exercice 1

1ère méthode : réduction $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A(x) = -\begin{vmatrix} 3-x & 2 & -2 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3-x & 2 & -2 \\ 0 & 1-x & 1-x \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} \; L_2+L_3$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} 3-x & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 3-x & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1+x & -x \end{vmatrix}$$

$C_2 - C_3$

$$= (x-1) \times \left[- \begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} \right]$$

$$= (x-1)(x^2-2x+1) = \underline{(x-1)^3} \rightarrow \text{non diagonalisable}$$

Par contre χ_A scindé donc trigonalisable ds $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$AX = X \iff \begin{cases} 2x+2y-2z=0 \\ -x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \iff x+y-z=0 \iff \begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=x+y \end{cases}$$

d'où $\underline{E_1 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

trapèze

Posons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $rg(u,v,w) = 3$

donc $b' = (u, v, w)$ base de $\mathbb{R}^3$

On a alors $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et ②

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ est l'image de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_b$

↑ 1 avec la trace

de la base b' or $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_b$ donc $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} -2 = a \\ 1 = b \\ 0 = a+b+1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si on pose $X_1 = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

$$X' = AX \iff X_1' = TX_1 \iff \begin{cases} x_1' = x_1 - 2z_1 \\ y_1' = y_1 + z_1 \\ z_1' = z_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid z_1 = \alpha e^t \\ x_1' = x_1 - 2\alpha e^t \\ y_1' = y_1 + \alpha e^t \end{cases} \iff \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid z_1 = \alpha e^t \\ \exists \beta \in \mathbb{R} \mid x_1 = \beta e^t - 2\alpha t e^t \\ \exists \gamma \in \mathbb{R} \mid y_1 = \gamma e^t + \alpha t e^t \end{cases}$$

$$\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid X_1 = e^t \begin{pmatrix} \beta - 2\alpha t \\ \gamma + \alpha t \\ \alpha \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{X(t) = PX_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \beta - 2\alpha t \\ \gamma + \alpha t \\ \beta + \gamma + \alpha - \alpha t \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3}$

cqs $\boxed{X_1(t) = e^t\begin{pmatrix}-2t\\ t\\ 1-t\end{pmatrix},\ X_2(t) = e^t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } X_3(t) = e^t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ forment une base de } \mathcal{S}_{\mathbb{R}}.}$

<u>Méthode 2</u> réduc + exponentielle :

$$T = I_3 + N \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad N^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

d'où $e^{tT} = e^{tI_3}e^{tN}$ et $e^{tA} = Pe^{tT}P^{-1}$

cqs $e^{tT} = e^t(I_3 + tN) = e^t\begin{pmatrix}1&0&-2t\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}$

d'où $e^{tA} = Pe^{tT}P^{-1} = e^t\begin{pmatrix}1+2t&2t&-2t\\-t&1-t&t\\t&t&1-t\end{pmatrix}$

d $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{t \mapsto e^t\begin{pmatrix}1+2t&2t&-2t\\-t&1-t&t\\t&t&1-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}}$

<u>Remarque</u> $Y_1(t) = e^t\begin{pmatrix}1+2t\\-t\\t\end{pmatrix}$, $Y_2(t) = e^t\begin{pmatrix}2t\\1-t\\t\end{pmatrix}$ et $Y_3(t) = e^t\begin{pmatrix}-2t\\t\\1-t\end{pmatrix}$

forment une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$

Lien avec méthode 1 : $Y_1 = X_2 - X_1$, $Y_2 = -X_1 + X_3$

et $Y_3 = X_1$.

Méthode 3 On combine pour avoir des éq. scalaires pour x, y ou z.

$$x'' = 3x' + 2y' - 2z'$$
$$= 3x' - 2x + 2z - 2x - 2y$$
$$= 3x' - 4x + 2z - 2y$$
$$= 3x' - 4x + 3x - x' \quad \text{avec } L_1$$
$$= 2x' - x \quad \text{d'où } \underline{x'' - 2x' + x = 0}$$

éq car : $r^2 - 2r + 1 = 0$

cqs $\underline{\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad x(t) = \alpha e^t + \beta t e^t}$

On en déduit que $y - z = \dfrac{x' - 3x}{2}$

$$= \frac{\alpha e^t + \beta e^t + \beta t e^t - 3\alpha e^t - 3\beta t e^t}{2}$$

$$= \frac{-2\alpha e^t + \beta e^t - 2\beta t e^t}{2}$$

d'autre part $L_2 + L_3$ donne $(y+z)' = (y+z)$ donc $\exists \gamma \in \mathbb{R}$

$$(y+z)(t) = \gamma e^t$$

d'où $\begin{cases} y(t) = \dfrac{1}{2}(y + z + y - z)(t) = \dfrac{1}{2}\gamma e^t - \dfrac{1}{2}\alpha e^t + \dfrac{1}{4}\beta e^t - \dfrac{\beta}{2} t e^t \\ z(t) = \text{———} - \text{———} = \dfrac{1}{2}\gamma e^t + \dfrac{1}{2}\alpha e^t - \dfrac{1}{4}\beta e^t + \dfrac{\beta}{2} t e^t \end{cases}$

cqs $X(t) = e^t \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2}\beta t \\ \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{4} + \frac{1}{2}\beta t \end{pmatrix}$.

