e3a MP2 2018
Un corrigé d'après Monsieur Devulder (UPS)

Partie I

1. Si $a = b$ alors $a_0 = b_0 = a$.
Si $a_n = b_n = a$ alors $a_{n+1} = b_{n+1}$ (en particulier car $\sqrt{a^2} = |a| = a$).
On en déduit par récurrence que

$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont constantes égales à } a}$$

2. Soient $x, y \geqslant 0$. On a $0 \leqslant (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$. On en déduit que

$$\boxed{\forall x, y \geqslant 0,\ \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}}$$

3. Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n, b_n \geqslant 0$. Avec la **question** précédente, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$ ou encore
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant b_n$$
Soit $n \geqslant 1$. On a $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{a_n^2} = a_n$ et $b_{n+1} \leqslant \dfrac{2b_n}{2} = b_n$. Ceci montre que

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ croît et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ décroît}}$$

Comme $a_n \leqslant b_n$ pour $n \geqslant 1$, on a $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$ et les suites sont donc dans l'intervalle $[a_1, b_1]$ à partir du rang 1 et donc bornées (bornée équivaut à bornée à partir d'un certain rang).

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées}}$$

4. Par théorème de limite monotone, les suites sont convergentes à limite ℓ_a et ℓ_b dans $[a_1, b_1]$ et donc strictement positives. En passant à la limite dans la relation de récurrence pour (b_n), on obtient $\ell_a = \ell_b$.

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont convergentes de même limite}}$$

5. Notons (a'_n) et (b'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $a'_0 = b$ et $b'_0 = a$. On a alors $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$. Comme les suites sont récurrentes d'ordre 1, elles sont égale à partir du rang 1 et donc de même limite.
De même, Notons (α_n) et (β'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $\alpha_0 = \lambda a$ et $\beta_0 = \lambda b$. On a alors $\alpha_1 = \lambda a_1$ et $\beta_1 = \lambda b_1$ puis, par récurrence simple, $\alpha_n = \lambda a_n$ et $\beta_n = \lambda b_n$ pour tout n. Finalement,

$$\boxed{M(b, a) = M(a, b) \text{ et } \forall \lambda > 0,\ M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)}$$

6. On utilise ceci avec $\lambda = 1/a > 0$: $\dfrac{1}{a} M(a, b) = M(1, b/a) = f(b/a)$. On a donc

$$\boxed{M(a, b) = a f\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Partie II

7. $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par théorèmes généraux et au voisinage des infinis à $\varphi(t) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$ et donc intégrable sur de tels voisinages. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ par théorème de comparaison. A fortiori,

$$\boxed{I(a, b) \text{ et } J(a, b) \text{ existent}}$$

La fonction ci-dessus étant paire, son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ vaut celle sur $\mathbb{R}^-$ (par exemple en effectuant le changement de variable C^1-bijectif : $x = -t$). Ainsi, par relation de Chasles

$$\boxed{J(a, b) = 2I(a, b)}$$

8. $s \longmapsto \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right)$ qui ne s'annule pas. C'est donc une bonne fonction de changement de variable ($\underline{C^1\text{-bijectif}}$). Posons $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4s^2}(s^2 - ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^2(a+b)^2 + (s^2-ab)^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^4 + (a^2+b^2)s^2 + a^2b^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+a^2)(s^2+b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{ab})^2 + t^2 &= ab + \frac{1}{4s^2}(s^2 - ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+ab)^2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec les conventions d'écriture usuelles

$$dt = \frac{ds}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right) = \frac{ds}{2s^2}(s^2 + ab)$$

On en déduit que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s^2)(b^2+s^2)}} = J(a,b)$$

et donc, avce la **question** précécente

$$\boxed{J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a,b)}$$

9. On prouve ce résultat par récurrence.
   - Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ car $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
   - Hérédité : si le résultat est vrai au rang n alors comme la **question** précédente donne

   $$2I(a_{n+1}, b_{n+1}) = J(a_{n+1}, b_{n+1}) = 2I(a_n, b_n)$$

   le résultat reste vrai au rang $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a,b)}$$

10. On veut passer à la limite ci-dessus et, pour cela, utiliser un théorème d'interversion limite-intégrale. On propose le théorème de convergence dominée.

