DM 9 : corrigé

Ex 1 Posons $f(t) = \dfrac{1}{t^4+4}$ et $I = \mathbb{R}^+$

* f est continue sur I par T.G.

* en $+\infty$ $f(t) \sim \dfrac{1}{t^4} \geqslant 0$ et comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^4}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, par TC, $\int_0^{+\infty} f$ existe

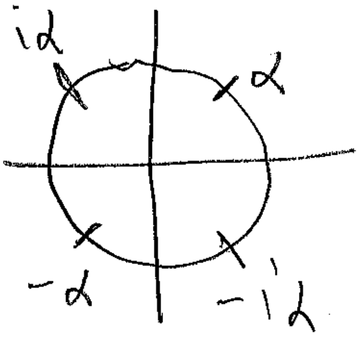
* Décomposons en élt simples $F = \dfrac{1}{X^4+4}$

- Factorisons $P = X^4 + 4$

1ère méthode : recherche des racines de P :

$z^4 + 4 = 0 \iff z^4 = -4 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^4 = (1+i)^4$

Posons $\alpha = 1+i$, les racines de P sont $\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha$



Donc $P = (X-\alpha)(X+i\alpha)(X+\alpha)(X-i\alpha)$

$= (X-(1+i))(X-(1-i))(X-(-1-i))(X-(-1+i))$

$P = (X^2-2X+2)(X^2+2X+2)$

2ème méthode : réarrangement : $X^4+4 = (X^2+2)^2 - 4X^2 = (X^2+2+2X)(X^2+2-2X)$

$$- F = 0 + \frac{aX+b}{X^2-2X+2} + \frac{cX+d}{X^2+2X+2}$$

- avec $F(-X) = F(X)$: $-aX+b = cX+d$ soit

$\underline{c = -a \text{ et } d = b}$

- avec $X = 0$: $\frac{1}{4} = \frac{b}{2} + \frac{d}{2} = b$ soit

$\underline{b = d = \frac{1}{4}}$

- avec $X = 1$: $\frac{1}{5} = \frac{a+1/4}{1} + \frac{-a+1/4}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}a = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{-2}{20} = -\frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{8}$$

cqs $$f(t) = \frac{-t/8 + 1/4}{t^2-2t+2} + \frac{t/8 + 1/4}{t^2+2t+2}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{-2t+4}{t^2-2t+2} + \frac{2t+4}{t^2+2t+2}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{(-2t+2)+2}{t^2-2t+2} + \frac{2t+2+2}{t^2+2t+2}\right]$$

Donc $$\varphi(T) = \int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{16}\left(\left[-\ln(t^2-2t+2)\right]_0^T + 2\int_0^T \frac{dt}{t^2-2t+2} + \left[\ln(t^2+2t+2)\right]_0^T + 2\int_0^T \frac{dt}{t^2+2t+2}\right),$$

Soit $\varphi(T) = \frac{1}{16}\left(\ln\left(\frac{T^2+2T+2}{T^2-2T+2}\right) + \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 2} + 2\int_0^T \frac{dt}{t^2-2t+2} + 2\int_0^T \frac{dt}{t^2+2t+2} \right)$

Comme $\frac{1}{t^2 \pm 2t+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \geq 0$, par $\underset{(\int)}{TC}$ et $\underset{(\ln)}{TG}$, tout

cvg, d'où $J = \int_0^{+\infty} f = \frac{1}{8}\left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-2t+2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+2} \right)$

$$= \frac{1}{8}\left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t-1)^2+1} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^2+1} \right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left[\operatorname{Arctan}(t-1)\right]_0^{+\infty} + \left[\operatorname{Arctan}(t+1)\right]_0^{+\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

d'où $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+4} = \frac{\pi}{8}}$

ex. 2

a) $H(x) = \sqrt{a^2+1}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\sin x\right] + 2$

$\exists \varphi \in \mathbb{R} \setminus \begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$, donc