Posons $Z_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $Z_2(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \end{pmatrix}$, $Z_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

on montre (avec cette méthode il faut le faire)

que (Z_1, Z_2, Z_3) base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$

<u>Lien avec méthode 1 :</u>

$Z_1 = X_2 - \frac{1}{2}X_3$, $Z_2 = -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_3$, $Z_3 = \frac{1}{2}X_3$

exo 2

Posons $c(x) = \cos x$ et $s(x) = \sin x$

On cherche une sol. particulière y_0 de (E) de la forme $y_0 = \lambda c + \mu s$ avec $y_0' = \lambda c' + \mu s'$

$$y_0 \text{ sol. de } (E) \iff \begin{cases} \lambda' c + \mu' s = 0 \\ \lambda' c' + \mu' s' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Par exemple avec les formules de Cramer :

$$\lambda' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & s \\ 1/x & s' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & s \\ c' & s' \end{vmatrix}} = \frac{-\sin x}{x} \quad \text{et} \quad \mu' = \frac{\cos x}{x}$$

Posons $\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\beta(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$

à l'aide d'une ipp, on montre que α et β existent et comme $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ et $t \longmapsto \frac{\cos t}{t}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, α et β sont C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0 : \alpha'(x) = -\frac{\sin x}{x} \text{ et } \beta'(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

cqfd $\boxed{y_0(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \text{ sol. de } (E)}$

exo 2 b) Analyse $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-tx} dt$ (2)

donc $f''(x) + f(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$

Synthèse : posons $g(x,t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ sur $A \times I$ avec $A = \mathbb{R}^{+*}$ et $I = \mathbb{R}^+$.

* Par TG, $g(\cdot, t)$ de classe C^2/A et

$g(\cdot, t)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, t)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\cdot, t)$ C^0/A

$g(x, \cdot)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \cdot)$ C^0/I.

* Intégrabilité

• $g(x, \cdot)$: en $+\infty$ $g(x,t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ comme $t \mapsto \frac{1}{t^2} \geq 0$ int. $/ [1, +\infty[$, par TC :

$g(x, \cdot)$ int. $/ I$, $\forall x > 0$

• $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$, en $+\infty$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-t}{1+t^2} e^{-tx} \underset{+\infty}{=} o(e^{-tx})$

comme $x > 0$, $t \mapsto e^{-tx} \geq 0$ int $/ I$ donc par TC :

$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ int $/ I$, $\forall x > 0$

exo 2 * HD $\forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\forall t \in [0,+\infty[$ ③

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2}{1+t^2}e^{-tx} \leq e^{-ta} = \varphi(t)$$

φ C^0 et int. $/I$

cqs f $C^2/\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x>0 : f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}e^{-tx}\,dt$

d'où $\forall x>0$ $f''(x)+f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$

cqs $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \setminus \forall x \in \mathbb{R}^{+*} : f(x) = y_0(x) + \lambda\cos x + \mu \sin x$

en $+\infty$: * par TG, $\lim y_0(x) = 0 - 0 = 0$

* $\forall x>0$ $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

TE

* $\lambda\cos x + \mu \sin x = f(x) - y_0(x)$ doit donc converger vers 0 en $+\infty$. $f(2n\pi) - y_0(2n\pi) = \lambda \longrightarrow 0$ (crit. séq.)

donc $\lambda = 0$, de $\hat{m}$ avec $2n\pi + \pi/2$: $\mu = 0$

d° $\boxed{\forall x>0 \quad f(x) = y_0(x)}$

exo 2 c) <u>Etude en 0</u>

* On reprend la fonction g : on a la continuité sur $\bar{A} = [0,+\infty[$ et on a la HD pour g :

$$\forall x \geq 0,\ \forall t \in [0,+\infty[\quad |g(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

φ C^0 et int$/\mathbb{R}^+$ $\left(\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \geq 0\right)$ d'où

$$f\ C^0/\mathbb{R}^+ \text{ et } f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\operatorname{Arctan} t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

* $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en 0, donc avec la a), $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ existe et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \alpha(x) = I$

* $$\sin x \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt = \sin x \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,dt + \underbrace{\sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt}_{\underset{x \overset{>}{\to} 0}{\longrightarrow} 0}$$

comme $\frac{\cos t}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t} \geq 0$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ non int$/]0,1]$,

par <u>I.R.C.</u> : $\int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,dt \underset{0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\ln x$

d'où $\sin x \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,dt \sim -x \ln x \underset{x \overset{>}{\to} 0}{\overset{c.c.}{\longrightarrow}} 0$

exo 2

tqs tout cvg "dans $\mathbb{R}$", d'où lorsque $x \to 0$:

$$f(x) = \cos x \,\alpha(x) + \sin x \,\beta(x)$$

$x \to 0$: $\frac{\pi}{2} = 1 \times I + 0$

d'où $\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}}$

Centrale PSI 2006

I A 1) Notons $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (F_h)

