exercice

DM$_{12}$: corrigé

1) Soit $(\vec{w}, \vec{w'})$ une base OTN de $(\vec{v})^\perp$, posons $B' = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{w'})$ est une base OTN de $\mathbb{R}^3$ et

$$\boxed{M_{B'}(r) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_θ}} \\ 0 & & \end{array}\right) \quad \text{où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

2) Posons $\mathcal{P} = (\vec{v})^\perp$, dans la base B : $\mathcal{P} / \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{3}z = 0$

Cherchons une base OTN de $\mathcal{P}$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, posons $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, comme $\|\vec{v}\| = 1$,

posons $\vec{w'} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, on a

donc $B' = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{w'})$ base OTND de $\mathbb{R}^2$ et

$$M_{B'}(r) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix} P^T \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\cos\theta & * & * \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$ (il est inutile de calculer les 7 autres coeff pour l'instant)

Comme $r(e_1) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$, on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\cos\theta = 0 \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{7} \\ \sin\theta = \frac{4\sqrt{3}}{7} > 0 \end{cases}$$

d° $\boxed{\begin{array}{l} r \text{ est la rotation d'axe } \mathrm{vect}(\vec{v}) \text{ et d'angle :} \\ \theta = \mathrm{Arccos}\left(\frac{-1}{7}\right) \text{ et } \Pi_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 0 & -5/7 & 2\sqrt{6}/7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{6}/7 & 5/7 \end{pmatrix} \\ \simeq 0{,}7532\pi \simeq \frac{3\pi}{4} \end{array}}$

Autre méthode : Notons A la matrice de r ds $\mathcal{B}$.

on a déjà $A = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ 1 & x & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix}$, ensuite $\mathcal{P} = e_1^\perp$

$\mathcal{P} \perp \mathcal{P}^\perp$ donc $f(\mathcal{P}) \perp f(\mathcal{P}^\perp)$: conservation du P.S., donc $f(\mathcal{P}) \subset f(\mathcal{P}^\perp)^\perp = f(e_1)^\perp$

$= e_2^\perp = \mathrm{vect}(e_1, e_3)$

d'où $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$ par les 6 vérif. sur A.

d'où $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}$

et $a^2 + b^2 = 1$

Comme $\det A = \det r = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}$

Ensuite $r(\vec{v}) = \vec{v}$ ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} a\frac{\sqrt{2}}{4} + b\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2}/4 \\ b\sqrt{2}/4 - a\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sqrt{2}/4 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$ ce qui donne $\begin{cases} a = -5/7 \\ b = \frac{2\sqrt{6}}{7} \end{cases}$

Exercice *

0)
- $O_n(\mathbb{R})$ est fermé car image réciproque de $\underbrace{\{I_n\}}_{\text{fermé}}$ par l'application continue $M \longmapsto M^TM$.

- $O_n(\mathbb{R})$ est borné car si $M \in O_n(\mathbb{R})$ et si $M = (a_{ij})$, $\forall j \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ $({}^tMM = I_n)$ donc $\forall i,j \ |a_{ij}| \leq 1$ et

$O_n(\mathbb{R}) \subset B_F((0), 1)$
↳ pour $\|\ \|_\infty$

d $\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ compact}}$

1) $A \in S_n^{++} \Rightarrow A^2 \in S_n$ et $X \neq 0 \Rightarrow X^TA^2X = \|AX\|^2 > 0$ donc $A^2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Tout d'abord montrons que $\forall B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists ! A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = B$.

Par th. spectral, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ $\exists D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ tq

$B = PD\,P^T$ et comme $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $sp(B) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Posons $A = P \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P^T$, on a $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A^2 = B$.

D'où l'existence. Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq. $M^2 = B$.

Passons aux edo. canoniquement associés à $\mathbb{R}^n$ avec un PSC.

Soit f et φ tq $B = M_{b_0}(\varphi)$ et $M = M_{b_0}(f)$ ②

↳ base canonique de $\mathbb{R}$?

