Corrigé d'après M. Omar SADIK (UPS) pour l'exercice 1 et le problème et M. Lucas (UPS) pour l'exercice 2.

EXERCICE I

Q2. Soit $t \in]-1,1[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|p_n t^n| \leqslant p_n$, or la série $\sum p_n$ converge de somme 1, donc, par théorème de comparaison (TC), la série $\sum p_n t^n$ converge absolument donc convergente. alors $t \in D_{G_X}$, donc $\boxed{]-1,1[\subset D_{G_X}}$.

Première méthode :

Soit $t \in]-1,1[$, alors $G_S(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2})$ car les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, donc les variables $f(X_1) = t^{X_1}$ et $g(X_2) = t^{X_2}$ sont indépendantes aussi. On en déduit donc $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

Deuxième méthode :

Les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} P(X_1 = n)t^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} P(X_2 = n)t^n$ ont un rayon de convergence au mois égal à 1, par application du théorème produit de cauchy de deux séries entières, il en résulte :

$G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$.

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes,

$c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} P\Big([X_1 = k] \cap [X_2 = n-k]\Big)$.

D'autre part $\bigcup\limits_{k=0}^{n} [X_1 = k] \cap [X_2 = n-k] = (X_1 + X_2 = n)$ (réunion disjointe), on en déduit donc que $c_n = P(S = n)$. D'où $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = G_S(t)$

Conclusion: $\boxed{G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t).}$

Q3. On peut écrire ici $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ où chaque X_i représente la variable aléatoire égal au numéro tirée pendant le i-ème tirage. Ces variables sont indépendantes car le tirage est avec remise, et les variables sont tous à valeurs dans $\{0,1,2\}$,

Soit $i \in \{1,...,n\}$ et $t \in]-1,1[$, alors $G_{X_i}(t) = t^0 p_0 + t^1 p_1 + t^2 p_2$

On a $p_0 = \dfrac{1}{4}$, $p_1 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $p_2 = \dfrac{1}{4}$, par application de ce qui précède :

$G_{S_n}(t) = [G_{X_1}(t)]^n = \left[\dfrac{1}{4} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{t^2}{4}\right]^n = \dfrac{1}{4^n}(t+1)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{k} t^k$.

Mais $G_{S_n}(t) = \sum\limits_{k=0}^{2n} P(S_n = k)t^k$ et avec $S_n(\Omega) = \{0,1,\dots,(2n)\}$.

conclusion: $\boxed{\forall k \in \{0,1,\dots,2n\},\quad P(S_n = k) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{k} \text{ ainsi } S_n \sim \mathcal{B}(2n, \tfrac{1}{2}).}$

Q4.
```
from random import *
from math import *

def bino(n,k): # fonction non demandée pour vérifier avec la valeur théorique
    return factorial(n)//factorial(n-k)//factorial(k)

def tirage(n):
    sac=[0,1,1,2] # le sac des 4 boules
    somme=0
    for i in range(n):
        choix=randint(0,3)
        somme=somme+sac[choix]
    return somme

def proba(n,k,N):
    c=0 # compteur
    for i in range(N): # on effectue N simulations de "tirage"
        if tirage(n)==k: # la somme S_n est égale à k...
            c=c+1        # on incrémente le compteur c
    return c/N

def probaVerif(n,k,N): # fonction identique à "proba" avec en plus la valeur théorique
    c=0
    for i in range(N):
        if tirage(n)==k:
            c=c+1
    return [c/N,bino(2*n,k)/2**(2*n)]


# 3 exécutions ----------------->:

>>> probaVerif(10,4,100001)
[0.004839951600483995, 0.004620552062988281]


>>> probaVerif(12,12,100001)
[0.16121838781612183, 0.1611802577972412]

>>> probaVerif(12,23,1000001)
[3.999996000004e-06, 1.430511474609375e-06]
```

Le théorème qui permet de justifier que l'on tend probablement vers la valeur de $P(S_n = k)$ est **la loi faible des grands nombres**.

En effet si on note (X_k) une suite de variable de Bernoulli qui suivent toute la même loi : $X_k \sim \mathbb{1}_{(S_n=k)}$, alors $E(X_k) = P(S_n = k) = m$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{N\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{X_1 + \cdots + X_N}{N} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

On a donc $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \lim\limits_{N\to+\infty} P\Big(\Big|\mathbf{proba}(n,k,N) - P(S_n = k)\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.}$

$\boxed{\textbf{EXERCICE II}}$

II.1. Le polynôme $P = X^3 + X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A.

De plus $P = X(X-j)(X-j^2)$ où $j = \exp(2i\pi/3)$. donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, j, j^2\}$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres complexes de } A \text{ prennent au maximum trois valeurs distinctes parmi : } 0,\ j,\ j^2.}$

II.2. Le polynôme $P = X(X-j)(X-j^2)$ est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, annulateur de A.

