

DM 8 *Optique*

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions. Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

Ce sujet utilise la syntaxe des annotations pour préciser le type des arguments et du résultat des fonctions Python. Ainsi,

```
1 def maFonction(n:int, x:float) -> (int, np.ndarray):
```

signifie que la fonction `maFonction` admet deux arguments, le premier est un entier, le second un nombre à virgule flottante et qu'elle renvoie un couple dont le premier élément est un entier et le deuxième un tableau numpy. Il n'est pas nécessaire de recopier les entêtes avec annotations telles qu'elles sont fournies, une entête classique suffit.

Exercice 1 : Étude du module photographique d'un smartphone

On étudie ici les aberrations géométriques dues à la lentille de l'appareil photographique. Cette lentille de forme plano-convexe est constituée de silice fondue associée à du quartz. On peut la modéliser dans un premier temps comme une demi-boule de rayon de courbure R et d'indice de réfraction n , plongée dans l'air dont l'indice de réfraction est pris égal à 1. Un faisceau lumineux cylindrique, de rayon $r_m < R$, arrive sous incidence normale sur la face plane de cette lentille. On note C l'intersection de la face plane de la demi-boule avec l'axe optique (Ox) et S l'intersection de la face hémisphérique avec ce même axe.

On s'intéresse au rayon lumineux incident qui arrive parallèle à l'axe optique et à une distance r de cet axe, voir ci-dessous.

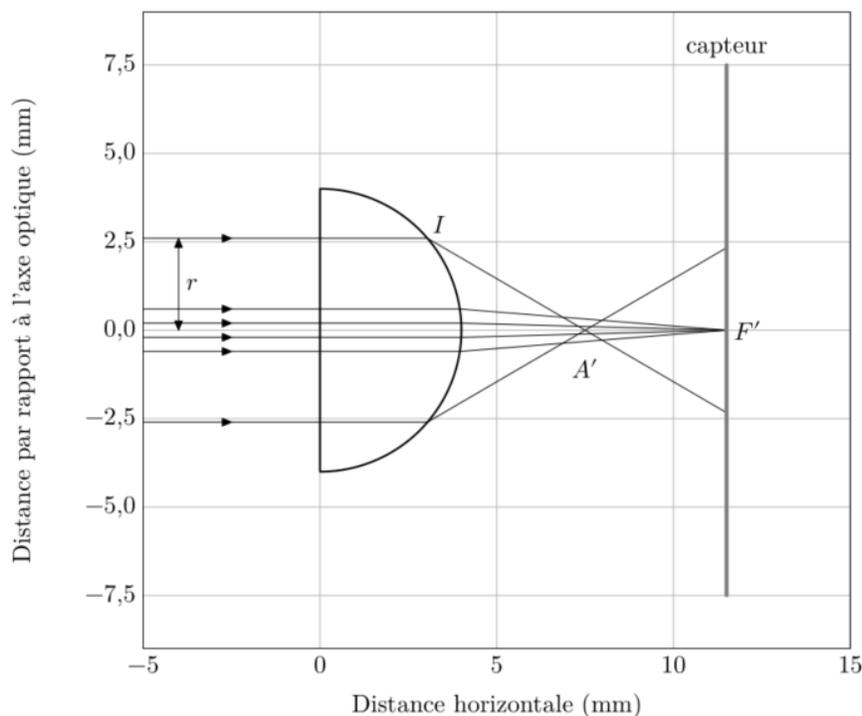


FIGURE 1 – Illustration de l'aberration sphérique

I – Condition de traversée de la lentille

- Q.1** Reproduire le trajet de ce rayon lumineux lors de son passage à travers la lentille. On notera i l'angle incident sur le dioptre verre-air et t l'angle réfracté correspondant. Déterminer l'expression de r_0 , valeur limite du rayon du faisceau si l'on souhaite que tous les rayons incidents émergent de la lentille. Calculer numériquement la valeur de r_0 . En réalité, le constructeur a choisi un diamètre de la lentille $\Phi = 5,0$ mm. Justifier ce choix.

