i,j}| < \frac{83}{3}$ d'où en sommant les 3 :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{3} p_j|a_{i,j}| < 3\frac{83}{3} = 83.$

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{3} p_j|a_{i,j}| = 19 + 16\frac{p_1}{p_2} + 16\frac{p_2}{p_1} + 8\frac{p_1}{p_3} + 8\frac{p_3}{p_1} + 8\frac{p_2}{p_3} + 8\frac{p_3}{p_2}$.

D'autre part l'étude des variations de $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ donne pour tout $t > 0$, $t + \frac{1}{t} \geq 2$, on en déduit que pour tout $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$: $\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \geq 2$, de même pour les 2 autres. D'où

$19 + 16\frac{p_1}{p_2} + 16\frac{p_2}{p_1} + 8\frac{p_1}{p_3} + 8\frac{p_3}{p_1} + 8\frac{p_2}{p_3} + 8\frac{p_3}{p_2} \geq 19 + 16 \times 2 + 8 \times 2 + 8 \times 2 = 83$ ce qui donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{3} p_j|a_{i,j}| \geq 83$: Absurde.

Conclusion: $\boxed{\text{Le majorant du IIA4a) est supérieur ou égal à } \frac{83}{3}}$

IIA5bii) $P_A(x) = \begin{vmatrix} 7-x & -16 & 8 \\ -16 & 7-x & -8 \\ 8 & -8 & -5-x \end{vmatrix} =_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} \begin{vmatrix} -9-x & -16 & 8 \\ -9-x & 7-x & -8 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix} = (-9-x)\begin{vmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 1 & 7-x & -8 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix}$

$$=_{L_2\leftarrow L_2-L_1} (-9-x)\begin{vmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 0 & 23-x & -16 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix} = (-9-x)(x^2-18x-243) = -(x+9)^2(x-27)$$

On en déduit une valeur approchée (sic !) de $\rho(A)$: $\boxed{\rho(A) = 27,000000}$

IIB1a) Si A n'était pas inversible, 0 serait valeur propre de A et donc il existerait un indice i tel que

$|a_{i,i} - 0| = |a_{i,i}| \leq L_i$ ce qui est absurde et A est <u>inversible</u>.

IIB1b) Si les $a_{i,i}$ sont strictement négatifs alors les disques $D_i(A)$ ont leurs centres sur la demi-droite ouverte $\mathbf{R}_-^*$ et s'il existe $z = a + ib \in D_i(A)$ avec $a \geq 0$, alors $|z - a_{i,i}| = |a - a_{i,i} + ib| \geq |a - a_{i,i}| = a - a_{i,i} \geq -a_{i,i} = |a_{i,i}| > L_i$: absurde car on a supposé que $z \in D_i(A)$ donc que $|a - a_{i,i}| \leq L_i$. On a donc tous les disques $D_i(A)$ qui sont inclus dans le demi-plan $Re(z) < 0$, comme les valeurs propres sont toutes dans un de ces disques, on conclut :

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in \sigma_A \text{ , Re}(\lambda) < 0}$

IIB1c) Une matrice A, symétrique est définie positive SSI ses valeurs propres sont toutes strictement positives. En changeant A en $-A$ à la question précédente, ce qui ne change pas les L_i et les conditions $|a_{i,i}| > L_i$, on a : Si A est SDD et si $\forall i$, $a_{i,i} > 0$ alors les valeurs propres ont toutes une partie réelle strictement positive. Comme A est de surcroit symétrique, les valeurs propres sont toutes réelles et donc strictement positives, ce qui prouve que A est définie positive.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{Une condition suffisante est } \forall i,\ a_{i,i} > 0}$

IIB2) B étant diagonalisable, il existe une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et une matrice inversible P tels que $B = PDP^{-1}$. $\forall E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, posons $E_1 = P^{-1}EP$ de sorte que $E = PE_1P^{-1}$.

$\forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E} = \sigma_{D+E_1}$, il existe $i \in [1, n]$ tel que $|\hat{\lambda} - (\lambda_i + a'_{i,i})| \leq L_i(D + E_1) = L_i(E_1)$ avec $E_1 = (a'_{i,j})$.