Ainsi par la troisième caractérisation $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$

II.3. On suppose A inversible ainsi on peut multiplier par A^{-1} pour obtenir $A^2 + A + I_n = 0$.

Toujours grâce à la troisième caractérisation, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et comme $X^2 + X + 1 = (X-j)(X-j^2)$, il existe une matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} j & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & j & & & \\ & & & j^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & j^2 \end{pmatrix}$$

où il y a p fois le nombre j et q fois le nombre j^2 avec $0 \leqslant p, q \leqslant n$ et $p + q = n$. Le déterminant de A est réel et vaut donc : $\det A = j^p j^{2q} = j^{p+2q}$. Or les valeurs prises par la suite (j^k) sont 1 , j et j^2. Comme 1 est la seule réelle de ces 3 valeurs, on a donc $\det A = j^{p+2q} = 1$.

Conclusion: $\boxed{\text{si } A \text{ est inversible alors } \det(A) = 1.}$

II.4. Comme A est symétrique réelle elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ grâce au **théorème spectral**.

D'après le **II.1.** $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0, j, j^2\} \cap \mathbb{R} = \{0\}$. A est donc semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 sur la diagonale (seule valeur propre réelle de A). Conclusion: $\boxed{\text{Si } A \text{ est symétrique alors } A = (0).}$

$\boxed{\textbf{PROBLÈME}}$

Q4. Soit $x \in]-1, 1[$. On a $\lim_{n\to+\infty} x^n = 1$, donc $\boxed{1 - x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1}$.

On a alors $\dfrac{|a_n x^n|}{1 - x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n x^n|$, or le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est 1, donc la série $\sum a_n x^n$ converge absolument et par théorème de comparaison, la série $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_n x^n}{1 - x^n} \text{ converge absolument}}$.

Pour la remarque :

Analyse : Si la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{a_n x_0^n}{1-x_0^n}$ converge avec $x_0\notin]-1,1[$ alors il faut que $|x_0|>1$ car la série n'est même pas définie pour $x_0=\pm 1$. Or si $|x_0|>1$, $\dfrac{a_n x_0^n}{1-x_0^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}-a_n$. Il suffit donc de prendre une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon 1 et qui converge en 1.

Synthèse : Si on prend $\boxed{a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}}$, la série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{(n+1)^2}\dfrac{2^n}{1-2^n}$ converge car

$$\frac{1}{(n+1)^2}\frac{2^n}{1-2^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{-1}{n^2}\leqslant 0 \text{ et } \sum\frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

Q5. Posons $u_n(x)=a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}$. Soit $x\in[-b,b]$, alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<1-b^n\leqslant 1-x^n$, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{|a_n x^n|}{1-x^n}\leqslant\dfrac{|a_n b^n|}{1-b^n}$, la série $\sum\dfrac{a_n b^n}{1-b^n}$ converge absolument par **Q4.**, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-b,b]$.

Conclusion: $\boxed{\sum u_n \text{ converge uniformément sur } [-b,b].}$

Q6. •Toujours avec $u_n(x)=a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}$. Les u_n sont continues sur $]-1,1[$ par T.G., la série $\sum f_n$ converge uniformément sur chaque segment $[-b,b]\subset]-1,1[$, donc $\boxed{f \text{ est continue sur }]-1,1[}$.

• Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ par T.G.. $\forall x\in]-1,1[,\ \ u_n'(x)=a_n\dfrac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$.

Soit $b\in[0,1[$, alors par le même raisonnement fait en **Q5.** : $\forall x\in[-b,b];\ \ |u_n'(x)|\leqslant\dfrac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}=\alpha_n$, comme la série $\sum\dfrac{na_nb^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ converge car un équivalent à $\dfrac{na_nb^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ quand $n\to+\infty$ est na_nb^{n-1} et que le rayon de convergence de $\sum a_nx^n$ est égal à celui de $\sum na_nx^n$.

Donc la série $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout $[-b,b]\subset]-1,1[$ et la série $\sum u_n$ déjà converge simplement sur $]-1,1[$, alors on peut conclure :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-1,1[\ \text{ et } \ \forall x\in]-1,1[\ \ ,\ \ f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}\ \text{ et } f'(0)=a_1.}$$

Q7. • Tout revient à montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de A et d'utiliser le théorème de sommation par paquets.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$: $(1,n)\in I_n$ et $I_n\subset A$, donc $I_n\neq\emptyset$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}I_n\subset A$.

Soit $(k,p)\in A$, il est clair que $(k,p)\in I_{n_0}\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}I_n$ avec $n_0=kp$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}I_n=A$.

Si on suppose que $\exists(k,p)\in I_n\cap I_m$, alors $kp=n=m$, donc $I_n=I_m$, donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de A.