II – Étude des rayons proches de l'axe optique

- Q.2** On note A' la position de l'intersection du rayon incident avec l'axe optique après son passage au travers de la lentille. Montrer que la distance algébrique $\overline{CA'}$ vérifie :

$$\overline{CA'} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(t - i)}$$

- Q.3** En déduire, en fonction de R et n , l'expression de la limite $\overline{CF'}$ de $\overline{CA'}$ lorsque la distance r tend vers 0. Calculer numériquement $\overline{CF'}$.
- Q.4** Dans quelle condition peut-on considérer que le point F' est stigmatiquement conjugué d'un point source situé à l'infini sur l'axe? Comment peut-on nommer le point F' ?

III – Étude de l'aberration sphérique de la lentille

Le capteur de l'appareil photographique est placé dans le plan focal image de la lentille (FIGURE 1). On s'intéresse à présent au rayon lumineux qui arrive parallèle à l'axe optique à la distance $r = r_0$ de l'axe.

- Q.5** À partir des données du téléphone portable fournies, déterminer la longueur et la largeur du capteur de ce téléphone. En déduire la taille approximative d'un pixel du capteur.
- Q.6** Déterminer numériquement la distance TSA (transversal spherical aberration) entre F' et le point où ce rayon extrême rencontre le capteur. Un schéma faisant apparaître la distance TSA est attendu. Comparer la distance TSA à la dimension d'un pixel. Conclure sur l'adéquation de cette lentille au téléphone portable considéré.

IV – Détermination du profil d'une lentille asphérique

On souhaite modifier le profil de la surface courbe de la lentille afin que tous les rayons incidents parallèles à l'axe (Ox) convergent au même point F' , comme indiqué en FIGURE 2. La lentille obtenue est dite asphérique. Pour déterminer le profil de la lentille, il est commode d'adopter une approche ondulatoire en imaginant une onde plane incidente se propageant parallèlement à l'axe (Ox) venant frapper la face plane de la lentille. Après celle-ci, l'onde convergera au point F' si, depuis la source, les chemins optiques associés à tous les rayons traversant la lentille et parvenant en F' sont identiques.

- Q.7** Montrer que l'épaisseur $e(r)$ de la lentille à la distance r de l'axe doit vérifier :

$$ne(r) + \sqrt{r^2 + \left(\frac{nR}{n-1} - e(r)\right)^2} = nR + \frac{R}{n-1}$$

- Q.8** Exprimer le rapport $e(r)/R$ lorsque $r \ll R$. Montrer qu'alors le profil de la lentille asphérique est pratiquement confondu avec celui de la lentille demi-boule.

Quand on résout cette expression pour $e(r)$, grâce à une méthode numérique par exemple, on peut tracer le profil en FIGURE 2.

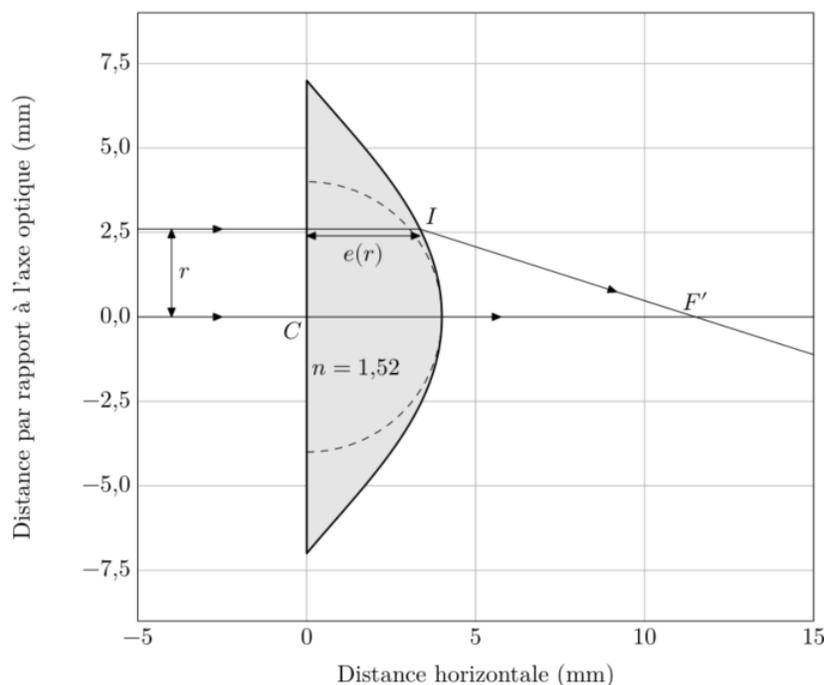


FIGURE 2 – Profil d'une lentille asphérique

Exercice 2 : Étude des pixels de l'écran d'un smartphone

Depuis l'apparition des premiers smartphones, la qualité des écrans a fait des progrès considérables. Un célèbre constructeur de téléphones affirme que « la densité de pixels des écrans est si élevée qu'à l'oeil nu et à une distance normale, il est impossible de discerner les pixels individuels ».