Posons $\alpha = M(a,b)$ et $f_n \ : \ t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{(a_n^2+t^2)(b_n^2+t^2)}}$.

- La suite (f_n) converge simplement (par T.G. des suites de $\mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2+t^2)(\alpha^2+t^2)}} = \frac{1}{\alpha^2+t^2}$.
- f_n et f sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ par T.G. pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- Comme pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n \geqslant a_1 > 0$ et $b_n \geqslant a_1 > 0$ (partie I) on en déduit que

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f_n(t)| \leqslant \frac{1}{a_1^2 + t^2} = \varphi(t)$$

  φ est continue par T.G. et comme $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \geqslant 0$ intégrable sur $\mathbb{R}$ (et indépendant de n).

Le théorème s'applique et donne

$$\boxed{I(M(a,b), M(a,b)) = I(a,b)}$$

11. On remarque que

$$\forall \alpha > 0,\ I(\alpha,\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\alpha^2} = \left[\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

Ainsi, avec la **question** 10,

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

ou encore

$$\boxed{M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)}}$$

Partie III

12. $s \longmapsto \dfrac{x}{s}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée $s \longmapsto -x/s^2$ ne s'annule pas. C'est donc une bonne fonction de changement de variable (C^1-bijectif). On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} &= \int_{+\infty}^{\sqrt{x}} \frac{(-x/s^2)\ ds}{\sqrt{(1+x^2/s^2)(x^2+x^2/s^2)}}\\ &= \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}\end{aligned}$$

Par relation de Chasles, on a

$$I(1,x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}$$

On conclut ainsi que

$$\boxed{\forall x > 0,\ I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\ dt}$$

13. Remarquons que

$$\forall t \geqslant 0,\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| = \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

• Soit par convexité de $y \longmapsto \sqrt{y}$ (courbe en dessous de la tangente en $y = 1$) on a

$$\forall y \geqslant -1,\ \sqrt{1+y} \leqslant 1 + \frac{y}{2}$$

Ainsi,

$$\forall t \in [0,\sqrt{x}],\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| \leqslant \frac{x}{2\sqrt{x^2+t^2}}$$

ou • $\forall t \in [0,\sqrt{x},\ \left|\dfrac{1-\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\right| = \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}(1+\sqrt{1+t^2})} \leqslant x$

et l'on a ainsi,

$$\forall t \in [0,\sqrt{x}],\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| \leqslant \frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

On intégre cette inégalité entre 0 et $\sqrt{x}$ (aucun problème d'existence) pour obtenir

$$\left|I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\ dt\right| \leqslant 2\int_0^{\sqrt{x}} \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right|\ dt \leqslant 2x\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}dt$$

On en conclut donc que

$$\boxed{I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\ dt \text{ est négligeable devant } 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\ dt \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+}$$

14. La dérivée de $t \longmapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ sur $\mathbb{R}$ est $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Par changement de variable linéaire $s = \dfrac{t}{x}$, on. a

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt = \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \left[\ln(s+\sqrt{1+s^2})\right]_0^{1/\sqrt{x}}$$

et finalement,

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

15. On a

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = -\frac{\ln(x)}{2} + \ln(1+\sqrt{x+1})$$

qui équivaut à $-\ln(x)/2$ quand $x \to 0^+$.
Or, d'après la **question** 13, quand $x \to 0$

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt$$

On en déduit avec la **question** 14 que

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$$

Comme $f(x) = M(1,x) = \dfrac{\pi}{2I(1,x)}$, on a ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}}$$

16. On a (avec la partie I)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(1,\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}M(x,1) = \frac{1}{x}M(1,x) = \frac{1}{x}f(x)$$

Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x} \to 0^+$ et la **question** précédente donne alors

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi x}{2\ln(1/x)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}}$$

17. On sait que

$$\forall x > 0,\ f(x) = M(1,x) = \frac{\pi}{2I(1,x)}$$

On va alors prouver que $F : x \longmapsto I(1,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0,\ t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ par T.G.
- $\forall t > 0,\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ par T.G.
- $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in [a,b],\ \forall t > 0,\ \left|\dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(a^2+t^2)}} = \varphi(t).$