On a $\boxed{\mathcal{S}_0 = \{ x \longmapsto \lambda \cos x + \mu \sin x \,,\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}}$

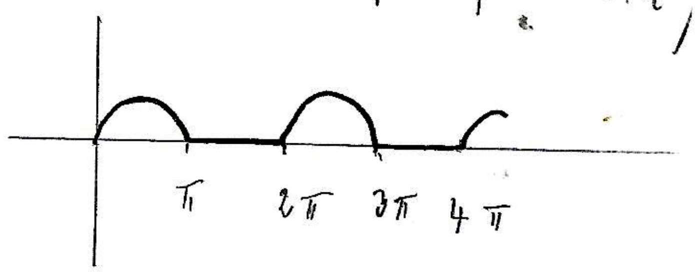
I A 2) On recherche une solution particulière de $y'' + y = e^{ix}$ de la forme $g(x) = a x e^{ix}$ car i est racine de l'équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$.

$2aie^{ix} - axe^{ix} + \cancel{axe^{ix}} = e^{ix}$ donc $a = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$

d'où $x \mapsto \mathrm{Re}\left(\frac{-i}{2} x e^{ix}\right) = \frac{+1}{2} x \sin x$ est solution de F_h

d'où $\boxed{\mathcal{S}_h = \{ x \longmapsto \frac{x}{2} \sin x + \lambda \cos x + \mu \sin x \,,\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}}$

I A 3) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi} h(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \pi} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2\pi} h(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} = 0$ donc avec TG, h est continue sur $[0, 2\pi]$ et par périodicité, h est continue sur $\mathbb{R}^+$.



Le théorème de cvg normale assure que : 1

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1} \cos 2px}$$

Pour $x = 0$, on obtient :

$$0 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1} \quad \text{donc} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}}$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1} \quad \text{donc} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}}$$

$\boxed{c)}$ On cherche une solution φ solution de :

2

$$y'' + y = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1}\cdot \cos 2px$$

Une solution de $y'' + y = \frac{1}{\pi}$ est $\varphi_0 : x \longmapsto \frac{1}{\pi}$

——— $y'' + y = \frac{\sin x}{2}$ est (idem A2)

$$\varphi_2 : x \longmapsto -\frac{1}{4} x \cos x$$

Une solution de $y'' + y = e^{i2px}$, $p \in \mathbb{N}^*$ est : $\dfrac{e^{2ipx}}{-4p^2+1}$

d'où une solution de $y'' + y = \dfrac{-2}{\pi} \dfrac{\cos 2px}{4p^2-1}$ est

$$\psi_p : x \longmapsto + \frac{2}{\pi} \frac{\cos 2px}{(4p^2-1)^2} \quad C^2/\mathbb{R} \ (TG)$$

Les séries $(\sum \psi_p)$, $(\sum \psi_p')$ c.s. sur $\mathbb{R}$ $\left(O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)$ par TC.

$\forall p \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \ |\psi_p''(x)| \leq \dfrac{2}{\pi} \dfrac{4p^2}{(4p^2-1)^2} = \alpha_p$ et $(\sum \alpha_p)$ cvg

donc $(\sum \psi_p'')$ CN$/\mathbb{R}$ d'où :

d'où par th. de dérivation et principe de superposition des solutions :

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{x\cos x}{4} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2px}{(4p^2-1)^2} \\ \text{est solution de } y'' + y = h \end{array}}$$

2'

d) On a donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_h)} = \varphi + \mathrm{vect}(\cos, \sin)}$$

I B $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \mid \forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x$

et $f(0)=a \Rightarrow \lambda=a$ et $f'(0)=b \Rightarrow \mu=b$

d'où $\forall x\in\mathbb{R} : f(x)=a\cos x+b\sin x$ donc

$\forall x\in\mathbb{R}\ |f(x)| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x}$ inégalité de Cauchy-Schwarz

$\leq \|(a,b)\|$

cl : $\boxed{f\in B \text{ et } \|f\|_\infty \leq \|(a,b)\|}$

rem. on pouvait aussi transformer à la physique :

$a\cos x+b\sin x = M\cos(x+\varphi)$ et $M=\sqrt{a^2+b^2}$

I.C

voir p 4 cl : $\boxed{S_h=\{f_0+\lambda\cos+\mu\sin,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}}$

I D Avec les notations ci dessus

$f(0)=f_0(0)+\lambda=\lambda=0$ donc $\mu=0$

$f'(0)=f_0'(0)+\mu=0$

comme $f_0(x)=-\cos x\int_0^x h(t)\sin t\,dt+\sin x\int_0^x h(t)\cos t\,dt$, $f_0'(0)=0$

4

Comme h n'est pas de la forme $e^{\alpha x} P(x)$, effectuons la méthode de variation des 2 constantes : on cherche