Q.1 Montrer qu'il existe une taille de pixel maximale pour satisfaire à la description précédente. Calculer sa valeur numérique.

On souhaite concevoir une expérience qui permet de mesurer expérimentalement la distance qui sépare les pixels de l'écran d'un téléphone portable. Pour cela, on dispose du matériel suivant au laboratoire :

- un banc optique et divers supports ;
- une lampe spectrale à sodium ;
- un laser ;
- deux lentilles convergentes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 de distances focales respectives $f'_1 = 10,5$ mm et $f'_2 = 45,5$ mm ;
- un écran percé d'un trou ;
- un téléphone portable.

L'idée est d'étudier les interférences observées par réflexion sur les pixels de l'écran. Ceux-ci sont modélisés dans la suite comme de petits miroirs.

I – Premier montage

On envisage tout d'abord le dispositif expérimental présenté FIGURE 3. Une lampe spectrale, considérée monochromatique de longueur d'onde λ , éclaire l'écran percé d'un très petit trou. Celui-ci peut être considéré comme une source ponctuelle (S) qui est initialement placée sur l'axe optique, au point O . Les rayons issus de (S) traversent la lentille \mathcal{L}_2 et arrivent en incidence normale sur deux pixels, considérés comme de petits miroirs positionnés parallèlement à l'axe (Oy). Les rayons sont alors réfléchis et diffractés par les deux miroirs P_1 et P_2 , traversent à nouveau la lentille \mathcal{L}_2 et viennent interférer au point M : une figure d'interférence est visible

sur l'écran. On note (y, z) les coordonnées du point M dans le plan (Oyz) formé par l'écran et on ne considère que les points voisins de l'axe : $(|y|, |z|) \ll f'_2$.

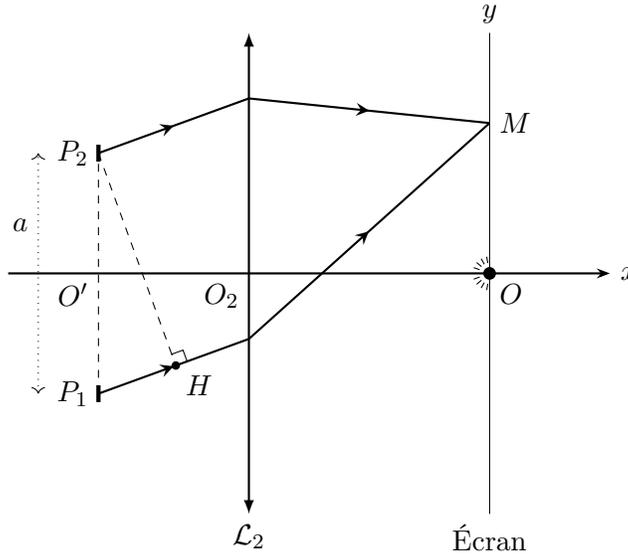


FIGURE 3 – Premier montage : lampe spectrale et miroirs

- Q.2** À quelle distance de la lentille \mathcal{L}_2 doit-on placer l'écran pour que les rayons issus de (S) ressortent parallèles à l'axe après la lentille \mathcal{L}_2 ? Reproduire la FIGURE 3 et compléter le trajet des deux rayons issus de (S) interférant au point M placé sur l'écran. Justifier que les rayons issus de P_1 et de P_2 convergeant au point M sont parallèles entre eux avant d'atteindre la lentille \mathcal{L}_2 .
- Q.3** En utilisant notamment le théorème de Malus, montrer que $\delta(M)$, la différence de marche des deux rayons au point M , est égale à la distance P_1H . Montrer que cette différence de marche s'écrit $\delta(M) = \frac{ay}{f'_2}$.
- Q.4** En déduite l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M . Décrire la figure d'interférence observée. Définir et exprimer l'interfrange i de cette figure d'interférence.
- Q.5** Après avoir déterminé son expression, tracer l'intensité lumineuse $I(y)$ sur l'écran en fonction de y . On notera I_0 l'intensité que l'on obtiendrait avec un miroir seulement.
- Q.6** Le point source (S) est déplacé dans le plan de l'écran, ses coordonnées deviennent (y_S, z_S) . En s'appuyant sur un schéma, déterminer l'expression de la différence de marche au point M en fonction de y , y_S , a et f'_2 . Décrire le changement que le déplacement de la source (S) induit sur la figure d'interférence observée sur l'écran.