Donc $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq |a'_{i,i}| + L_i(E_1) = \sum_{j=1}^{n} |a'_{i,j}| \leq N_\infty(E_1)$.

Or $N_\infty(E_1) = N_\infty(P^{-1}EP) = N_P(E)$ et grâce au IA4b), on a $N_P(E) \leq C_P N_\infty(E)$.

Comme $\lambda_i \in \sigma_B$, en posant $K_\infty(B) = C_P$, on conclut :

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\forall E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\ \forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E},\ \exists \lambda_i \in \sigma_B\ |\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq K_\infty(B) N_\infty(E)}$

Partie III

III A1) Soit $z \in Z_t$, $z^n = -\sum_{j=1}^{n} c_j(t) z^{n-j}$. Si $z \neq 0$ alors en divisant par z^{n-1}, on obtient : $z = -\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j(t)}{z^{j-1}}$ d'où $|z| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|c_j(t)|}{|z^{j-1}|}$. Si $|z| > 1$ alors $|z| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|c_j(t)|}{1}$. Or l'application $t \mapsto \sum_{j=1}^{n} |c_j(t)|$ étant continue sur $[0, 1]$ elle y est bornée : il existe un nombre M tel que pour tout $t \in [0, 1]$,

$\sum_{j=1}^{n} |c_j(t)| \leq M$. On a donc pour tout $z \in Z_t$, $|z| \leq 1$ ou $|z| > 1$ et alors $|z| \leq M$. En posant $R_0 = \max(1, M)$ on conclut :

Conclusion: $\boxed{\forall t \in [0,1]\ Z_t \subset D(0,R)}$

IIIA2) Raisonons par l'absurde : supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0\ \exists t$ tel que $|t - t_0| < \eta$ et $\forall X_t \in Z_t : |X_t - X_0| \geq \varepsilon$.

Pour tout $k > 1$ en jouant avec $\eta = \frac{1}{2^k}$: $\exists t_k$ tel que $|t_k - t_0| < \frac{1}{2^k}$ et $\forall X_t \in Z_{t_k} : |X_t - X_0| \geq \varepsilon$.

Notons $Z_{t_k} = \{X_{i,t_k}\ ,\ i \in [1,n]\}$ (en répétant les racines autant que leur multiplicité) de tel sorte que

$|X_{1,t_k} - X_0| \geq |X_{2,t_k} - X_0| \geq \cdots \geq |X_{n,t_k} - X_0| \geq \varepsilon$.

La suite $(X_{1,t_k}, X_{2,t_k}, \ldots, X_{n,t_k})$ est une suite de $\mathbf{C}^n$ et cette suite est bornée (par R) grâce au IIIA1). Par Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe φ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ strictement croissante tel que $\lim_{k\to\infty} \left(X_{1,t_{\varphi(k)}}, X_{2,t_{\varphi(k)}}, \ldots, X_{n,t_{\varphi(k)}}\right) = (y_1, \ldots, y_n)$.

D'autre part on a $P_{t_{\varphi(k)}}(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - X_{i,t_{\varphi(k)}})$, de la continuité des c_j, on en déduit que pour tout X fixé dans $\mathbf{C}$: $\lim_{k\to\infty} P_{t_{\varphi(k)}}(X) = P_{t_0}(X)$ et $\lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{n}(X - X_{i,t_{\varphi(k)}}) = \prod_{i=1}^{n}(X - y_i)$. Donc $P_{t_0}(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - y_i)$ et donc il existe un i tel que $y_i = X_0$ or ceci est absurde car en passant à la limite lorsque k tend vers $+\infty$ pour $|X_{i,t_k} - X_0| \geq \varepsilon$, on obtient $|y_i - X_0| = 0 \geq \varepsilon$.