  On a vu en **question** 7 que le majorant φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème évoqué donne $F : x \longmapsto I(1,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\forall x > 0 : F(x) > 0$ (théorème de l'intégrale nulle) on conclut avec T.G.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

18. La **question** 15 donne $f(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$ et donc

$$\boxed{\text{On prolonge } f \text{ par continuité en posant } f(0) = 0}$$

On a aussi par croissances comparées :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2x\ln(x)} \to +\infty$$

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ présente au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale}}$$

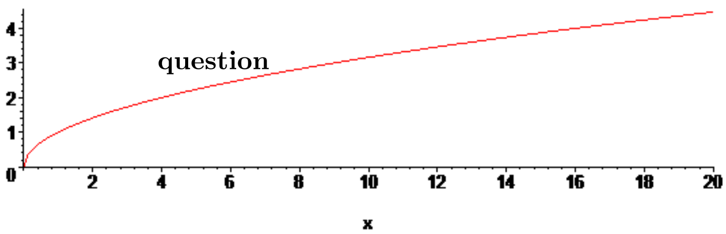
19. Avec la **question** 16,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Au voisinage de $+\infty$, on a ainsi une direction asymptotique horizontale. Comme f est de limite infinie en $+\infty$ (toujours la **question** 16)

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ présente en } +\infty \text{ une branche parabolique horizontale}}$$

20. L'expression de $I(1, x)$ montre que si $0 \leqslant x \leqslant y$, $I(1, x) \geqslant I(1, y) > 0$. $x \longmapsto I(1, x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs > 0.
Ainsi, avec l'expression rappelée en **question** 17, $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$.



Partie IV

21. Avec les **questions** 7 et 8,

$$I(1, x) = I\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)$$

On utilise alors la **question** 5 avec $\lambda = \dfrac{1+x}{2}$:

$$M\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = \frac{1+x}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

On conclut alors avec la **question** 11 (utilisée deux fois) que

$$\boxed{I(1, x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)}$$

22. (a) <u>1ère méthode</u> : On utilise le **I**, si on considère les suite (a_n) et (b_n) du **I** avec $a_0 = 1$ et $b_0 = x$, on a alors $\forall n \geqslant 1$: $a_n > 0$, $b_n > 0$ puis $w_0 = \dfrac{b_0}{a_0}$ et par récurrence $w_n = \dfrac{b_n}{a_n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. On conclut alors avec le **I 4.** que

$$\boxed{(w_n) \text{ converge vers } 1}$$

<u>2ème méthode</u> : On utilise la technique des suites récurrentes :

On a $w_{n+1} = h(w_n)$ avec $h(t) = \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}$. Comme $h(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et $w_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad w_n \text{ existe } \quad et \quad w_n \geqslant 0.$$

h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t > 0,\ h'(t) = \dfrac{1-t}{\sqrt{t}(1+t^2)}$, d'où le tableau de variation :

t	0		1		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Ainsi $h(]0,+\infty[) =]0,1]$ et $h([0,1]) = [0,1]$. $[0,1]$ est donc un intervalle stable par h. On peut donc, quitte à décaler d'un cran la suite, que $x \leqslant 1$.
De plus h est croissante sur $[0,1]$, donc la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et bornée donc convergente.
On a $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$, donc $(w_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 ou 1... ou encore vers un autre point fixe de h.
Étudions le signe de la fonction $\phi(t)$ définie par $\phi(t) = h(t) - t = \dfrac{2\sqrt{t} - t - t^2}{1+t}$.
Posons enfin $g(t) = 2\sqrt{t} - t - t^2$, $g'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} - 1 - 2t$ et $g''(t) = -\dfrac{1}{2t^{3/2}} - 2 < 0$, d'où le tableau de variation :

t	0		α		1
$g''(t)$		$-$	$-$	$-$	
$g'(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2
$g(t)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

On en déduit que $\forall t \in [0,1[\,:\, h(t) \geqslant t$ et donc que $\forall n \geqslant 1 : 0 < w_n \leqslant w_{n+1}$, ce qui assure que

$$\boxed{(w_n) \text{ converge vers } 1}$$

(b) On procède par récurrence.