Pour obtenir une figure plus lumineuse, on souhaite remplacer le petit trou pratiqué dans l'écran par une fente de largeur c , parallèle à l'axe Oz . Cette fente est éclairée par la lampe spectrale. Dans un modèle simple, on peut considérer que chaque petit élément de surface de la fente se comporte comme une source ponctuelle, incohérente avec les autres éléments de la fente.

- Q.7** À l'aide d'un critère semi-quantitatif, basé par exemple sur l'ordre d'interférence au point M , déterminer l'expression de la largeur maximale c_{max} au-delà de laquelle la figure d'interférence sera brouillée. Calculer numériquement c_{max} dans le cas de la lampe à sodium en prenant $f'_2 = 45,5 \text{ cm}$, $a = 400 \mu\text{m}$ et une longueur d'onde $\lambda = 589 \text{ nm}$. Conclure.

II – Modélisation numérique de la première expérience

Afin d'étudier plus précisément l'effet de l'élargissement de la fente source, on adopte un modèle numérique discret dans lequel la fente large est modélisée par un grand nombre de sources ponctuelles incohérentes entre elles, uniformément réparties entre les ordonnées $y = -c/2$ et $y = c/2$. Pour calculer l'intensité résultante, on suppose les variables correspondant aux constantes f_2' , a , λ , c et i déclarées en Python. De plus, on dispose de la fonction `intensite(y,yS)`, d'arguments d'entrée y l'ordonnée d'un point M situé sur l'écran et yS l'ordonnée de la source (S). Cette fonction renvoie un flottant correspondant au calcul de l'intensité lumineuse au point M due à une source ponctuelle unique de position yS .

Q.8 Écrire, en langage Python, une fonction d'entête

```
1 def Itot(y:float, c:float, K:int) -> float:
```

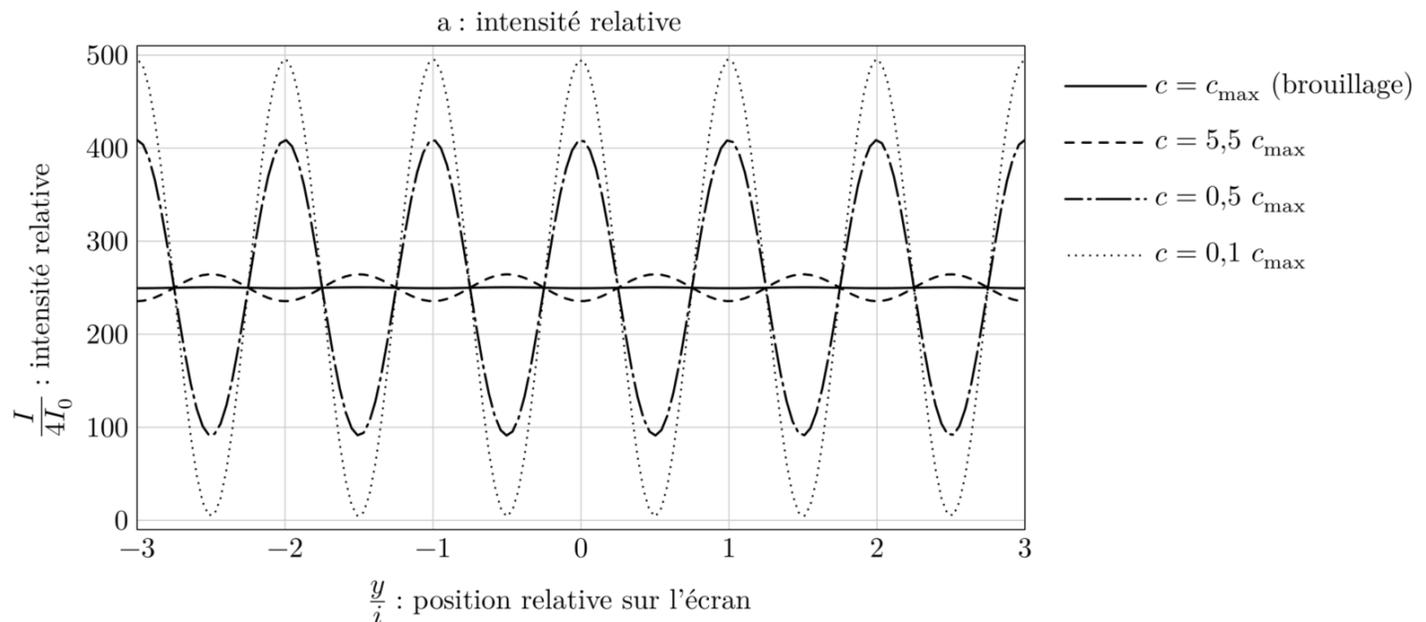
qui, à partir de la position y du point M , de la distance c et du nombre de sources ponctuelles K , permet de calculer l'intensité résultante au point M .