$H(x) = \sqrt{a^2+1}\cos(x-\varphi) + 2$, d'où

$$H(x) = 0 \iff \sqrt{a^2+1}\cos(x-\varphi) = -2$$
$$\iff \cos(x-\varphi) = \frac{-2}{\sqrt{a^2+1}}$$

Cqs $H(x)=0$ admet des solutions ssi $\left|\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}\right| \leq 1$

Comme $\frac{2}{\sqrt{a^2+1}} \leq 1 \iff a^2+1 \geq 4 \iff a^2 \geq 3 \iff |a| \geq \sqrt{3}$

d'où $\boxed{a\cos x + \sin x = -2 \text{ admet des sol.} \iff |a| \geq \sqrt{3}}$

b) Comme $|\sqrt{2}| < \sqrt{3}$, H ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et donc par TG, $\frac{1}{H}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc F C^∞ sur $\mathbb{R}$

$u = \varphi(t) = \tan\frac{t}{2}$, φ est C^1-bijectif de

$[0, \pi[$ vers $[0, +\infty[$ $\quad \varphi'(t) = \frac{1/2}{1+(t/2)^2} > 0$

D'où le CdV est valide et $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$

et $dt = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2\,du}{\sqrt{2}(1-u^2) + 2u + 2(1+u^2)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\,du}{(2-\sqrt{2})u^2 + 2u + 2 + \sqrt{2}} \qquad \left(\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}(2+\sqrt{2})}{\cancel{2}}\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\,du}{(2-\sqrt{2})u^2 + (2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})u + 2 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{2-\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + (2+\sqrt{2})u + 3 + 2\sqrt{2}} \qquad \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{2}{2-\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\left[u + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]^2 + \underbrace{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}_{= a^2}} \qquad \left(3 + 2\sqrt{2} - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$$

avec $a = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}$

$$= \frac{2}{2-\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{u + 1 + \sqrt{2}/2}{\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{2-\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan} \frac{1+\sqrt{2}/2}{\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}} \right)$$

Or $\dfrac{1+\sqrt{2}/2}{\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}} = \dfrac{1+\sqrt{2}/2}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}/2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

et $\dfrac{2}{2-\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = 2$

d'où $\boxed{I = \dfrac{\pi}{2}}$

exercice 3 (2)

a) Posons $f(x,t) = \cos(x\sin t)$

* Par TG, $f(\cdot,t)$ et $\forall k\geq 1$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\cdot,t) : x \mapsto \sin^k t \cos(x\sin t + \frac{k\pi}{2})$ sont C^0 sur $\mathbb{R}$,

* Par TG, $f(x,\cdot)$ et $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\cdot)$ sont $C^0 / [0,1]$ et donc $f(x,\cdot)$ intégrable $/ [0,\pi]$ (car $[0,1]$ segment).

* $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall t\in[0,\pi]$ $\forall k\geq 1$ $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq 1 = \varphi(t)$

et φ intégrable $/ [0,\pi]$.

d'où : $\boxed{J \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$,

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ $J'(x) = \int_0^\pi -\sin t\sin(x\sin t)\,dt$

$$J''(x) = \int_0^\pi -\sin^2 t\cos(x\sin t)\,dt$$

donc $J''(x) = \int_0^\pi (-1+\cos^2 t)\cos(x\sin t)\,dt$

$$= -J(x) + \int_0^\pi \underbrace{\cos t}_{u} . \underbrace{\cos t\cos(x\sin t)}_{v'}\,dt$$

soit $\underline{x\neq 0}$ effectuons une ipp:

$$= -J(x) + \underbrace{\left[\cos t \, \frac{\sin(x\sin t)}{x}\right]_0^{\pi}}_{=0} + \int_0^{\pi} \sin t \, \frac{\sin(x\sin t)}{x} dt$$

$= -J(x) - \frac{1}{x} J'(x)$ donc J vérifie sur $\mathbb{R}^*$, l'équation : $x y'' + y' + x y = 0$. Comme $0 . J''(0) + J'(0) + 0 = 0$

d'; $\boxed{J \text{ vérifie sur } \mathbb{R}, \; x y'' + y' + x y = 0}$

ex4 a) Posons $f(t) = \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda t}$ et $I =]0, +\infty[$