La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est sommable, par le **théorème de sommation par paquets** on a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}u_{n,p}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n}u_{k,p}\right)}$$

• Soit $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p\geqslant 1} a_n x^{np}$ converge absolument et sa somme $\sigma'_n = \sum_{p=1}^{+\infty} |a_n||x|^{np} = |a_n|\dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$. Enfin la série $\sum \sigma'_n$ converge par **Q4**, donc la famille donnée est sommable, en appliquant ce qui précède à $u_{n,p} = a_n x^{np}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp}.$$

D'autre part : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{(k,p)\in I_n} a_k = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{d/n} a_d = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$

Et on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ série géométrique.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.}$

Q8. Ici $a_n = 1$, donc le b_n de **Q7** est $b_n = \sum_{d/n} 1 = d_n$, par application de la question **Q7**, on a :

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n.}$

Q9. • Ici $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n = \varphi(n) = \mathrm{Card}\{k \in [\![1,n]\!]\ \ /\ \ k \wedge n = 1\}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 1 \leqslant a_n \leqslant n$, par comparaison $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série } \sum a_n x^n \text{ est } 1.}$

• On a les diviseurs de 12 sont $1, 2, 3, 4, 6$ et 12, or $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$ et $\varphi(12) = 4$, on conclut : $\boxed{\text{L'égalité est donc vraie pour } n = 12.}$

• Soit $x \in]-1,1[$. Par application de la question **Q7**, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$, avec ici $b_n = \sum_{d/n} \varphi(d) = n$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n.$

Or $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, en dérivant on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\displaystyle\forall x \in]-1,1[\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x}{(1-x)^2}}$

Q10. On a $\forall x \in [0,1[$, $\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. Posons $u_n(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$.

1 est dans l'adhérence de $[0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (-1)^n\frac{x^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in [0,1[$ la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n\dfrac{x^n}{n}$ est une série alternée qui vérifie $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n} = 0$ et la suite $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, alors par T.S.A. :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall x \in [0,1[,\quad \displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right| = |R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} = \alpha_n$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est uniforme sur $[0,1[$, le <u>**théorème de la double limite**</u> s'applique et on peut conclure.

Conclusion: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2.}$

Q11. Soit $a\in]0,1[$. On a $\forall x\in[-a,a],\forall n\in\mathbb{N}^*\ 0<1-a^n\leqslant 1-x^n$, donc :

$\forall x\in[-a,a]\ ,\forall k\in\mathbb{N}^*\quad:\quad\left|(-1)^k\dfrac{x^{k-1}}{1-x^k}\right|\leqslant\dfrac{a^{k-1}}{1-a^k}.$

Or la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{a^{k-1}}{1-a^k}$ converge car $\dfrac{a^{k-1}}{1-a^k}\underset{k\to+\infty}{\sim}a^{k-1}$ et la série $\sum a^{k-1}$ converge, la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}v_k$ est donc uniforme sur $[-a,a]$ avec $v_k(x)=(-1)^k\dfrac{x^{k-1}}{1-x^k}$.

De plus $\displaystyle\lim_{x\to 0}(-1)^k\frac{x^{k-1}}{1-x^k}=\begin{cases}-1 & \text{si}\quad k=1\\ 0 & \text{si}\quad k\geqslant 2\end{cases}$. Le théorème de la double limite s'applique et on a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{1-x^n}=-1}$$

On en déduit léquivalent de $f(x)$ quand $x\to 0$: $\boxed{f(x)\underset{x\to 0}{\sim}-x.}$

On a $f(0)=0$, donc $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, alors $f'(0)=-1=a_1$ on retrouve donc bien le résultat de la question **Q6**.

Q12. Toujours $a_n=(-1)^n$ et $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{1-x^n}$

Donc $(1-x)f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{n-1}\frac{(1-x)}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$.

Soit $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \ g_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^{n-1}}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$.

1 est dans l'adhérence de $[0,1[$ et $\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-}g_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}$,

Soient $x\in[0,1[$ et $k\in[\![0,(n-1)]\!]$, on a $\quad x^{n-1}\leqslant x^k$ et donc $nx^{n-1}\leqslant 1+x+x^2+...+x^{n-1}$,

Alors $\forall x\in]0,1[$ et $\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ \ :\ |g_n(x)|\leqslant\dfrac{x^{n-1}}{nx^{n-1}}\leqslant\dfrac{1}{n}$.

Soit $x\in]0,1[$. Les deux suites $(x^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{1}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et elles sont positives, donc la suite $(|g_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante comme elle est positive et tend vers 0, le T.S.A. s'applique et on a $\forall n\in\mathbb{N};\ \displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}g_k(x)\right|\leqslant|g_{n+1}(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$

Alors la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}g_n$ converge uniformément sur $]0,1[$, le théorème de la double limite s'applique et on a ;

$\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to 1^-}g_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$ d'après la question 10).

Alors $(1-x)f(x)\underset{x\to 1^-}{\sim}-\ln 2$, qui s'écrit $\boxed{f(x)\underset{x\to 1^-}{\sim}\dfrac{-\ln 2}{(1-x)}.}$