Q.9 On s'intéresse à présent au contraste de chaque figure d'interférence. Écrire en langage Python une fonction d'entête

```
1 def contraste(I:np.ndarray) -> float:
```

qui, à partir d'un vecteur (ou d'une liste) I (correspondant aux valeurs d'intensité sur l'écran pour différentes positions du point M), renvoie un flottant correspondant au calcul du contraste de la figure d'interférence.

Grâce à la fonction `Itot`, on étudie l'intensité résultante en fonction de l'ordonnée y du point M sur l'écran. Le résultat est donné en FIGURE 4 pour $K = 500$ sources. On choisit quatre extensions spatiales de la lampe : $5,5c_{max}$, c_{max} , $0,5c_{max}$ et $0,1c_{max}$. La FIGURE 4a représente $I/(4I_0)$ en fonction de y/i avec I_0 l'intensité due à un seul miroir et i la valeur de l'interfrange. La FIGURE 4b représente le contraste obtenu en fonction de la largeur relative c/c_{max} .



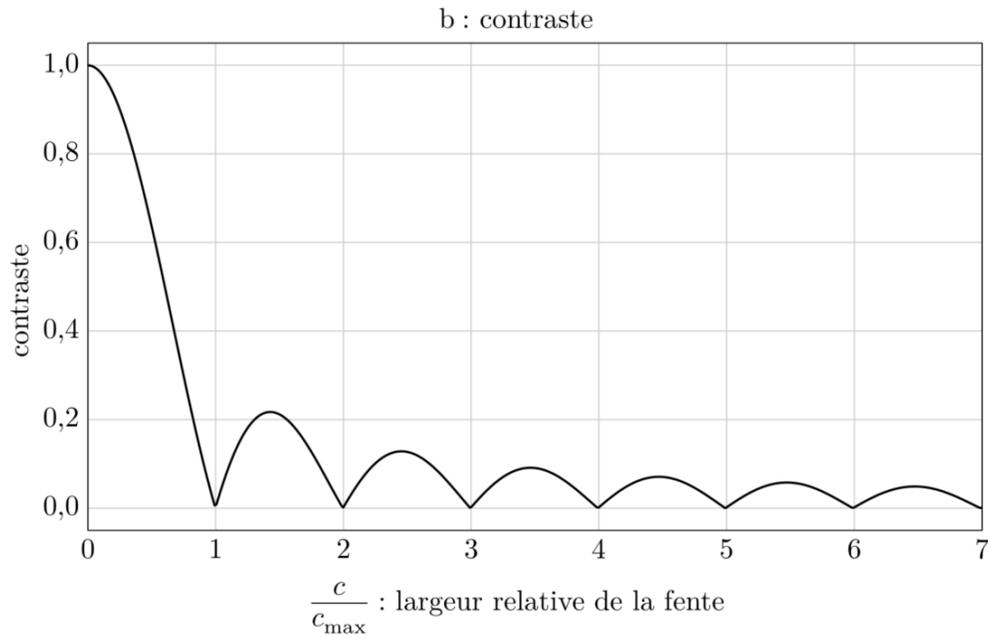


FIGURE 4 – Intensité à l'écran et contraste simulés

Q.10 Commenter les FIGURE 4a et FIGURE 4b. Le calcul semi-quantitatif effectué en Q.7 est-il confirmé par les résultats de la FIGURE 4b?