- Initialisation : la **question** 21 donne $I(1,x) = \dfrac{2}{1+x} I(1,w_1)$, ce qui correspond à la formule pour $n = 0$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai à un rang $n \geqslant 0$. La **question** 21 donne

$$I(1,w_{n+1}) = \frac{2}{1+w_{n+1}} I(1,w_{n+2})$$

Par le résultat au rang n, on déduit celui au rang $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I(1,x) = I(1,w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}}$$

(c) On a vu en **question** 17 que $x \longmapsto I(1,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi,par critère séquentiel, $\lim\limits_{n\to+\infty} I(1,w_{n+1}) = I(1,1) = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que (p_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\pi}{2I(1,x)} \neq 0$$

$$\boxed{\text{En notant } \ell \text{ la limite de } (p_n), \text{ on a } \ell I(1,x) = \frac{\pi}{2}}$$

Partie V

23. Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc $|x\sin(t)| < 1$ et donc $1 - x^2\sin^2(t) > 0$.
Ainsi, $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2\sin^2(t)}}$ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$ et son intégrale sur ce segment existe.

$$\boxed{K \text{ est bien définie sur }]-1,1[}$$

24. $s \longmapsto \arctan(s)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ à dérivée ne s'annulant pas et c'est donc un bon changement de variable (C^1-bijectif). Il donne en posant $\underline{t = \arctan(s)}$, $dt = \dfrac{ds}{\cos^2 s}$ et donc :

$$\begin{aligned} I(1,x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1/\cos^2(s)}{\sqrt{(1+\tan^2(s))(x^2+\tan^2(s))}}\, ds \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{x^2\cos^2(s)+\sin^2(s)}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2(t)+\sin^2(t)}}}$$

25. Comme $\sin^2 = 1-\cos^2$, on a donc

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-(1-x^2)\cos^2(t)}}$$

Le changement affine $u = \pi/2 - t$ donne alors

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2(u)}}$$

Quand $x \in]0,1[$, $1-x^2>0$ et est égal au carré de sa racine carrée et ainsi

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ I(1,x) = K(\sqrt{1-x^2})}$$

26. (a) On a

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)(1-\sin^2(t))\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin^{2n}(t)\cos(t)\, dt$$

$u'(t) = \cos(t)\sin^{2n}(t)$ se primitive en $u(t) = \dfrac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}(t)$ et $v(t) = \cos(t)$ se dérive en $v'(t) = -\sin(t)$. $u, v \in C^1([0,\pi/2])$ et on peut intégrer par parties pour obtenir

$$W_n - W_{n+1} = [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t)\, dt = \frac{1}{2n+1}W_{n+1}$$

On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}W_n}$$

(b) On prouve le résultat par récurrence.

- Initialisation : $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et le résultat est vrai au rang 0.
- Hérédité : on suppose le résultat vrai au rang n. Avec la **question** précédente, et en écrivant $\dfrac{2n+1}{2n+2} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2}$,

$$W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}\pi$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi}$$

27. Le cours nous dit que $g \ : \ t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est DSE de rayon 1. Son développement est alors donné par Taylor :

$$\forall t \in]-1,1[,\ g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

On montre par récurrence que

$$g^{(n)}(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} (1-t)^{-\dfrac{2n+1}{2}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} (1-t)^{-\dfrac{2n+1}{2}}$$

$$\boxed{\forall t \in]-1,1[,\ g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n}$$

28. Il nous suffit alors d'appliquer l'égalité en $(x\sin(t))^2$ (qui est dans $]-1,1[$) :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)}$$

29. A ce niveau, on a

$$\forall x \in]-1,1[,\ K(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)\ dt$$

On veut intervertir les symboles. On va utiliser le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue pour les séries de fonctions. Ici, $x \in]-1,1[$ est fixé.