Soit $\lambda \in sp(f)$ et $x \in E_\lambda(f)$ alors $f^2(x) = \varphi(x) = \lambda^2 x$

d'où $E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^2}(\varphi)$ donc $\underbrace{\bigoplus_{\lambda \in sp(f)} E_\lambda(f)}_{= E \text{ (th. spectral)}} \subset \bigoplus_{\lambda \in sp(f)} E_{\lambda^2}$

donc $E = \bigoplus_{\lambda \in sp(f)} E_\lambda(f) = \bigoplus_{\lambda \in sp(f)} E_{\lambda^2}(\varphi)$

et $\forall \lambda \in sp(f)$ $E_\lambda(f) = E_{\lambda^2}(\varphi)$. On en déduit

que f est unique et vaut $f(x) = \sqrt{\mu}\, x$ sur chaque

$E_\mu(\varphi)$.

d $\boxed{\forall B \in S_n^{++}(\mathbb{R})\ \exists!\, A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mid B = A^2}$

Comme ϕ est bien définie ($A^2 \in S_n(\mathbb{R})$ et $X^T A^2 X = (AX)^T (AX) > 0$, $\forall X \neq 0$)

On en déduit que ϕ est bijective.

* ϕ est C^0 par T.G.
* Utilisons le critère séquentiel pour la continuité de ϕ^{-1} : soit $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cvg vers B (B_k & $B \in S_n^{++}$)

$\underline{\Pi_4}$ $\sqrt{B_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sqrt{B}$

$\forall k \in \mathbb{N}, \exists P_k \in O_n(\mathbb{R})$ et $\exists D_k = \begin{pmatrix} \alpha_1(k) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n(k) \end{pmatrix} \mid B_k = P_k D_k P_k^T$

Posons $\Delta_k = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1(k)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n(k)} \end{pmatrix}$, on a $\sqrt{B_k} = P_k \Delta_k P_k^T$

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, P_k admet une valeur d'adhérence $Q \in O_n(\mathbb{R})$. Soit φ tq $P_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} Q$,

$D_{\varphi(k)} = P_{\varphi(k)}^T B_{\varphi(k)} P_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{TG} Q^T B Q$

d'où (par les coordonnées) $(\Delta_{\varphi(k)})$ cvg. Soit Δ sa limite,

Par TG, comme $\Delta_k^2 = D_k$, $\sqrt{B_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} Q \Delta Q^T$. Posons $A = Q \Delta Q^T$, on a donc $A^2 = B$ soit $\underline{A = \sqrt{B}}$.

On montre de même que si C est une val. d'adhérence de $(\sqrt{B_k})$ alors $C = \sqrt{B}$. En conséquence la suite $(\sqrt{B_k})$ n'a qu'une <u>seule val. d'adhé. possible : $\sqrt{B}$.</u>

Comme $D_k = P_k^T B_k P_k$, que (B_k) bornée car convergente et

(P_h) bornée car $O_n(\mathbb{R})$ compact, on a :

(D_h) bornée donc (Δ_h) bornée et donc $(\sqrt{B_h})$ bornée.

Par B.W. ($\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dim. finie), $(\sqrt{B_h})$ possède au moins une val. d'adh., donc $\sqrt{B}$ est la seule v.a. de $(\sqrt{B_h})$. Si $(\sqrt{B_h})$ ne convergeait pas vers $\sqrt{B}$ alors

$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geqslant N : \|\sqrt{B_h} - \sqrt{B}\| > \varepsilon.$

On pourrait donc construire $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st↗ tq :

$$\forall h \quad \|\sqrt{B_{\varphi(h)}} - \sqrt{B}\| > \varepsilon$$

et par BW, $(\sqrt{B_{\varphi(h)}})$ possède un v.a. C et $\sqrt{B} \neq C$.

Absurde d $(\sqrt{B_h})$ cvg vers $\sqrt{B}$.

d : $A \longmapsto \sqrt{A}$ est un homéomorphisme de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2°) → ψ est bien définie, ψ est C^0 par TG.