III – Montage avec un laser

Afin d'éviter les problèmes inhérents à l'utilisation d'une lampe spectrale précédemment décrits, celle-ci est remplacée par un laser comme indiqué en FIGURE 5. De plus, on insère une lentille \mathcal{L}_1 entre le laser et l'écran.

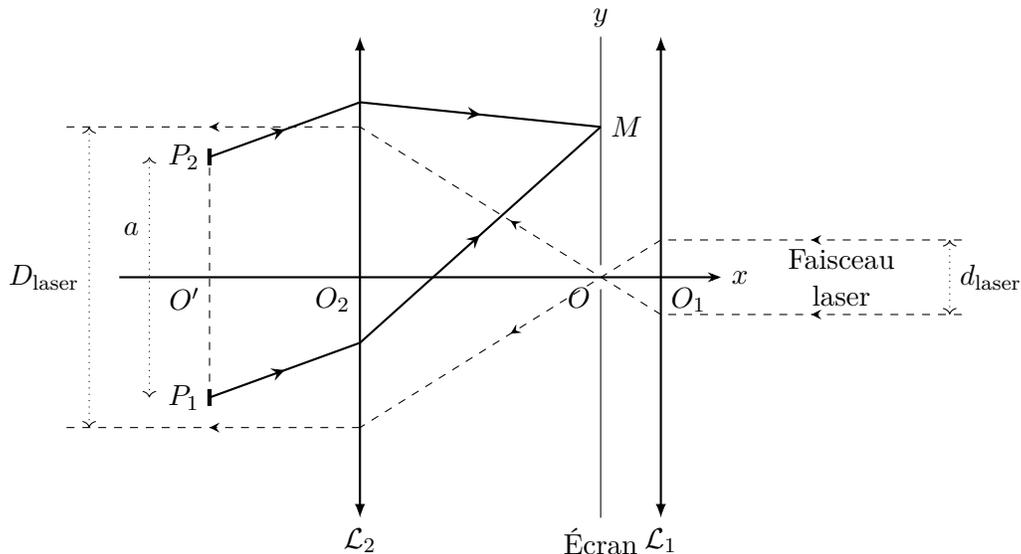


FIGURE 5 – Deuxième montage : laser et miroirs

Q.11 Soit d_{laser} le diamètre du faisceau laser avant sa traversée de la lentille \mathcal{L}_1 et D_{laser} le diamètre du faisceau laser après sa traversée de la lentille \mathcal{L}_2 . Exprimer le rapport de ces deux grandeurs en fonction des paramètres du système.

On envisage à présent l'utilisation de $N = 4$ miroirs (représentant 4 pixels) disposés selon un carré de côté a . Ces miroirs sont notés P_1 à P_4 . Les interférences sont observées en un point M de l'écran, de coordonnées (y, z) .

Q.12 En utilisant les résultats de la **Q.3**, exprimer sans calculs les différences de marches au point M , $\delta_{i/1}(M)$ avec $i = 2, 3, 4$, entre l'onde passant par le miroir P_i et celle passant par le miroir P_1 , en fonction de y , z , a et f'_2 . Déterminer les coordonnées des points de l'écran pour lesquels les ondes issues des 4 miroirs sont en phase. Montrer que ces maxima d'éclairement forment un réseau carré de points de coordonnées

$$\left(y_k = k\lambda \frac{f'_2}{a}, \quad z_m = m\lambda \frac{f'_2}{a} \right)$$

où k et m sont deux entiers.

Q.13 On modélise l'écran du téléphone par un réseau carré de N pixels assimilés à de petits miroirs réparti périodiquement avec une période a selon y et selon z . Montrer que l'éclairement obtenu est maximal aux points de coordonnées (y_k, z_m) déterminés à la question précédente et qu'il vaut $I_{\max} = N^2 I_0$, I_0 étant l'éclairement que l'on obtiendrait avec un miroir seul.

Q.14 Exprimer, en fonction de N , le rapport entre l'éclairement maximal et l'éclairement moyen observé sur l'écran. Que peut-on en conclure sur l'allure de la figure d'interférence observée lorsque N est très grand ?

