

**Espaces à noyau reproduisant**

Les espaces à noyau reproduisant ont des applications dans divers domaines comme l'apprentissage statistique ou la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Ce problème présente en partie III quelques exemples d'espaces à noyau reproduisant, l'un de ces exemples étant obtenu à partir de l'étude préalable dans la partie II d'un opérateur intégral. La partie IV propose quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant.

L'attention du candidat est attirée sur le fait que l'espace préhilbertien étudié *n'est pas le même* dans les différentes parties du problème.

**Définitions**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel muni de la norme  $\|\cdot\|$  associée au produit scalaire. On dit que  $E$  est un *espace à noyau reproduisant* sur  $I$  lorsqu'il vérifie les trois propriétés suivantes :

1. l'espace  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  des fonctions définies sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ;
2. pour tout  $x \in I$ , l'application  $V_x : (E, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $V_x(f) = f(x)$  est continue ;
3. pour tout  $x \in I$ , il existe une application  $k_x \in E$  vérifiant,

$$\forall f \in E, \quad f(x) = \langle k_x, f \rangle.$$

On appelle alors *noyau reproduisant* l'application  $K$  définie par

$$\forall (x, t) \in I^2, \quad K(x, t) = k_x(t).$$

Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ . On dit qu'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux s'il existe une subdivision  $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$  de  $[a, b]$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la restriction de  $f$  à  $]x_{i-1}, x_i[$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[x_{i-1}, x_i]$ .

**I Préliminaires**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel, de norme associée  $\|\cdot\|$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

- Q 1.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Montrer que l'orthogonal  $F^\perp$  de  $F$  est stable par  $u$ .  
On suppose qu'il existe un vecteur unitaire  $x_0 \in F$  vérifiant

$$\langle u(x_0), x_0 \rangle = \sup_{x \in F, \|x\|=1} \langle u(x), x \rangle.$$

Pour tout vecteur unitaire  $y \in F$  orthogonal à  $x_0$ , on pose, pour tout réel  $t$ ,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= x_0 \cos t + y \sin t, \\ \varphi(t) &= \langle u \circ \gamma(t), \gamma(t) \rangle. \end{aligned}$$

- Q 2.** Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
**Q 3.** Calculer  $\|\gamma(t)\|$  puis justifier que  $\varphi'(0) = 0$ .  
**Q 4.** En déduire que  $u(x_0)$  est orthogonal à  $y$ .  
**Q 5.** Montrer que  $x_0$  est vecteur propre de  $u$ .

**II Étude d'un opérateur**

Dans cette partie,  $E$  désigne l'espace vectoriel des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues, muni du produit scalaire défini par,

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

On note  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire.

Pour tout  $s \in [0, 1]$ , on définit la fonction  $k_s$  par,

$$\forall t \in [0, 1], \quad k_s(t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s, \\ s(1-t) & \text{si } t \geq s. \end{cases}$$

On note également, pour tout  $(s, t) \in [0, 1]^2$ ,  $K(s, t) = k_s(t)$ .

**Q 6.** Soit  $s \in ]0, 1[$ . Tracer la courbe représentative de  $k_s$  sur  $[0, 1]$ .

**Q 7.** Montrer que  $K$  est continue sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Pour tout  $f \in E$ , on pose,

$$\forall s \in [0, 1], \quad T(f)(s) = \int_0^1 k_s(t) f(t) dt.$$

**Q 8.** Montrer que  $T$  est un endomorphisme continu de  $E$ .

Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  formé des fonctions polynomiales. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $p_k$  la fonction définie par  $p_k(x) = x^k$ .

**Q 9.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , calculer  $T(p_k)$ . En déduire que  $F$  est stable par  $T$ .

**Q 10.** En déduire  $(T(p))''$  pour tout  $p \in F$ .

**Q 11.** Soit  $f \in E$ . Calculer  $T(f)(0)$  et  $T(f)(1)$ .

**Q 12.** Pour tout  $f \in E$ , montrer que  $T(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  puis que  $T(f)'' = -f$ .

**Q 13.** Montrer que  $T$  est injectif.

**Q 14.** Déterminer l'image de  $T$ .

**Q 15.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre non nulle de  $T$  et  $f$  un vecteur propre associé. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $\lambda f'' = -f$ .

**Q 16.** Déterminer les valeurs propres de  $T$  et montrer que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $g_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ . On note  $G = \text{Vect}((g_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$  et  $H = G^\perp$ .

**Q 17.** Justifier que, pour tout  $(f, g) \in E^2$ , on a

$$\langle T(f), g \rangle = \langle f, T(g) \rangle$$

On pourra utiliser la question 12.

On admet que,

$$H \neq \{0\} \implies \exists f \in H \text{ telle que } \begin{cases} \|f\| = 1, \\ \langle T(f), f \rangle = \sup_{h \in H, \|h\|=1} \langle T(h), h \rangle. \end{cases}$$

**Q 18.** En déduire que  $H = \{0\}$ .

**Q 19.** Montrer que la famille de vecteurs  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est orthonormale.

On admet pour la suite que  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite totale.

Pour tout  $f \in E$ , on pose,

$$\forall x \in [0, 1], \quad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2} \langle f, g_k \rangle g_k(x).$$

**Q 20.** Montrer que  $\Phi$  est continue.

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_N = \sum_{k=1}^N \langle f, g_k \rangle g_k$ .