→ Mq ϕ est bijective :

analyse : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ $A = SU$ donc $A^T = U^T S$

d'où $AA^T = S^2$ donc $S = \sqrt{AA^T}$ notation du 1°)

csq synthèse : si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $AA^T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

d'où posons $S = \sqrt{AA^T}$ et $U = S^{-1}A$

On a : * $A = SU$

* $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (cf 1°)

* $U^TU = S^{-1}A^TAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$: $U \in O_n(\mathbb{R})$

csq $\Psi(S, U) = A$

l'analyse a montré l'unicité de S ($= \sqrt{AA^T}$) et donc de $U = S^{-1}A$ cl Ψ bijective

→ $\Psi^{-1} : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$

$A \longmapsto (\sqrt{AA^T}, (\sqrt{AA^T})^{-1}A)$

est C^0 par TG (car $\sqrt{\ }$ est C^0)

cl Ψ homéomorphisme

3°) a) Soit $(A, B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2$ et $t \in [0, 1]$.

* $tA + (1-t)B \in S_n(\mathbb{R})$

* $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$:

$$X^T(tA+(1-t)B)X = tX^TAX+(1-t)X^TBX \geq \min(X^TAX, X^TBX) > 0$$

6

d $S_n^{++}(\mathbb{R})$ convexe

9

c) * Si $\phi : O_2^+(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, 2\pi[$ homéo,

alors $\phi(O_2^+(\mathbb{R})) = [0, 2\pi[$ compact de $\mathbb{R}$ $\rightarrow\leftarrow$

* $\phi : \mathbb{U} \longrightarrow O_2^+(\mathbb{R})$ est clairement un homéo.

$z = a+ib \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

d) $GL_2(\mathbb{R})$ est donc homéomorphe à $\Omega \times O_2(\mathbb{R})$

Or $O_2(\mathbb{R}) = O_2^+(\mathbb{R}) \amalg O_2^-(\mathbb{R})$ est homéo. à

$\underbrace{\mathbb{U}}_{\mathcal{C}^+} \amalg \underbrace{\{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| = 1\}}_{\mathcal{C}^-}$ (2 cercles de $\mathbb{C}$).

~~$GL_2(\mathbb{R})$ homéo. à $\Omega \times \mathcal{C}^+ \amalg \Omega \times \mathcal{C}^-$~~

~~sorte de cylindre en dimension 5~~ !

I.

1. Soient $(P,Q,R) \in \mathbb{R}[X]^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   On a par T.G. $t \longmapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   En $+\infty$: $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées $t^2P(t)Q(t)e^{-t} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit par T.C. que $t \longmapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   On a donc $< P,Q >$ qui est bien définit.

   On a clairement $< Q,P >=< P,Q >$, $< \lambda P+Q,R >= \lambda < P,R > + < Q,R > < P,P >\geqslant 0$.

   Enfin si $< P,P >= 0$, comme $t \longmapsto P(t)^2e^{-t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, par le théorème de l'intégrale nulle : $\forall t \in [0,+\infty[\ P(t)^2e^{-t} = 0$, donc $P(t) = 0$. Comme $[0,+\infty[$ est infini, on a $P = 0$.

   Conclusion: $\boxed{<,> \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$

2. Posons $I_k =< X^k,1 >= \displaystyle\int_0^{+\infty} t^ke^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   Effectuons une IPP : $\forall k \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^ke^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^ke^{-t}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   Les deux intégrales existent (elles valent respectivement $< X^k,1 >$ et $k < X^{k-1},1 >$).

   $\Big[-t^ke^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 0$ par C.C.

   On en déduit $I_k = kI_{k-1}$ et comme $I_0 = 1$, on a $I_k = k!$.

   Enfin $< X^i,X^j >=< X^{i+j},1 >$.

   Conclusion:

   $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} < X^k,1 >= k! \text{ et } \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 < X^i,X^j >= (i+j)! \ .}$

3. Comme F_n est de dimension finie, le cours assure par le théorème fondamental que

   $F_n \oplus F_n^{\perp} = \mathbb{R}[X]$ et donc que **le projeté orthogonal de 1 sur F_n existe**.