IV – Détermination de la taille d'un pixel

Le réseau bidimensionnel de N miroirs considéré dans la section précédente modélise l'écran d'un téléphone comportant N pixels. Le montage est représenté sur la **FIGURE 6** et est réalisé comme suit :

- On place sur un banc optique, dans l'ordre de la droite vers la gauche, un laser, une lentille \mathcal{L}_1 , un écran troué en son centre, une lentille \mathcal{L}_2 et le téléphone
- On s'assure du centrage du système, la tache du laser est visible sur l'écran du smartphone
- Sur la face gauche de l'écran, une figure géométrique caractéristique d'un phénomène de diffraction est visible, cette figure est exploitée ci-après
- Les distances focales utilisées sont $f'_1 = 10,5$ mm et $f'_2 = 45,5$ mm, leur incertitude-type vaut $u(f') = 0,30$ cm.



FIGURE 6 – Montage utilisant le laser

La FIGURE 7 présente une image obtenue au cours de cette expérience, avec un laser vert ($\lambda_v = 532 \text{ nm}$ d'incertitude-type $u(\lambda_v) = 10 \text{ nm}$). Le trou au centre est celui par lequel passe le laser, il possède un diamètre de 4,0 mm.

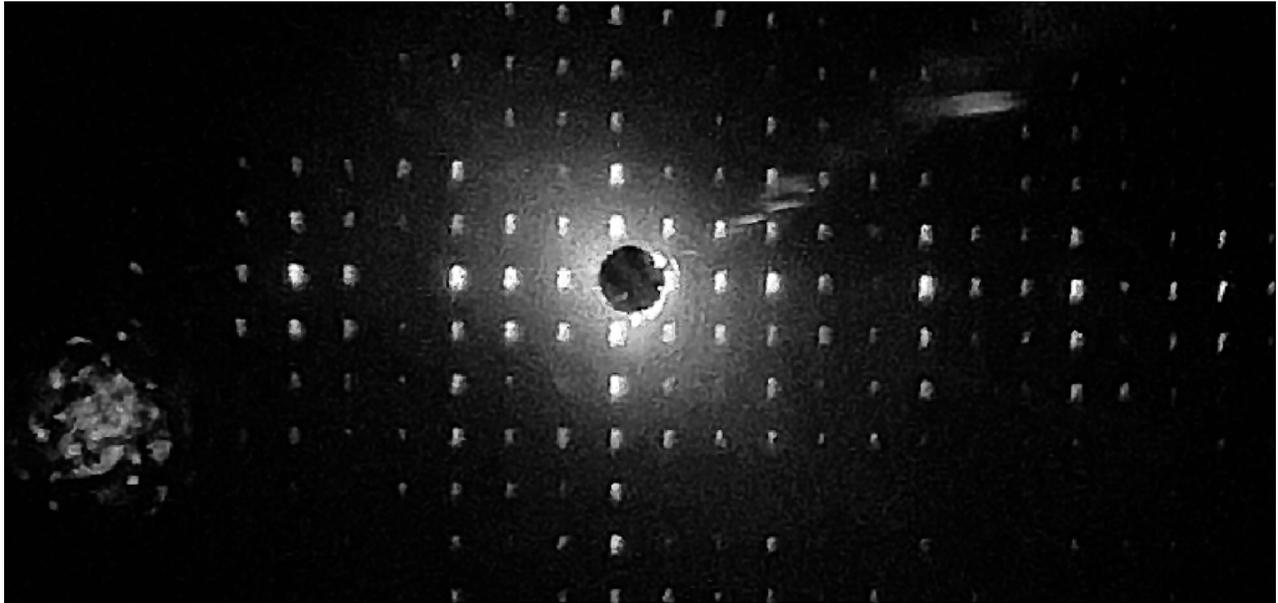


FIGURE 7 – Image visible sur l'écran

Q.15 Déterminer la distance entre deux pixels avec une estimation de son incertitude-type. Comparer ce résultat à celui de la **Q.1** et conclure.

Données

Résolution du capteur de l'appareil photographique :	4000×3000 pixels
Diagonale du capteur :	1/3 de pouce
Indice de réfraction de l'air :	$n_{air} = 1,0$
Indice de réfraction de la lentille :	$n = 1,52$
Rayon de courbure de la lentille :	$R = 4 \text{ mm}$
Diamètre réel la lentille :	$\Phi = 5,0 \text{ mm}$
Distance focale effective de l'objectif :	$f' = 9,0 \text{ mm}$
Distance normale d'observation d'un téléphone portable :	30 cm
Pouvoir de résolution d'un l'oeil emmetrope :	$\alpha = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$
Conversion d'unité :	1 pouce = 25,4 mm