DM 9
Optique ondulatoire, mécanique

Exercice 1 : Caractérisation du spectre d'une diode laser

Un interféromètre de Michelson utilisé en configuration lame d'air permet de caractériser le spectre d'émission d'une diode laser. Le dispositif interférentiel est éclairé avec la diode laser S. On considère le point M_0 au centre de la figure d'interférence et on note δ la différence de marche des deux rayons lumineux issus de S qui viennent se superposer en M_0. La lumière émise par la diode possède une densité spectrale en pulsation ayant la forme d'une lorentzienne :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\omega} = J(\omega) = \frac{J_m}{1 + \left(\dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_1}\right)^2}$$

Q.1 Que signifient les lettres de l'acronyme LASER ?

Q.2 Tracer l'allure de la courbe $J(\omega)$ et déterminer sa largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ en fonction de ω_1.

Q.3 On considère qu'une tranche infinitésimale du spectre, centrée sur une pulsation ω et de largeur $\mathrm{d}\omega$ se comporte comme une raie monochromatique de pulsation ω. Déterminer l'intensité résultante $\mathrm{d}I(M_0)$ au point M_0 en sortie de l'interféromètre en fonction de δ, ω, $\mathrm{d}\omega$ et des constantes du problème.

Afin de déterminer $\Delta\omega$, la vis de chariotage est reliée à un moteur qui permet de faire varier δ linéairement avec le temps. La différence de marche entre les deux rayons s'écrit alors : $\delta(t) = v \cdot (t - t_0)$. On enregistre l'intensité $I(M_0, t)$ au point M_0 en fonction du temps t.

Q.4 Deux ondes émises par la diode à deux longueurs d'ondes différentes donnent-elles lieu à des interférences ? Montrer alors que l'intensité $I(M_0, t)$ s'écrit sous la forme :

$$I(M_0, t) = \int_0^{+\infty} f(\omega, t)\mathrm{d}\omega$$

et donner l'expression de la fonction $f(\omega, t)$.

Q.5 En déduire l'expression de l'intensité $I(M_0, t)$ en fonction du temps.

On obtient les enregistrements représentés sur les deux figures ci-dessous pour lesquelles $v = 50\,\mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{min}^{-1}$. La seconde figure est un "zoom" de la première réalisé sur la zone rectangulaire indiquée.

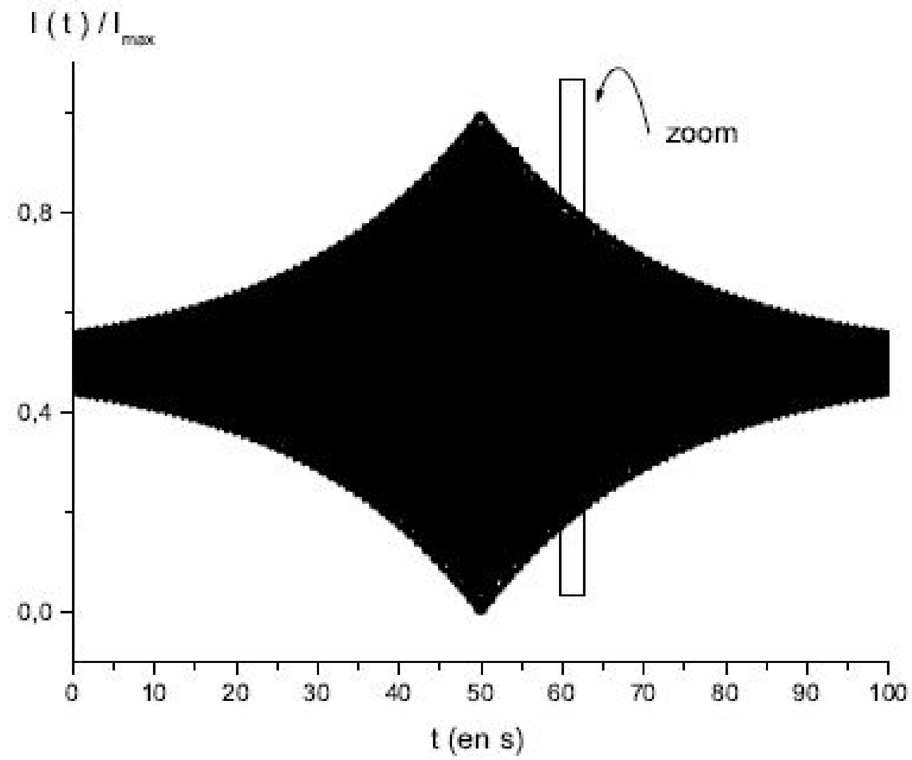
Q.6 Déduire d'une de ces figures la valeur numérique de la pulsation centrale ω_0 de la diode laser. Quelle est la longueur d'onde centrale λ_0 associée ? Indiquer la couleur de la lumière émise.