4. D'une part $< 1-Q_n,X^i >= 0$ car $1 = Q_n + R_n$ avec $Q_n \in F_n$ et $R_n \in F_n^{\perp}$.

   Donc $1-Q_n \in F_n^{\perp}$ et comme $X^i \in F_n$, $1-Q_n \perp X^i$.

   D'autre part

   $$< 1-Q_n,X^i >=< 1-\sum_{k=1}^n a_kX^k,X^i >=< 1,X^i > - \sum_{k=1}^n a_k < X^k,X^i >= i! - \sum_{k=1}^n a_k(k+i)!$$

   Or $(k+i)! = 1\times 2\cdots \times i \times (1+i)\cdots(i+k) = i! \times (1+i)\cdots(i+k)$. On en déduit

   $$< 1-Q_n,X^i >= i!\Big(1-\sum_{k=1}^n a_k(i+1)\cdots(i+k)\Big) = i!P(i)$$

   Conclusion: $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!] : P_n(i) = 0.}$

5. D'après le 3) il existe Q telle que $P_n(X) = Q(X)\displaystyle\prod_{i=1}^n (X-i)$.

   Comme $\mathrm{d}^o(P_n) \leqslant n$, on a $\mathrm{d}^o(Q) \leqslant 0$, soit $Q = \lambda \in \mathbb{R}$.

   On remarque que $P_n(-1) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \times 0 = 1$. On en déduit que $P_n(-1) = \lambda\displaystyle\prod_{i=1}^n(-1-i)$ et donc que $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$

   Conclusion: $\boxed{P_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\displaystyle\prod_{i=1}^n (X-i)}$

6. Posons $m = \inf_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_n t^n)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
On remarque que $m = \mathrm{d}(1,F_n)^2$ (distance pour la norme du produit scalaire de ce problème).
Comme F_n est de dimension finie, le cours assure que
$\mathrm{d}(1,F_n)^2 = \|1-Q_n\|^2 =<1-Q_n, 1-Q_n>=<1-Q_n,1>-<1-Q_n,Q_n>$
Or $1-Q_n \perp Q_n$ (car $Q_n\in F_n$), donc
$\mathrm{d}(1,F_n)^2 =<1-Q_n,1>=<1-\sum_{k=1}^{n} a_k X^k, 1>=1-\sum_{k=1}^{n} a_k k! = P_n(0) = \dfrac{1}{n+1}$
Conclusion: $\boxed{\inf_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_n t^n)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}.}$

II.

7. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour la famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: il existe une suite de polynômes orthogonaux $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$\forall n\in\mathbb{N}$: $\mathrm{vect}(1,X,\dots,X^n)=\mathrm{vect}(Q_0,Q_1,\dots,Q_n)$ (et $<X^n,Q_n>0$).
De plus on construit les polynômes Q_n grâce aux formules : $Q_0=\dfrac{1}{\|1\|}=1$ et pour tout $n\geqslant 1$: $R_n = X^n - \sum_{j=0}^{n-1} <X^n,Q_i>Q_i$ et $Q_n=\dfrac{R_n}{\|R_n\|}$.
Posons donc $P_n=R_n$, on a bien P_n unitaire pour tout $n\in\mathbb{N}$. La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.
Comme les degrés des P_n sont échelonnés, la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre et comme pour tout $N\in\mathbb{N}$ $(P_0,\dots,P_N)$ est libre dans $\mathbb{R}_N[X]$, $(P_0,\dots,P_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$ et donc tout polynôme de $\mathbb{R}_[X]$ est combinaison linéaire $(P_0,\dots,P_N)$ (avec $N=max(0,d^oP)$. la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une base de $\mathbb{R}_[X]$.
Conclusion: $\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ répond à la question}}$
Unicité $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux telles bases.

