

## SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS : COURS &amp; EXERCICES

- Notion de convergence simple, uniforme pour les suites de fonctions de  $I \subset E$  dans  $F$  avec  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  espaces vectoriels de dimension finie.
- Notion de norme uniforme (notée  $\|f\|_{\infty, I}$ ).
- ◻ Notion de convergence simple, convergence uniforme, convergence absolue, convergence normale pour les séries. Lien entre ces convergences.
- ◻ 3 Théorèmes fondamentaux (version **suite** et version **série** qui se déduit de la version suite) de continuité, d'intégration (sur un segment) et de dérivation (et son extension pour les fonctions de classe  $C^k$  ou  $C^\infty$ ).
- ◻ Théorème de la double limite : Si une suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur un ensemble  $A$  vers une fonction  $g$  et si pour tout  $n$ ,  $f_n$  admet une limite finie  $b_n$  en  $a \in \bar{A}$  (éventuellement  $a = +\infty$ ) alors

la suite  $(b_n)$  converge vers une limite finie  $\ell$  et  $g$  converge en  $a$  vers  $\ell$ .

et sa version série :  $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$ .

- ◻ Tout sur la fonction  $\zeta$  définie par  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  (fait en classe : notamment la  $C^\infty$ -tude, les limites aux bords ainsi que l'équivalent en  $1^+$ ).
- Révision des théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.
- Convergence en moyenne, en moyenne quadratique, lien avec la convergence uniforme. Norme  $N_1$  sur  $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$  :  $N_1(f) = \int_I |f|$ . Produit scalaire et norme  $N_2$  sur  $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$  :  $(f|g) = \int_I fg$ .  $N_2(f) = \sqrt{\int_I f^2}$ .

## Approximation uniforme :

- Définition
- Théorème d'approximation uniforme 1 : Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  à valeurs dans un ev de dimension finie est approximable par des fonctions en escalier. (démonstration faite en classe)
- ◻\* Théorème d'approximation uniforme 2 : Théorème de Stone-Weierstrass pour les fonctions continues sur un segment à valeurs dans  $\mathbb{C}$  (démonstration : faites avec les polynômes de Bernstein et les probabilités (notamment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev)).

Prévisions : Séries entières