$f_0 = \lambda \cos + \mu \sin$ avec $\begin{cases} \lambda' \cos + \mu' \sin = 0 \\ \lambda' \cos' + \mu' \sin' = h \end{cases}$

donc $\begin{cases} \lambda' \cos + \mu' \sin = 0 \\ -\lambda' \sin + \mu' \cos = h \end{cases}$ soit $\begin{cases} \lambda' = -h \sin \\ \mu' = h \cos \end{cases}$

d'où $f_0(x) = -\cos x \int_0^x h(t) \sin t \, dt + \sin x \int_0^x h(t) \cos t \, dt$

$$= \int_0^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) h(t) \, dt$$

donc $\underline{f_0(x) = \int_0^x \sin(x-t) h(t) \, dt}$

donc $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f(t) = \int_0^t h(u)\sin(t-u)\,du$

d'où $\longrightarrow \quad |f(t)| \leq \int_0^t |h(u)|\,du \leq \int_0^{+\infty} |h| = \|h\|_1$

car $h \in L^1$

cl° : $\boxed{f \in B \text{ et } \|f\|_\infty \leq \|h\|_1 \leq \sqrt{2}\,\|h\|_1}$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, \eta = \varepsilon > 0 \mid \forall h \in L^1$, $\|h\|_1 \leq \eta$ alors

$\forall f$ sol. de $(F_h) \mid f(0) = f'(0) = 0$, $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \|h\|_1 \leq \eta \leq \varepsilon$

cl°. $\boxed{(F_h) \text{ est stable \% second membre au sens 1.}}$

I.E Avec le I A2, $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \delta \frac{t}{2} \sin t + \lambda \cos t + \mu \sin t$

pour $t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \delta\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) + \mu \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

donc f non bornée sur $\mathbb{R}$

de plus $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}{\pi/2 + 2n\pi} = \dfrac{\delta(\pi/4 + n\pi) + \mu}{\pi/2 + 2n\pi} \longrightarrow \dfrac{\delta}{2} \neq 0$

cl° $\boxed{f(t) \neq \underset{+\infty}{o}(t)}$ par contraposée du critère séquentiel.

(5)

csq $\exists\, \varepsilon = \frac{\delta}{4} > 0$, $\forall \eta > 0$ $\exists\, h : t \mapsto \delta$ est $h \in \mathcal{B}$ et

si f sol. de F_h, $f(0) = f'(0) = 0$ alors $f(t) = \frac{\delta}{2} t \sin t$

non bornée donc $f \notin \mathcal{B}$.

cl° : $\boxed{(F_0) \text{ non stable \% au 2nd membre au sens } \alpha.}$

$\boxed{\text{II A}}$ Posons $f(\alpha, t) = \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ $\quad f(\alpha, \cdot)$ est continue $/\mathbb{R}^+$

et en $+\infty$: $f(\alpha, t) \underset{t \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ car $\alpha > 0$ et comme

$\alpha > 1$, $f(\alpha, \cdot)$ est intégrable$/\mathbb{R}_+$ par T.C.

donc $\boxed{I \text{ est définie sur }]1, +\infty[= J}$

* f est continue % à α sur J, continue/m.ex % t sur $\mathbb{R}^+$

* $\forall a > 1$ $\forall \alpha \in [a, +\infty[$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$|f(\alpha, t)| \leq \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ \dfrac{1}{t^a} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{array} \right) \varphi(t)$$

φ est C^0 lm cx sur $[0, +\infty[$ et intégrable $/ [0, +\infty[$

$\left(\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^a} \text{ et } a > 1 \right)$

par théorème de continuité, $\boxed{I \text{ est continue sur }]1, +\infty[}$

II.B.1) * $t \longmapsto \frac{g'(t)}{g(t)}$ est continue car g C^0 sur $\mathbb{C}^*$ et g'

de classe C^{k-1} et $k-1 \geq 1$; On conclut avec T.G.

* Toute fonction C^0 admet des primitives.

* $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $(ge^{-A})'(t) = g'(t)e^{-A(t)} - g(t)A'(t)e^{-A(t)}$

$= e^{-A(t)}\left(g'(t) - g(t)\frac{g'(t)}{g(t)}\right) = 0$

Comme $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, $\boxed{ge^{-A} \text{ est constante sur } \mathbb{R}^+.}$

II.B.2) $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \forall t \in \mathbb{R}^+ :$ $g(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda e^{B(t) + iC(t)}$

Comme $g(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{C}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ d'où $\exists \rho > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tq.

$\lambda = \rho e^{i\alpha}$. Posons $r(t) = \rho e^{B(t)}$ et $\theta(t) = \alpha + C(t)$

Comme $\frac{g'}{g}$ est C^{k-1} sur $\mathbb{R}^+$, A est C^k sur $\mathbb{R}^+$.

Donc B et C et par TG, r et θ sont C^k sur $\mathbb{R}^+$.

de plus $\forall t \in \mathbb{R}^+ : r(t) \in \mathbb{R}_+^*$

cl : $\boxed{\exists r \in C^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*) \text{ et } \exists \theta \in C^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \setminus \ g = re^{i\theta}}$

II C 1) f est solution de $y'' - qy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^+$, non nulle.

posons $g = f + if'$

* $\forall t \in \mathbb{R}^+$, si $g(t) = 0$ alors $f(t) = f'(t) = 0$ et par unicité du pb de Cauchy du 2^{nd} ordre : $f = 0$ fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

absurde donc $g(t) \neq 0$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^*$.