8. On a $P_0=1$. Ensuite grâce à la question précédente ($P_n=R_n$) :
$P_1 = X-<X,1>Q_1 = X-<X,1>\dfrac{P_0}{\|P_0\|}$
Or avec le **2)** $\|P_0\|^2=<1,1>=0!=1$
$P_1 = X-<X,1>=X-1$
$P_2 = X^2-<X^2,1>1-<X^2,P_1>\dfrac{P_1}{\|P_1\|}$
Or $\|P_1\|^2=<X-1,X-1>=<X,X>-2<X,1>+<1,1>=2!-2\times 1!+0!=1$.
Donc $P_2 = X^2-2!-<X^2,X-1>(X-1)=X^2-2-(3!-2!)(X-1)=X^2-4X+2$

9. Comme $\mathrm{vect}(P_0,\dots,P_{n-1})=\mathrm{vect}(1,X,\dots,X^{n-1})=\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et comme $\forall i\in[\![0,n-1]\!]$: $P_i\perp P_n$, on conclut :
Conclusion: $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* : P_n\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}.}$

10. Grâce à $(*)$, $\|P_n\|^2=<P_n,P_n>=\int_0^{+\infty} Pn^{(n)}t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \int_0^{+\infty} n!t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!^2$.
Conclusion: $\boxed{\|P_n\|=n!}$

11. Calculer le projeté orthogonal de X^4 sur $\mathbb{R}_2[X]$. *(on utilisera une base OTN de $\mathbb{R}_2[X]$).*
D'après ce qui précède $(P_0,P_1,\dfrac{P2}{2})$ est une base OTN de $\mathbb{R}_2[X]$.
On en déduit que le projeté de X^4 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est $p_2(X^4)=<X^4,P_0>P_0+<X^4,P_1>P_1+<X^4,P_2>\dfrac{P_2}{2}$
D'après le **9)** $<X^4,P_0>=\int_0^{+\infty} t^4t^0e^{-t}\,\mathrm{d}t=24$, $<X^4,P_1>=\int_0^{+\infty} 4t^3t^1e^{-t}\,\mathrm{d}t=4\times 24$, $<X^4,P_2>=\int_0^{+\infty} 12t^2t^2e^{-t}\,\mathrm{d}t=12\times 24$.

On a donc $p_2(X^4) = 24 + 96(X-1) + 288\dfrac{X^2-4X+2}{4}$

Conclusion: $\boxed{p_2(X^4) = 72 - 192X + 72X^2}$

12. **a)** En décomposant P_n dans $\mathbb{R}[X]$, $P_n(X) = D(X)Q(X)$ avec $Q(X)$ qui est le produit

- de facteurs $X - \lambda$ avec $\lambda < 0$,
- de facteurs $(X-\mu)^{2k}$ avec $\mu \geqslant 0$ et
- de facteurs $X^2 + \alpha X + \beta$ avec $\alpha^2 - 4\beta < 0$

Tous ces polynômes sont positifs sur $\mathbb{R}^+$ et par produit $\underline{Q \text{ \textbf{est positif sur} } \mathbb{R}^+}$.

On en déduit que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+ \ , \ D(t)P_n(t) = D(t)^2Q(t) \geqslant 0}$.

b) $\boxed{< D, P_n >= 0}$ car $d^oD \leqslant n-1$ et $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

c) $< D, P_n >= \displaystyle\int_0^{+\infty} D(t)P_n(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} D(t)^2Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$. Par le théorème de l'intégrale nul, on a : $\forall t \in \mathbb{R}^+ \ , \ D(t)P_n(t) = D(t)^2Q(t) = 0$. Le polynôme D^2Q admet donc une infinité de racines donc il est nul, or il est de degré $n+r$: c'est absurde.

On en déduit que $r = n$, autrement dit $D(X) = P_n(X) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X - x_k)$.

Conclusion: $\boxed{P_n \text{ admet } n \text{ racines deux à deux distinctes dans } [0, +\infty[}$

13. **a)** $XP_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X] = \text{vect}(P_0, \dots, P_{n+1})$ et donc se décompose sur la base $(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$:

$$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{n,k}P_k.$$

b) Comme P_n et P_{n+1} sont unitaires, on a $\boxed{\alpha_{n,n+1} = 1}$.

c) Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} [tP(t)]Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(t)[tQ(t)]e^{-t}\,\mathrm{d}t$, on a $\boxed{< XP, Q >=< P, XQ >}$.

d) Avec le **c)** , on a $< XP_n, P_k >=< P_n, XP_k >$. Comme $d^0P_k = k \leqslant n-2, d^0\,(XP_k) = k+1 \leqslant n-1$, donc $XP_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et d'après 9) on a $< XP_n, P_k >= 0$.