(a) $u_n \ : \ t \longmapsto \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)$ est le terme général d'une série de fonctions qui converge simplement sur $[0,\pi/2]$ vers $S : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}$.

(b) u_n et S sont continues sur $[0,\pi/2]$ par TG.

(c) $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |u_n(t)| dt \leqslant \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} |x|^{2n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} |x|^{2n} = \alpha_n$

Comme $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} |x|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|^2 < 1$ (car $x \in]-1,1[$) par d'Alembert $(\sum \alpha_n)$ converge et par TC $\left(\sum \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |u_n(t)| dt\right)$ converge.

Le théorème s'applique et donne

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} W_n$$

Il reste à utiliser l'expression de W_n pour conclure que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n (n!)^4} x^{2n}}$$

30. On a

$$M(3,5) = M(5,3) = 5M(1,3/5) = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{I(1,3/5)} = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{K(4/5)}$$

On déduit $M(3,5)$ de $K(4/5)$ dont on a une expression sous forme de somme de série numérique. (ce qui donne $M(3,5) = 3.936235504$ à 10^{-9} près (source Maple) ex 1* Si $n=1$, On a égalité ssi f est de signe constant (par exemple, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $\int_a^b f \geq 0$ et avec $f = f^+ - f^-$, on a $\int_a^b f^- = 0 \Rightarrow f^- = 0 \Rightarrow f = f^+ \geq 0$).

Si $n \geq 2$ et si $\exists \vec{u} \in E$ et si $\exists \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ |

$\forall t \in [a,b] : f(t) = \varphi(t)\vec{u}$, on a alors :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| = \left\| \int_a^b \varphi(t)\,dt \cdot \vec{u} \right\| = \left| \int_a^b \varphi(t)\,dt \right| \|\vec{u}\|$$

$$= \int_a^b |\varphi(t)|\,dt \, \|\vec{u}\| = \int_a^b \|f(t)\|\,dt$$

$(\varphi \geq 0)$

Montrons que la réciproque est vraie

si $f = 0$ oui sinon soit $f \neq 0$ telle que $\|\int_a^b f\| = \int_a^b \|f\|$

Posons $\vec{u} = \dfrac{\int_a^b f}{\|\int_a^b f\|}$

On a $\left(\int_a^b f \mid \vec{u}\right) = \int_a^b (f(t)\mid \vec{u})dt \leqslant \int_a^b \|f(t)\|.\underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1}dt$ ②

$\uparrow$ Cauchy Schwarz

$$\leqslant \int_a^b \|f(t)\|dt = \left\|\int_a^b f(t)dt\right\|$$

Or $\left(\int_a^b f \mid \vec{u}\right) = \left\|\int_a^b f\right\| = \int_a^b \|f\|$, donc

$$\int_a^b (f(t)\mid\vec{u})dt = \int_a^b \|f(t)\|dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{\left[\|f(t)\| - (f(t)\mid\vec{u})\right]}_{\geqslant 0} dt$$

$\Rightarrow \forall t \in [a,b] \quad \|f(t)\| - (f(t)\mid\vec{u}) = 0 \quad (*)$

$\Rightarrow$ ——— $(f(t)\mid\vec{u}) = \|f(t)\|.\|\vec{u}\|$

$\Rightarrow$ ——— $\exists \lambda_t \in \mathbb{R} \mid f(t) = \lambda_t \vec{u}$

et avec $(*)$: $\lambda_t \geqslant 0$

d $\exists \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^+ \mid \forall t \in [a,b] \ f(t) = \varphi(t)\vec{u}$

Ex 2*

Comme f est C^2, φ est C^2 sur $[a,b]$ ①

par TG + $x \mapsto \int_a^x f$ C^3

$\forall x \in [a,b]$ $\varphi'(x) = f(x) - \frac{f'(x)}{2}(x-a) - \frac{f(a)+f(x)}{2}$

$$\varphi''(x) = \cancel{f'(x)} - \frac{f''(x)}{2}(x-a) - \cancel{\frac{f'(x)}{2}} - \cancel{\frac{f'(x)}{2}}$$