* $f'' = qf' - f$ donc f'' est $C^0/_{\mathbb{R}^+}$ d'où f est $C^1/_{\mathbb{R}^+}$

Donc g est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (en fait $C^\infty/_{\mathbb{R}^+}$)

* Le II B assure l'existence de r et θ $C^1/_{\mathbb{R}^+}$

tel que $g = re^{i\theta}$, en égalisant partie réelle et imaginaire

$\underline{d}$ $\boxed{\exists r \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^*_+) \ \& \ \exists \theta \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \setminus \begin{array}{l} g = r\cos\theta \\ g' = r\sin\theta \end{array}}$ (3)

On a $\left| \begin{array}{l} g^2 + g'^2 = r^2 \\ r > 0 \end{array} \right.$ donc $\boxed{r = \sqrt{g^2 + g'^2}}$

$\boxed{\text{II C 2)}}$ On a $\begin{cases} g' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta & (L_1) \\ g'' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta & (L_2) \end{cases}$

Combinons les 2 égalités pour avoir θ' :

$(-\sin\theta)L_1 + (\cos\theta)L_2$ donne $-\sin\theta g' + \cos\theta g'' = \theta' r$

donc $r\theta' = -\sin\theta(r\sin\theta) + \cos\theta(qg' - g)$

$= r[-\sin^2\theta + q\cos\theta\sin\theta - \cos^2\theta]$

Comme $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $r(t) > 0$ on a :

$$\boxed{\theta' = -1 + q\cos\theta\sin\theta}$$

$\boxed{\text{II C 3)}}$ On combine (L_1) & (L_2) ci-dessus pour avoir r' :

$\cos\theta L_1 + \sin\theta L_2$ donne $\cos\theta g' + \sin\theta g'' = r'$

donc $r' = r\,\cancel{\cos\theta}\sin\theta + \sin\theta\,(q\,\rho' - \cancel{\rho})$

cl : $\boxed{r' = q\,r\sin^2\theta}$

II C 4) $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $r'(t) \geq 0$ donc r est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Par T.L.M., r admet une limite ℓ (éventuellement ∞) en $+$ l'infini. On a $\ell \geq r(0) > 0$ (si $r(0) = 0$ alors $\rho = 0$)

De plus : $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $\dfrac{r'(t)}{r(t)} = q(t)\sin^2\theta(t) \leq q(t)$

d'où $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $\displaystyle\int_0^t \frac{r'(u)}{r(u)}\,du \leq \int_0^t q(u)\,du \leq \int_0^{+\infty} q = I(\alpha)$

car $q>0$

donc $\forall t \in \mathbb{R}^+$: $\ln r(t) - \ln r(0) \leq I(\alpha)$

— : $r(t) \leq r(0)\,e^{I(\alpha)} = M$

csq r est majoré par M

cl $\boxed{r \text{ cvg en } +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} r \leq r(0)\,e^{I(\alpha)}}$

$\forall t \in \mathbb{R}^+$ $|\rho(t)| \leq \sqrt{\rho^2(t) + \rho'(t)^2} = r(t) \leq r(0)\,e^{I(\alpha)}$

On $r(0) = \sqrt{f(0)^2 + f'(0)^2} = \|(f(0), f'(0))\|$

On fait de même avec f'

d'où $\boxed{f \text{ \& } f' \text{ bornées par } \|(f(0), f'(0))\| e^{I(0)}}$

II C 5) Avec la II C 2, $\forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$\theta(t) + t = \int_0^t q(u) \sin\theta(u) \cos\theta(u)\, du + \text{cste}$$

Or $q(u) \sin\theta(u) \cos\theta(u) \underset{+\infty}{=} O(q(u))$ donc par TC,

$u \mapsto q(u) \sin\theta(u) \cos\theta(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc

$t \mapsto \int_0^t q(u) \sin\theta(u) \cos\theta(u)\, du$ cvg en $+\infty$

d'où $\boxed{t \mapsto \theta(t) + t \text{ admet une limite en } +\infty}$

II C 6) On a $r(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \alpha$ & $\theta(t) + t \xrightarrow[t \to \infty]{} \beta$

d'où $r(t) = \alpha + o(1)$ & $\theta(t) = -t + \beta + o(1)$ en $+\infty$

donc $f(t) = (\alpha + o(1)) \cos(-t + \beta + o(1))$
$= \alpha \cos(t - \beta + o(1)) + o(1)$