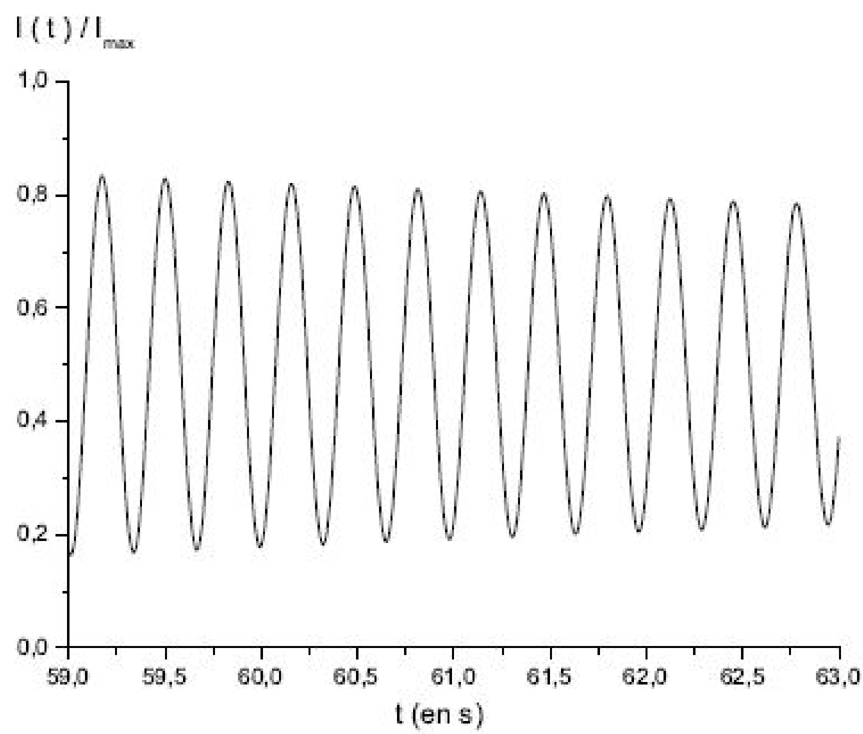
Q.7 En analysant les figures, déterminer également la valeur numérique de la largeur $\Delta\omega$ de la raie lorentzienne. On expliquera soigneusement la méthode utilisée. En déduire la longueur de cohérence ℓ_c de la lumière émise par cette diode.

Q.8 Déterminer la largeur spectrale de la diode laser en longueur d'onde $\Delta\lambda$ et faire l'application numérique.

Données :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\omega_1}\right)^2} = \pi\omega_1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\omega_1}\right)^2}\mathrm{d}\omega = \pi\omega_1 \exp\left(-\frac{\omega_1|x|}{c}\right)\cos\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right)$$





Exercice 2 : Secousses en mécanique

On étudie ici la notion, peu courante en mécanique newtonienne, de secousse : on nomme ainsi une quantité α égale à la dérivée temporelle d'une accélération a : $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$. Cette notion est illustrée par deux expériences « à une dimension » et indépendantes l'une de l'autre.

I – Première expérience

Sur la table de la Figure 1, recouverte d'une nappe inextensible sans ourlet, on place une assiette à fond plat bien remplie. D'un geste brusque, on tire la nappe. L'assiette reste sur la table.
La masse de l'assiette est $M = 400\,\mathrm{g}$, celle de la nappe est $m = 50\,\mathrm{g}$. La table est modélisée par un disque de centre O et de rayon $R = 25\,\mathrm{cm}$. Il est recouvert d'une nappe de même dimension et d'épaisseur négligeable. L'assiette circulaire, dont la surface en contact avec la table est de rayon $r = 5\,\mathrm{cm}$, est placée au centre de la nappe.

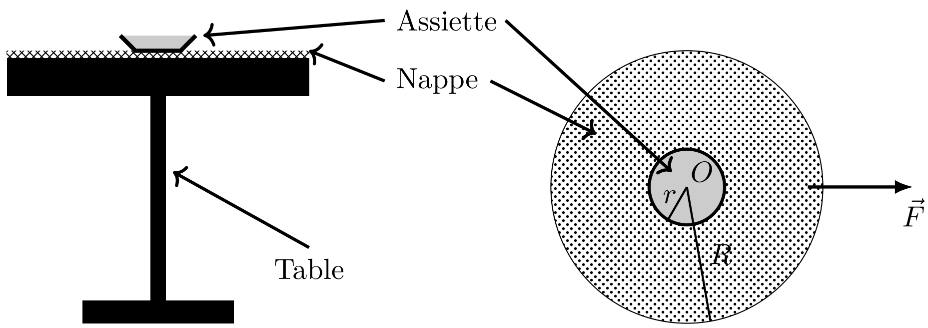


Figure 1 – Table, assiette et nappe vues de coté et de haut

On admet que le support de la force $\vec{F}$ développée par l'expérimentateur pendant qu'il tire sur la nappe passe par O et que cette force s'écrit, en fonction du temps t, $\vec{F} = m\alpha t\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire constant et α une constante. Le frottement entre la nappe et la table est négligeable. Le coefficient de frottement de glissement entre la nappe et l'assiette est noté f ($f = 0{,}2$). Le repère d'espace $R_g(O, \vec{u})$ est supposé galiléen. On note g l'accélération de la pesanteur ($g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$).