**Q 21.** Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|T(f_N) - \Phi\| = 0.$$

**Q 22.** En déduire  $T(f) = \Phi$ .

### III Exemples d'espaces à noyau reproduisant

Dans cette partie,  $E_1$  désigne l'espace vectoriel des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, et vérifiant  $f(0) = f(1) = 0$ .

#### III.A – Un exemple

**Q 23.** Montrer que l'on définit un produit scalaire sur  $E_1$  en posant

$$\forall (f, g) \in (E_1)^2, \quad (f | g) = \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

Dans la suite de cette partie, on désigne par  $N$  la norme associée à ce produit scalaire.

**Q 24.** Montrer que, pour toute fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(0) = 0$ , on a

$$\forall x \in [0, 1] \quad |f(x)| \leq \sqrt{x \int_0^x (f'(t))^2 dt}.$$

On pose, pour tout  $f \in E_1$ ,

$$U(f)(s) = \int_0^1 k'_s(t)f'(t) dt,$$

où  $k_s$  a été défini dans la partie précédente.

**Q 25.** Soit  $f \in E_1$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que  $U(f) = -T(f'')$ . En déduire que  $U(f) = f$ .

**Q 26.** Montrer que  $U$  est l'application identité de  $E_1$ .

**Q 27.** Démontrer que l'espace préhilbertien  $(E_1, (\cdot | \cdot))$  est un espace à noyau reproduisant et que son noyau reproduisant est l'application  $K$  définie dans la partie précédente.

#### III.B – Un contre-exemple

On considère à nouveau l'espace  $E$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

**Q 28.** Montrer que  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  n'est pas un espace à noyau reproduisant.

#### III.C – Fonctions développables en série entière

**Q 29.** Soit  $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite de réels telle que la série  $\sum (a_n)^2$  soit convergente.

Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n t^n$  est supérieur ou égal à 1.

Dans la suite de cette sous-partie, on considère l'ensemble  $E_2$  des fonctions de  $] -1, 1[$  dans  $\mathbb{R}$  de la forme

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où  $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\sum (a_n)^2$  convergente. Pour  $f, g \in E_2$ , on pose

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \quad \text{où } f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ et } g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n.$$

**Q 30.** Montrer que  $E_2$  muni de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un espace préhilbertien réel.

**Q 31.** Soit  $x \in ] -1, 1[$ . Déterminer  $g_x \in E_2$  tel que, pour tout  $f \in E_2$ ,

$$f(x) = \langle g_x, f \rangle$$

**Q 32.** En déduire que  $E_2$  est un espace à noyau reproduisant et préciser son noyau.

### III.D – Autre exemple parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

On se donne dans cette sous-partie un réel  $a > 0$ .

On considère l'espace  $E_3$  des fonctions  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , continues et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $[0, a]$ , et vérifiant  $f(0) = 0$ . On munit  $E_3$  du produit scalaire défini, pour  $f, g \in E_3$ , par

$$(f | g) = \int_0^a f'(t)g'(t) dt.$$

**Q 33.** Montrer que la fonction  $(x, y) \mapsto \min(x, y)$  est un noyau reproduisant sur  $(E_3, (\cdot | \cdot))$ .

Soit  $E_4$  l'espace des fonctions continues sur  $[0, a]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et vérifiant de plus  $f(a) = 0$ . Soit  $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant  $\varphi(a) = 0$  et, pour tout  $x \in [0, a]$ ,  $\varphi'(x) < 0$ .

**Q 34.** Déterminer un produit scalaire sur  $E_4$  tel que la fonction  $(x, y) \mapsto \min(\varphi(x), \varphi(y))$  soit un noyau reproduisant sur l'espace préhilbertien  $E_4$ .

## IV Quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant

### IV.A – Continuité

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace à noyau reproduisant sur un intervalle  $I$ , de noyau reproduisant  $K$ . Pour tout  $(x, y) \in I^2$ , on pose  $k_x(y) = K(x, y)$ .

Soit  $x \in I$  et  $V_x$  définie sur  $E$  par  $V_x(f) = f(x)$ . On pose

$$N(V_x) = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

**Q 35.** Démontrer que

$$N(V_x) = \sqrt{\langle k_x, k_x \rangle}.$$

On suppose que  $K$  est continue sur  $I \times I$ .

**Q 36.** Démontrer que toutes les fonctions de  $E$  sont continues.

### IV.B – Construction d'un espace à noyau reproduisant

On note ici  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur  $[0, 1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

On considère une fonction  $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On s'intéresse à l'application  $T : E \rightarrow E$  définie par

$$T(f)(x) = \int_0^1 A(x, t)f(t) dt.$$

On suppose que  $\ker T$  est de dimension finie.

**Q 37.** Justifier que  $T$  induit un isomorphisme de  $(\ker T)^\perp$  sur  $\text{Im } T$ .

On note désormais  $S$  la bijection réciproque de cet isomorphisme.

On définit le produit scalaire  $\varphi$  sur  $\text{Im } T$  en posant, pour tout  $(f, g) \in (\text{Im } T)^2$ ,

$$\varphi(f, g) = \langle S(f), S(g) \rangle$$

On considère l'application  $K$  définie sur  $[0, 1]^2$  par

$$K(x, y) = \int_0^1 A(x, t)A(y, t) dt$$

**Q 38.** Montrer que  $(\text{Im } T, \varphi)$  est un espace à noyau reproduisant, de noyau  $K$ .

---

• • • FIN • • •

---