Conclusion: $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall t |t - t - 0| < \eta,\ \exists X_t \in Z_t,\ |X_t - X_0| < \varepsilon}$

IIIB1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On essaye $a = 0$ et $b = 1$ de sorte que $D_1(A) = D(0,1)$ puis on détermine facilement c et d pour que les valeurs propres soient 2 et 3 : $d = 5$ et $c = -6$. Conclusion:

$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \text{ convient}}$

IIIB2a) $A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & ta_{i,j} \\ & \ddots & \\ ta_{i,j} & & a_{n,n} \end{pmatrix}$ d'où $L_i(A(t)) = tL_i(A) \leq L_i(A)$ (car $t \in [0,1]$) et donc $D_i(A(t)) \subset D_i(A)$

Conclusion: $\boxed{G_L(A(t)) \subset G_L(A)}$

IIIB2bi) $t = 0 \in E$ car $A(0) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $a_{1,1} \in \sigma_{A(0)} \cap D_1(A)$ d'où $\boxed{E \neq \emptyset}$

IIIB2bii) Soit $t_0 \in E$, $\exists \lambda_{t_0} \in \sigma_{A(t_0)} \cap D_1(A)$. λ_{t_0} est donc racine de $P_{A(t_0)}(X)$ (polynôme caractéristique). On pose alors pour tout t de $[0,1]$, $P_t(X) = (-1)^n P_{A(t)}(X) = X^n + \sum_{j=1}^{n} c_j(t) z^{n-j}$ avec les c_j qui sont continues sur $[0,1]$ car polynômiales en t et $a_{i,j}$. On a $\sigma_{A(t)} = Z_t$. On va utiliser le

IIIA2) :

Pour cela posons $X_0 = \lambda_{t_0} \in D_1(A)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $j \in [2, n]$, $D(X_0, \varepsilon) \cap D_j(A) = \emptyset$ (un tel ε existe car X_0 appartient à $\mathbf{C} - \bigcup_{j=2}^{n} D_j(A)$ qui est ouvert (comme complémentaire d'un fermé)).

Grâce au IIIA2) il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[\cap [0, 1]$: il existe $X_t \in Z_t = \sigma_{A(t)}$ tel que $|X_t - X_0| < \varepsilon$. Or $X_t \in Z_t = \sigma_{A(t)} \subset G_L(A(t)) \subset G_L(A)$, comme $X_t \in D(X_0, \varepsilon)$, on a $X_t \in D_1(A)$ (car il ne peut appartenir aux autres $D_j(A)$). On obtient donc $X_t \in \sigma_{A(t)} \cap D_1(A)$ ce qui veut dire que $t \in E$.

Conclusion: $\boxed{E \text{ est un ouvert relatif de } [0,1]}$

IIIB2biii) Pour tout $k \geq 1$, il existe $\lambda_{t_k} \in \sigma_{A(t_k)} \cap D_1(A)$. Comme $D_1(A)$ est compact, il existe une suite extraite de $(\lambda_{t_k})_k$ qui converge vers un élément μ de $D_1(A)$: $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_{t_{\varphi(k)}} = \mu$.

D'autre part pour tout k (avec les polynômes $P_t(X)$ définis au ii)) : $P_{t_{\varphi(k)}}(\lambda_{t_{\varphi(k)}}) = 0$ d'où lorsque k tend vers l'infini : on a, par théorèmes généraux : $P_a(\mu) = 0$ ce qui donne $\mu \in \sigma_{A(a)} \cap D_1(A)$

Conclusion: $\boxed{a \in E \text{ et } E \text{ est un fermé relatif de } [0,1]}$

IIIB2biv) Avec leur admission, le ii) et le iii) on obtient immédiatement $E = [0, 1]$. On en déduit que $1 \in E$, comme $A(1) = A$, on a donc

Conclusion: $\boxed{\sigma_A \cap D_1(A) \neq \emptyset}$

Remarque : On pouvait le démontrer directement sans leur admission en considérant la borne supérieure de E (comme pour les accroissements finis vectorielles).

IIIB3) Propriétés du spectre ? $D_1(A)$ rencontre $D_3(A)$. Maple donne les 4 valeurs propres :

$-4.749157034 - 5.250443310i, -.7893550582 + .7832578378i, 2.851938082 + 3.581681160i, 5.686574010 + 5.885504312i$