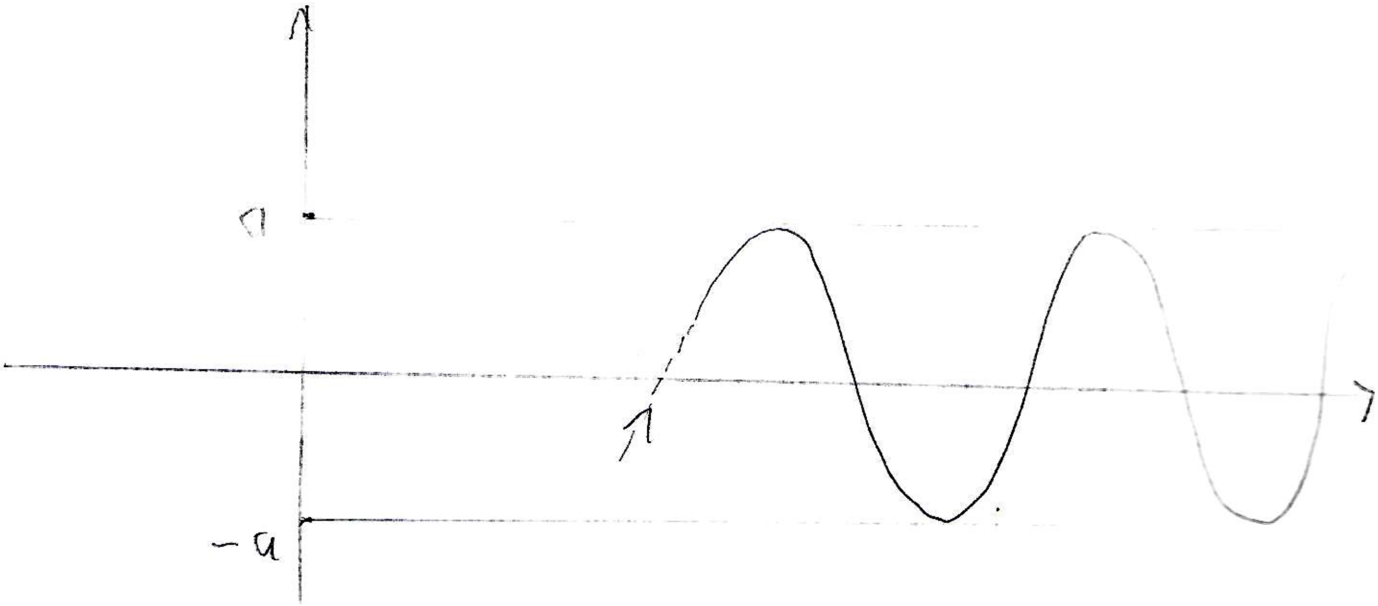
donc $f(t) = \alpha \cos(t-\beta) \underbrace{\cos o(1)}_{\sim 1} - \alpha \sin(t-\beta) \underbrace{\sin o(1)}_{o(1)} + o(1)$

$= \alpha \cos(t-\beta)(1+o(1)) + o(1)$

$= \alpha \cos(t-\beta) + o(1)$

Posons $a = \alpha$ et $b = -\beta$

On a $\boxed{\lim_{t \to \infty} (f(t) - a\cos(t+b)) = 0}$



III A D'après le II, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t)| = |r(t) \cos \theta(t)|$

$\leq |r(0)| e^{I(a)}$

et $|r(0)| = r(0) = \|(f(0), f'(0))\|$

d'où $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{e^{I(a)}} > 0 \mid \|(f(0), f'(0))\| \leq \eta \Rightarrow \|f\|_\infty \leq \varepsilon}$

III B 1) $w = f_1 f'_2 - f_2 f'_1$

$$w' = \cancel{f'_1 f'_2} + f_1 f''_2 - \cancel{f'_2 f'_1} - f_2 f''_1$$

$$= f_1 (q f'_2 - f_2) - f_2 (q f'_1 - f_1)$$

$$= q w \qquad \text{d'où} \quad \boxed{w' = q w}$$

On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ | $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $w(t) = \lambda e^{\int_0^t q(u)du}$

Comme (f_1, f_2) est un système fondamental de $(E_{\alpha,0})$,

$\forall t \in \mathbb{R}^+$ $w(t) \neq 0$ donc $\lambda \neq 0$ d'où $|w(t)| \geq |\lambda| > 0$

posons $a = |\lambda|$ et $b = |\lambda| e^{\int_0^{+\infty} q} = |\lambda| e^{I(\alpha)}$ $\quad e^{\int_0^t q} \geq 1$ car $q \geq 0$

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 < a \leq |w(x)| \leq b}$

III B 2) Soit $f_0 = -C_1 f_1 + C_2 f_2$ où C_1 & C_2 sont définis comme dans l'énoncé. Montrons que f_0 est solution de $(E_{\alpha,h})$

$$f'_0 = \underbrace{-C'_1 f_1 - C_1 f'_1 + C'_2 f_2}_{+\ =0} + C_2 f'_2 = -C_1 f'_1 + C_2 f'_2$$

$$f_0'' = -c_1' f_1' + c_2' f_2' - c_1 f_1'' + c_2 f_2''$$

$$= -\frac{h f_2}{w} f_1' + \frac{h f_1}{w} f_2' - c_1 f_1'' + c_2 f_2''$$

$$= h - c_1 f_1'' + c_2 f_2''$$

donc $f_0'' - q f_0' + f_0 = h - c_1 (\underbrace{f_1'' - q f_1' + f_1}_{=0}) + c_2 (\underbrace{f_2'' - q f_2' + f_2}_{=0})$