Or $< XP_n, P_k >= \alpha_{n,k} \cdot \|P_k\|^2 + 0$

Conclusion: $\boxed{\alpha_{1,k} = 0 \quad \forall k \leqslant n-2}$

e) $< XP_n, P_{n-1} >=< P_n, XP_{n-1} >= \displaystyle\int_0^{+\infty} (XP_{n-1}^{(n)}(t)t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t$ (grâce à $(*)$ du 9)).

Comme $XP_{n-1} = X^n + \cdots$, on a $(XP_{n-1})^{(n)} = n!$ d'où $< XP_n, P_{n-1} = n! \displaystyle\int_0^{+\infty} t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t = (n!)^2$

donc $\alpha_{n,n-1}\,\|P_{n-1}\|^2 = (n!)^2$

Or $\|P_{n-1}\|^2 =< P_{n-1}, P_{n-1} >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{P_{n-1}^{(n-1}(t)}_{=(n-1)!}\, t^{n-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = ((n-1)!)^2$. d'où $\boxed{\alpha_{n,n-1} = n^2}$.

Ensuite $< XP_n, P_n >=< X(X^n + aX^{n-1} + Q), P_n >$ et $d^oQ \leqslant n-2$.

Donc $< XP_n, P_n >=< X^{n+1}, P_n > +a < X^n, P_n > + \underbrace{< XQ, P_n >}_{=0}$.

Toujours grâce à (toujours $*$), on a :

$< X^n, P_n >= \displaystyle\int_0^{+\infty} n!t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t = (n!)^2$ et $< X^{n+1}, P_n >= \displaystyle\int_0^{+\infty} (n+1)!t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t = ((n+1)!)^2$

Calcul de a (on s'inspire de Schmidt) :

$P_n = X^n + aX^{n-1} + Q = X^n + aP_{n-1} + Q_1$ et $d^oQ_1 \leqslant n-2$.

Or $< P_n, P_{n-1} >= 0$, d'où $\underbrace{< X^n, P_{n-1} >}_{=(n!)^2} + a \underbrace{\|P_{n-1}\|^2}_{=((n-1)!)^2 \ et \ 10)} + \underbrace{< Q_1, P_{n-1} >}_{=0} = 0$

D'où $a = \dfrac{-(n!)^2}{((n-1)!)^2}$ et donc $\underline{a = -n^2}$.

Conséquence $< XP_n, P_n >= ((n+1)!)^2 - n^2(n!)^2 = \alpha_{n,n} \underbrace{\|P_n\|^2}_{=(n!)^2 \ et\ 10}$

Conclusion: $\boxed{\alpha_{n,n} = 2n+1}$

f) On a donc $XP_n = n^2 P_{n-1} + (2n+1)P_n + P_{n+1}$.

Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : P_{n+1} = (x-(2n+1))P_n - n^2 P_{n-1}}$

g) $\boxed{P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X - 1}$ (trouvés au **8)**)

On retrouve $\boxed{P_2 = (X-3)P_1 - P_0 = X^2 - 4X + 2}$ et l'on trouve

$$\boxed{P_3 = X^3 - 9X^2 + 18X - 6 \text{ et } P_4 = X^3 - 16X^3 + 72X^2 - 96X + 24}$$

14. a) On pourra "exploser" les intégrales car tout converge : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(t)e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$.