D'où $\forall x \in [a,b]$; $\varphi'(x) = \underbrace{\varphi'(a)}_{=0} - \int_a^x \frac{f''(t)}{2}(t-a)\,dt$

donc $|\varphi'(x)| \leq \int_0^x \frac{M_2}{2}(t-a)\,dt = \frac{M_2}{2}\frac{(x-a)^2}{2}$

$(M_2 = \|f''\|_\infty$

donc $|\varphi(x)| = \left|\cancel{\varphi(a)} + \int_a^x \varphi'(t)\,dt\right|$

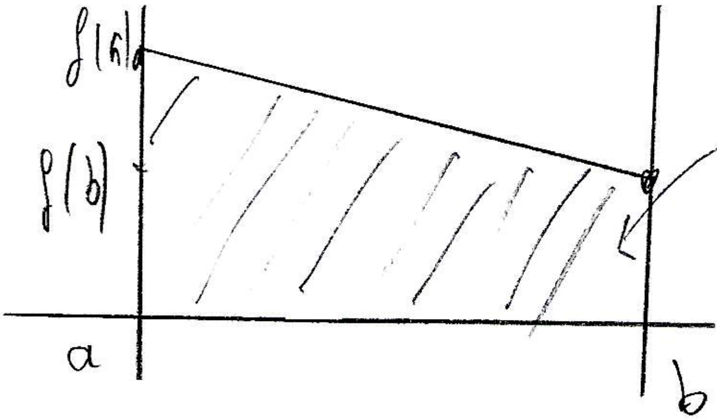
$$\leq \int_a^x \frac{M_2}{4}(t-a)^2\,dt = \frac{M_2}{12}(b-a)^3$$

cqs $\left|\int_a^b f - \overbrace{\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}\right]}^{S_n}(b-a)\right|$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) - \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x-a)\,dx\right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_2}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = \frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

c'est la méthode des trapèzes



aire : $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$

Application $f(t) = e^{-t^2}$ $f'(t) = -2t\,e^{-t^2}$

et $f''(t) = -2e^{-t^2} + 4t^2 e^{-t^2}$

d'où $\forall t \in [0,1]$ $|f''(t)| \leq 6$ et donc

$\left| \int_a^b f - S_n \right| \leq \frac{6}{12n^2} = \frac{1}{2n^2} < 10^{-3}$ ssi $n^2 > 500$

ssi $n > \sqrt{500}$

$\sim 22,3$

cqs $\boxed{S_{23} = 0,746\ldots \simeq \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \text{ à } 10^{-3}}$

Exercice 3* $f=0$ est solution, sinon soit ①

$f \neq 0$ solution. $\exists a \in \mathbb{R} \mid f(a) \neq 0$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{f(a)} \int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{f(a)} \left(F(x+a) - F(x-a) \right)$$

où $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$ $C^1 / \mathbb{R}$ (MPSI)

cqfd par TG, $\underline{f \ C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Dérivons la formule $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f$ $(*_0)$

par rapport à x :

$$\forall y \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad (*_1)$$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1}{f(a)} \left[f(x+a) - f(x-a) \right]$

Comme f est C^1, par TG, f' aussi et donc

f C^2 sur $\mathbb{R}$

(2)

Dérivons $(*_0)$ % y : $f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$ $(*_2)$

On additionne $(*_1)$ et $(*_2)$:

$$f'(x)f(y) + f(x)f'(y) = 2f(x+y) \quad (*_3)$$

En dérivant % x et % y, on trouve :

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$$

d'où $\underline{f''(x) - \lambda f(x) = 0}$ avec $\underline{\lambda = \frac{f''(a)}{f(a)}}$

D'autre part, avec $x = y = 0$ dans $(*_0)$: $\underline{f(0) = 0}$

et en dérivant $(*_3)$ % y puis $x = y = 0$, on a :

$$\underline{f'(0)^2 = 2f'(0)}$$

Si $f'(0) = 0$, $f = 0$

Sinon $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$

Si $\lambda = 0$ $f(x) = 2x$ convient et est unique

Si $\lambda > 0$ $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x$

Si $\lambda < 0$ $f(x) = \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} \sin \sqrt{-\lambda} x$