$$= h$$

donc f_0 est solution de $(E_{\alpha,h})$. On conclut que

f solution de $(E_{\alpha,h})$ ssi $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$ $f = f_0 + \lambda f_1 + \mu f_2$

donc $f = (\underbrace{-c_1 + \lambda}_{\text{primitive de } \frac{h f_2}{w}}) f_1 + (\underbrace{c_2 + \mu}_{\text{primitive de } \frac{h f_1}{w}}) f_2$

cl° : $\boxed{f \text{ solution de } (E_{\alpha,h}) \Leftrightarrow f = -c_1 f_1 + c_2 f_2 \text{ où } c_1 \text{ primitive de } \frac{h f_2}{w},\ c_2 \text{ primitive de } \frac{h f_1}{w}}$

III 3)

$$\begin{cases} f(0) = 0 = -c_1(0) f_1(0) + c_2(0) f_2(0) \\ f'(0) = 0 = -c_1(0) f_1'(0) + c_2(0) f_2'(0) \end{cases}$$

Le déterminant du système en $c_1(0)$, $c_2(0)$ est

$W(0) \neq 0$ donc $c_1(0) = c_2(0) = 0$

cl° : $\boxed{\text{La CNS est } c_1(0) = c_2(0) = 0}$

III B 4) Vu les questions précédentes, $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$f(t) = \int_0^t \left[\underbrace{\left(-\frac{h(u)}{w(u)} f_2(u) \right)}_{} f_1(t) + \left(\frac{h(u)}{w(u)} f_1(u) \right) f_2(t) \right] dt$$

primitive de $-\frac{h}{w} f_2$ s'annulant en 0.

On a vu au II C 4 que f_1 et f_2 sont bornées :

$\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid \|f_1\|_\infty \leq M$ et $\|f_2\|_\infty \leq M$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}^+$: $|f(t)| \leq \int_0^t 2 \frac{|h(u)|}{a} M^2 dt$

$$\leq \frac{2M^2}{a} \int_0^{+\infty} |h|$$

cl° : $\boxed{f \in B \text{ et } \|f\|_\infty \leq C \|h\|_1 \text{ avec } C = \frac{2M^2}{a}}$

On conclut exactement comme au I D $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta = \frac{\varepsilon}{C} > 0 \ldots$

III c 1) On a $f'' - qf' + f = \lambda \cos t$

$$g'' \quad + g = \lambda \cos t$$

d'où $(f-g)'' - qf' + (f-g) = 0$

donc $(f-g)'' - q(f-g)' + (f-g) = qg'$

Soit $\underline{\phi'' - q\phi' + \phi = qg'}$: $\boxed{\phi \text{ sol. de } E_{\alpha, qg'}}$

Posons $h : t \longmapsto q(t) g'(t)$ par TG $h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

(q C^0 et g C^2)

Vu la I A 2 $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}^+$:

$g(t) = \frac{t}{2} \sin t + \lambda \cos t + \mu \sin t$ donc

$g'(t) = \frac{1}{2} \sin t + \frac{t}{2} \cos t - \lambda \sin t + \mu \cos t$

d'où $|q(t) g'(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^\alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2} + |\lambda| + |\mu| \right)$

$\xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ car $\alpha > 1$,

et $\boxed{h(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0}$

C.2 c'est comme Cesaro ou les sommations de relation de comparaison.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0 \mid \forall u \geq A \quad |h(u)| \leq \varepsilon/2$

donc $\forall t \geq A$: $\frac{1}{t}\int_0^t |h(u)|du \leq \frac{1}{t}\int_0^A |h| + \frac{1}{t}\int_A^t \varepsilon/2$

$$\leq \frac{K}{t} + \frac{t-A}{t}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{K}{t} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad K = \int_0^A |h|$$

or $\frac{K}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ donc $\exists B > 0 \mid \forall t \geq B \quad \frac{K}{t} < \frac{\varepsilon}{2}$

cqg $\forall t \geq \max(A, B) \quad \frac{1}{t}\int_0^t |h| \leq \varepsilon$

cl $\boxed{\int_0^t |h| \underset{+\infty}{=} o(t)}$

C.3 D'après le III B2, $\exists c_1$ primitive de $\frac{h f_2}{w}$

$\exists c_2$ —— $\frac{h f_1}{w}$

$\phi = -c_1 f_1 + c_2 f_2$

donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ | $\forall t \geq 0$:

$$\phi(t) = \left(-\int_0^t \frac{h f_2}{w} + \lambda\right) f_1(t) + \left(\int_0^t \frac{h f_1}{w} + \mu\right) f_2(t)$$

$$= \int_0^t \frac{h(u)}{w(u)} \left[f_1(u) f_2(t) - f_2(u) f_1(t)\right] du + \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$$