$< u(P), Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} [tP''(t) + (1-t)P'(t)]Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{[tP''(t) + P'(t)]}_{u'}\underbrace{Q(t)e^{-t}}_{v}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \Big(-tP'(t)Q(t)\Big)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

On remarque que $[tP''(t) + P'(t)] = [tP'(t)]'$, donc

$< u(P), Q > \underset{I.P.P.}{=} \Big[tP'(t)Q(t)e^{-t}\Big]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} [tP'(t)][Q'(t) - Q(t)]e^{-t}\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \Big(-tP'(t)Q(t)\Big)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

$\Big[tP'(t)Q(t)e^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 0 - 0 =$ par croissances comparées.

On en déduit que $< u(P), Q >= -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et cette **expression est symétrique en P et Q**.

Conclusion: $\boxed{\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 : < u(P), Q >=< P, u(Q) >}$.

b) $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $d^o(XP'' + (1-X)P') \leqslant \max(1+n-2, 1+n-1) \leqslant n$.

Conclusion: $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } u}$.

On déduit du **a)** que $\widehat{u_n}$ est autoadjoint (notion réservée à la dimension finie). En conséquence le **théorème spectral** assure que $\boxed{\widehat{u_n} \text{ est diagonalisable}}$

c) $\begin{cases} \forall k \geqslant 1 : u\left(X^k\right) = Xk(k-1)X^{k-2} + (1-X)kX^{k-1} = -kX^k + k^2X^{k-1} \\ u(1) = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\text{D'où } M_{B_n}(\widehat{u}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & n^2 \\ 0 & & & \ddots & -n \end{pmatrix} \text{ avec } B_n = (1, X, \ldots, X^n)}$$

Remarque : le matrice n'est pas symétrique : Pourquoi ?

d) Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, $\exists P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$ et $u(p) = \lambda P$.

Si on pose $n = d^\circ P \in \mathbb{N}$, on a (avec la matrice ci-dessus) : $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\widehat{u}_n) = [\![-n, 0]\!]$ d'où $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{Z}^-$.

Réciproquement si $-p \in \mathbb{Z}^-$ alors $-p \in Sp\,(\widehat{u}_p) \subset Sp(u)$ car $\widehat{u}_p(P) = u(P) = -pP$.

Conclusion: $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \mathbb{Z}^- = \{0 > -1 > -2 > \cdots > -n > \cdots\}}$

e) Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ et soit $(P,Q) \in E_\lambda^2$ avec P et Q non nuls.

Si on pose $n = \max\,(d^\circ P, d^\circ Q)$, on a $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et donc P et Q sont des vecteurs propres de $\widehat{u}_n$ d'où $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\widehat{u}_n)$.

Or $\chi_{\widehat{u}_n}(x) = -x(-1-x)\cdots(-n-x)$: les racines sont simples d'où

$(P,Q) \in E_\lambda\,(\widehat{u}_n)^2$ et $\dim E_\lambda\,(\widehat{u}_n) = 1$.

Conclusion: $\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \ : \ \dim E_\lambda = 1}$

Soit $P \in E_\lambda$ et $Q \in E_u$ avec $\underline{\ \lambda \neq u\ }$:

$< u(P), Q >=< P, u(Q >\Longrightarrow \lambda < P, Q >= \mu < P, Q >$
$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - u)}_{\neq 0} < P, Q >= 0 \Rightarrow < P, Q >= 0$ et donc $\boxed{E_\lambda \perp E_u}$.

f) En observant les matrices du **c)** pour $n = k$ et $n = k-$, il est clair que $\mu_k = -k$ est valeur propre de $\widehat{u}_k$ et **<u>non</u>** valeur propre de $\widehat{u}_{k-1}$.

Posons $E_{\mu_k} = \text{vect}\,(Q_h)$ avec Q_k unitaire. On a donc $Q_k \in \mathbb{R}_k[X]$ et $Q_k \notin \mathbb{R}_{k-1}[X]$ d'où $\underline{d^\circ Q_k = k}$.

On a donc $\begin{cases} d^0 Q_k = k \\ Q_k \text{ unitaire} \\ i \neq j : Q_i \perp Q_j \end{cases}$

Donc $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions du **II-7)**, d'où par unicité :

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \quad Q_n = P_n \ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad E_{-n} = \text{vect}\,(P_n)}$