1er cas $\lambda = 0$, on a fait en classe la semi-cvg de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$
(à refaire le jour J)

Donc F est définie en

2ème cas $\lambda > 0$, fixé

en 0 $f(t) \underset{0}{\sim} 1$ donc P.P.C. en 0 et par TC, f est intégrable sur $]0,1]$.

en $+\infty$ $f(t) = \underset{+\infty}{O}(e^{-\lambda t})$ or $t \mapsto e^{-\lambda t} \geqslant 0$ est int$/_{[0,+\infty[}$ $(\lambda > 0)$

donc par TC f intégrable sur $[1, +\infty[$

cl° $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}^+}$

b) Posons $f(\lambda, t) = \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda t}$, $I =]0, +\infty[$ et $A = \mathbb{R}_+^*$

Montrons que f vérifie le théorème C^1 :

α) $f(\lambda, \cdot)$ $C^0/_{mcx}$ sur I par TG et intégrable sur I avec la question a).

β) $f(\cdot,t)$ est dérivable sur A par TG.

γ) $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,t) = -\sin t \, e^{-\lambda t}$ et donc

$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot,t)$ C^0/A et $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,\cdot)$ $C^0/_{mcx}$ sur I par TG.

δ) HD $\forall \lambda \in [a,b] \subset A$, $\forall t \in]0,+\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,t)\right| \leq e^{-at} = \varphi(t) \quad \text{car } 0 < at \leq \lambda t \leq bt$$

φ C^0 et intégrable sur I (int. de référence)

cqs $\boxed{F \text{ est } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$

De plus $\forall \lambda > 0$ $F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} \sin t \, e^{-\lambda t} dt$

Considérons $\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-\lambda t} dt$, cette intégrale existe

et $F'(\lambda) = -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-\lambda t} dt\right)$

$$= -\operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda}\right]_0^{+\infty}\right)$$

Comme $|e^{(i-\lambda)t}| = e^{-\lambda t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$,

$$F'(\lambda) = -\operatorname{Im}\left(\frac{-1}{i-\lambda}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{-\lambda+i}{\lambda^2+1}\right)$$

d'où $\boxed{\forall \lambda>0 \; : \; F'(\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2+1}}$

c) Vu que $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda t} = 0$, on conjecture que $l=0$,

Utilisons la cvg dominée avec le critère séquentiel ;

Soit (λ_n) suite de $]0,+\infty[\mid \lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Mq $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda_n t}\,dt = 0$

<u>Posons</u> $f_n(t) = \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda_n t}$ et $I =]0,+\infty[$.

α) (f_n) cvg simplement vers θ sur I

β) f_n et θ sont $C^0/_{mcx}$ sur I par TG.

γ) Comme $\lambda_n \to +\infty$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : \lambda_n \geq 1$

Posons $m = \min(\lambda_0, \dots, \lambda_n, 1)$, on a ;

$m>0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n \geq m$ donc

$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t \in I : |f_n(t)| \leq \left|\frac{\sin t}{t}\right| e^{-mt} = \varphi(t)$

et φ C^0 et intégrable grâce à la question a).

Par le th. de C.D. : $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-\lambda_n t}dt=0$

Par critère séquentiel : $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}F(\lambda)=0}$

d) Avec le b), il existe $C\in\mathbb{R}$

$$\forall\lambda>0 ;\ F(\lambda)=C-\text{Arctan}\lambda$$

↑ car $]0,+\infty[$ intervalle

Avec le c) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}F(\lambda)=C-\frac{\pi}{2}=0$

d'où $\boxed{\forall\lambda>0\quad F(\lambda)=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\lambda}$

e) Il vient donc $F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$

Remarque* : Avec $F(\lambda)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(\lambda)$, $u_n(\lambda)=\int_{n\pi}^{n\pi+\pi}\frac{\sin t}{t}e^{-\lambda t}dt$

et le chapitre série de fonction), on montre que

F est $C^0/[0,+\infty[$.