

PROGRAMME DE COLLE 15

I. Fonctions intégrables : **EXERCICES**

...et toujours convergence dominée en vue des suites et séries de fonctions

Intégrabilité, calcul, théorème de convergence dominée version **suite** et version **série**.

II. Intégrales dépendant d'un paramètre : $F(x) = \int_I f(x,t)dt$: COURS & EXERCICES

Théorème de **continuité** \square de F (I intervalle quelconque et $x \in A \subset \mathbb{R}^n$)
(démonstration à l'aide du critère séquentiel et de la convergence dominée)

Théorèmes de **dérivabilité** C^1 \square (I intervalle quelconque et $x \in A \subset \mathbb{R}$) - formule de Leibniz
(démonstration à l'aide de l'inégalité des accroissements finis de $[a, b]$ dans \mathbb{C}).

Théorèmes de **dérivabilité** C^k \square (I intervalle quelconque et $x \in A \subset \mathbb{R}$)
(démonstration par récurrence)

Tout sur la fonction GAMMA \square : $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$: Γ est définie, continue et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et on peut dériver sous le signe intégrale. Variations, convexité, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, équivalent en 0, limite de $\Gamma(x)$ et $\frac{\Gamma(x)}{x}$ en $+\infty$ et le tracé de Γ .

Tout cela a été démontré et doit être su.

Annexe Fubini (HPTS)* \square^* : Si f est continue sur $[a, b] \times [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ alors

$$\int_{[a,b]} \left(\int_{[c,d]} f(x,y) dy \right) dx = \int_{[c,d]} \left(\int_{[a,b]} f(x,y) dx \right) dy$$

(démonstration à partir du théorème de dérivabilité, on a fait les grandes lignes)

Prévisions : Suites et Séries de fonctions