Or f_1 et f_2 sont bornées (II C 4) et $0 < a \leq w \leq b$

donc $\exists M$ | $\|f_1\|_\infty < M$ & $\|f_2\|_\infty \leq M$

donc $\forall t > 0$ $|\phi(t)| \leq \int_0^t \frac{|h(u)|}{a} (M^2 + M^2) du + |\lambda| M + |\mu| M$

d'où
$$0 \leq \frac{1}{t}|\phi(t)| \leq \underbrace{\left[\frac{1}{t}\int_0^t |h|\right] \times \frac{2M^2}{a} + \frac{M(|\lambda| + |\mu|)}{t}}_{\xrightarrow[t \to \infty]{} 0}$$

Par th. d'encad. $\frac{\phi(t)}{t} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ cl : $\boxed{\phi(t) \underset{+\infty}{=} o(t)}$

$\boxed{\text{C. 4}}$ Par l'absurde si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ ...

On prend $\lambda = \eta > 0$. Avec les notations de ce III C,

$f = g + \phi$

Avec le I $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall t \geq 0 \; g(t) = \frac{t}{2} \sin t + \alpha \cos t + \beta \sin t$

et $\phi(t) \underset{+\infty}{=} o(t)$

d'où $f(2n\pi + \pi/2) = \frac{2n + \pi/2}{2} + o(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

cq f non bornée $/\mathbb{R}^+$

cl : $\boxed{E_{\alpha, c} \text{ non stable \% au 2nd membre au sens } \infty}$

$\boxed{\text{III D 1}}$ On a :

$$f'' - \frac{1}{1+t^\alpha} f' + f = 0$$

$$g'' - \frac{1}{1+t^\beta} g' + g = 0$$

donc $(f-g)'' - \frac{1}{1+t^\alpha} f' + \frac{1}{1+t^\beta} g' + (f-g) = 0$

d'où $\boxed{\phi'' - \frac{1}{1+t^\alpha}\phi' + \phi = \left(\frac{1}{1+t^\alpha} - \frac{1}{1+t^\beta}\right) g'(t)}$

donc ϕ sol. de $E_{\alpha, h}$ avec h

$\boxed{\text{III D 1)}}$ * Par TG, h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

* D'après le II C 4) g' est bornée et donc

$h(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^\beta}\right)$ et comme $\alpha > 1$ et $\beta > 1$,

par TC et linéarité, h int. $/\mathbb{R}^+$ soit $\boxed{h \in L^1}$

$\forall t > 1$, $\int_0^t |h| \leqslant \|g'\|_\infty \times \int_0^t \left|\frac{1}{1+u^\alpha} - \frac{1}{1+u^\beta}\right| du$

* D'après le II C 4, $\|g'\| \leqslant \|(a,b)\| e^{I(\beta)}$

* Avec le T. A. F., $\frac{1}{1+u^\alpha} - \frac{1}{1+u^\beta} = (\alpha - \beta)\left(\frac{-\ln u \cdot u^c}{(1+u^c)^2}\right)$

avec $c \in]\alpha, \beta[$

On a donc $u \longmapsto \frac{1}{1+u^\alpha} - \frac{1}{1+u^\beta}$ de <u>signe constant</u>

sur $u \in]0,1[$ et $u \in]1, +\infty[$

d'où $$\int_0^t |h| \leq \|(a,b)\| e^{I(\beta)} \times \left[\left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+u^\alpha} - \frac{1}{1+u^\beta}\right) du \right| + \left| \int_1^t \left(\frac{1}{1+u^\alpha} - \frac{1}{1+u^\beta}\right) du \right| \right]$$

soit $$\begin{cases} \forall t > 1 \\ \displaystyle\int_0^t |h| \leq \|(a,b)\| e^{I(\beta)} \left[|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \right] \end{cases}$$

qd $t \to +\infty$, il vient :

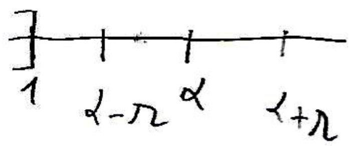
$$\boxed{\|h\|_1 \leq \|(a,b)\| e^{I(\beta)} \left[|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \right]}$$

III D 3 D'après le III D 4,

$$\|f-g\|_\infty \leq C \|h\|_1$$

$$\leq C \|(a,b)\| e^{I(\beta)} \left[|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \right]$$

Soit $M = \sup_{\beta \in [\alpha - r, \alpha + r]} I(\beta)$ (M existe car I $C^0 /]1, +\infty[$) avec $r = \frac{\alpha - 1}{2}$



d'où $\forall \beta \in [\alpha - r, \alpha + r]$: $\|f-g\|_\infty \leq C \|(a,b)\| e^{M} \left[|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \right]$

Comme J et K sont $C^0 /]1, +\infty[$

$\exists r' > 0 \mid \forall \beta \in [\alpha - r', \alpha + r']$

$$C \|(a,b)\| e^{\eta} \left(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \right) \leq \varepsilon$$

Csq $\forall \beta > 1$ tq $|\alpha - \beta| \leq \min(r, r')$

$$\|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

cl : $\boxed{E_{\alpha,0} \text{ est stable \% au paramètre}}$