Q.1 Montrer que la constante α a bien la dimension d'une secousse.

I.A Première modélisation

Q.2 On suppose que, tout le long de l'expérience, l'assiette glisse sur la nappe. Quel est, à l'instant $t = 0^+$, la valeur de la vitesse de glissement de l'assiette par rapport à la nappe ? Quel est son signe pour $t > 0$?

Q.3 Montrer que l'accélération de l'assiette est constante dans R_g et déterminer l'équation horaire du mouvement de son centre C_a sous la forme $x_a = f(t)$.

Q.4 Déterminer l'équation horaire du mouvement du centre C_n de la nappe, $x_n = h(t)$.

Q.5 On observe que le contact nappe-assiette dure un temps $\tau = 0{,}1\,\mathrm{s}$. Calculer la valeur de α. La manipulation peut-elle être conduite avec succès par un enfant ?

I.B Modélisation plus réaliste

En réalité, la dynamique de l'assiette comprend deux phases. Dans la première phase, de durée t_1, l'intensité de la force de frottement est inférieure à la valeur fMg donnée par la loi de Coulomb, l'assiette ne glisse pas sur la nappe et $x_a = x_n$. Le contact entre l'assiette et la nappe induit une force tangentielle $\vec{T}$ sur l'assiette et donc $-\vec{T}$ sur la nappe.

Q.6 Pour $0 \leq t \leq t_1$, appliquer l'équation fondamentale de la dynamique à la nappe puis à l'assiette. Déduire de ces deux relations que la durée de la phase sans glissement est $t_1 = \dfrac{fg}{\alpha}\dfrac{M+m}{m}$.

Q.7 Exprimer la position et la vitesse de l'assiette et de la nappe lorsque cette phase s'achève, c'est-à-dire en $t = t_1$.

Q.8 Déterminer, pour $t \geq t_1$, et sous la forme de polynômes de la variable $(t - t_1)$, les équations horaires respectives du mouvement de C_a ($x_a = \phi(t - t_1)$) et de celui de C_n ($x_n = \eta(t - t_1)$).

Q.9 On observe que cette deuxième phase (qui s'achève en t_c lorsqu'il n'y a plus contact nappe-assiette) dure un temps $t_c - t_1 = 0{,}1\,\mathrm{s}$. Déterminer les valeurs de α et de t_1.

II – Deuxième expérience (en bonus)

Un solide S, de masse m, est accroché à un support par l'intermédiaire d'un ressort R_1 de masse négligeable et de raideur k. Un second ressort R_2, identique au premier, pend sous le solide (Figure 2). À l'instant $t = 0$, on tire sur le ressort R_2. On constate que si l'on tire lentement, l'un des ressorts finit par se briser et que si l'on tire rapidement, c'est l'autre ressort qui se brise.

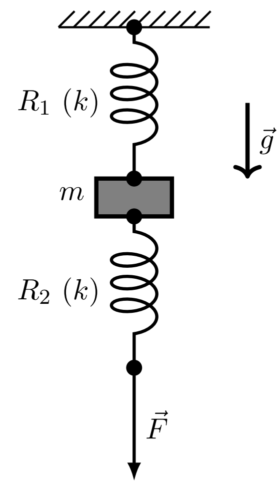


Figure 2 – Deux ressorts

Q.10 Prévoir quel est, dans chacun des cas, le ressort qui se brise.

La force $\vec{F}$ appliquée à l'extrémité libre de R_2 s'exprime par $\vec{F} = m\alpha t \vec{u}_x$ pour $t > 0$ où α est une constante et $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire vertical dirigé vers le bas. La tension $\vec{T}$ de chaque ressort suit la loi de Hooke, jusqu'à une tension de rupture T_r : $T = kx$ pour $T < T_r$, où x est l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide. On pose $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et l'on appelle $x_1(t)$ l'allongement de R_1. Les conditions initiales sont $\left(\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 0$ et $x_1(0) = \dfrac{mg}{k}$

Q.11 Déduire du principe fondamental de la dynamique appliqué au solide S que l'allongement $x_1(t)$ est donné par :

$$x_1 = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k}\left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right] = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k\omega}\left[u - \sin(u)\right]$$

où on a posé $u = \omega t$.

Q.12 En déduire l'évolution temporelle des tensions $T_1(u)$ et $T_2(u)$ de chaque ressort.

Q.13 Représenter les graphes respectifs de $T_1(u)$ et $T_2(u)$ et discuter leurs possibilités d'intersections. On pourra poser $\varepsilon = \dfrac{g\omega}{\alpha}$.

Q.14 On considère le cas où les graphes de $T_1(u)$ et de $T_2(u)$ se coupent. Établir, sous la forme $f(\varepsilon) = \dfrac{T_r}{mg}$, l'équation donnant la valeur limite de la secousse, α_L, en dessous de laquelle le ressort R_1 se casse le premier.

Q.15 *Application numérique* : calculer α_L sachant que la tension de rupture est atteinte pour un allongement de $5{,}8\,\mathrm{cm}$. On donne $k = 20\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ et $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$.