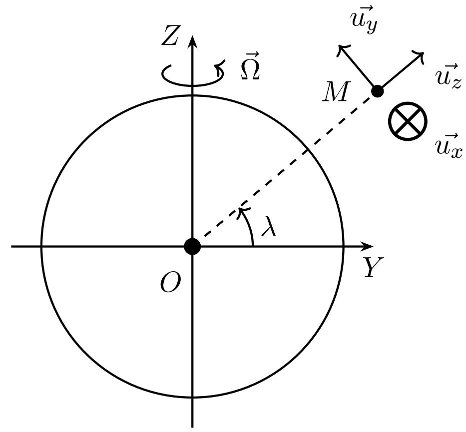
DM 10
Mécanique

Exercice 1 : Déviation vers l'est

On étudie le mouvement de chute libre (sans frottements) d'un point M de masse m dans le référentiel terrestre, non galiléen. Le point M est laché d'une hauteur h par rapport à la surface terrestre, sans vitesse initiale.



On note $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_Z$ le vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique considéré comme galiléen. L'expérience a lieu en un point de latitude λ et on se place dans la base de projection mobile $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ inclut le champ de gravitation terrestre et le terme dû à la force d'inertie d'entrainement. Pour les applications numériques, on prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Q.1 Exprimer la force d'inertie de Coriolis qui s'applique au point M dans le référentiel terrestre.

Q.2 Calculer la valeur v de la vitesse verticale qui donne une force d'inertie de Coriolis $\vec{f_{ic}}$ égale à 1% du poids de M.

Q.3 Étant donné la valeur de cette vitesse, simplifier l'expression de la force de Coriolis.

Q.4 Écrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre non galiléen et en déduire les équations du mouvement. En déduire la déviation vers l'est x_E lorsque le point touche le sol.

Q.5 Effectuer l'application numérique pour une hauteur initiale $h = 10\,\mathrm{m}$ à l'équateur. Comment évolue cette déviation si on déplace l'endroit d'où le point M est laché (vers le nord, vers le sud, changement d'hémisphère) ?

Q.6 Les expériences montrent que la déviation vers l'est mesurée est conforme à la prédiction théorique, mais le point ne tombe cependant pas exactement à l'endroit prévu, laissant prévoir un second type de déviation. Dans quelle direction s'effectue cette seconde déviation ? Comment est-elle modifiée en se déplacant le long d'un méridien ?

Exercice 2 : Station spatiale

Une station spatiale est sur une orbite circulaire autour de la Terre. Le mouvement de la station est étudié dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$, d'origine O et considéré comme galiléen. La station est en rotation synchrone autour de la Terre, c'est-à-dire que la partie de la station qui est dirigée vers la Terre est toujours la même. La position de la station dans $\mathcal{R}_G$ est notée $\overrightarrow{OS} = \vec{R}$ de norme constante et son vecteur rotation est $\vec{\omega} = \omega\vec{u_z}$.

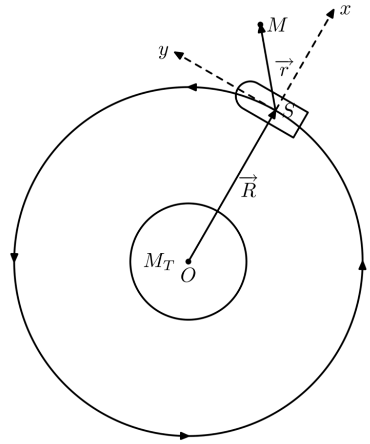
Q.1 Énoncer le principe d'inertie en rappelant la définition d'un référentiel galiléen.

Q.2 Définir le référentiel géocentrique. Sur quelle échelle de temps (en ordre de grandeur) ce référentiel peut-il être considéré comme galiléen ?

Q.3 Montrer que le mouvement de la station s'effectue à vitesse de rotation constante et calculer cette vitesse angulaire en fonction de la masse M_T de la Terre, du rayon R de la trajectoire et de la constante de gravitation universelle G.

Q.4 La station spatiale internationale est située à une altitude d'environ 400 km. Calculer sa vitesse angulaire et sa période de rotation.
Données : Rayon terrestre $R_T = 6400\,\text{km}$; pesanteur terrestre à la surface du globe $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

On note $\mathcal{R}'$ le référentiel lié à la station. L'origine de ce référentiel est situé au centre de masse S de la station, l'axe (Sx) est dirigé suivant le vecteur $\overrightarrow{OS}$, l'axe (Sz) est porté par le vecteur rotation de la station et l'axe (Sy) complète la base orthonormée directe (voir schéma ci-contre).



On se propose d'étudier le mouvement d'un point M de masse m qui se déplace dans le plan Sxy autour de la station. La position du point M dans $\mathcal{R}'$ est notée $\overrightarrow{SM} = \vec{r}$ telle que $r \ll R$.

Q.5 Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ? (justifier la réponse)

Q.6 Définir et exprimer l'accélération d'entraînement de M dans $\mathcal{R}'$ notée $\vec{a}_e$ en fonction de $\vec{r}$, $\vec{R}$ et ω. En déduire la force d'inertie d'entraînement $\vec{f_{ie}}$ qui s'applique sur le point M dans $\mathcal{R}'$.

Q.7 Si la particule M est animé d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$ de la station, comment s'appelle la force d'inertie supplémentaire qui lui est appliquée ? Exprimer cette force en fonction de m, $\vec{\omega}$ et $\vec{v}$.

On peut montrer (ne pas le faire) que la force d'attraction qu'exerce la Terre sur le point M est donnée par :

$$\vec{F} \approx -m\omega^2\left(\vec{R} + \vec{r} - 3x\vec{u_x}\right)$$

où x est la coordonnée du point M sur l'axe (Sx).

Q.8 Établir l'équation du mouvement du point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et la mettre sous la forme de deux équations différentielles pour les variables x et y.

Q.9 Le point M est une balle lancée depuis l'origine S de $\mathcal{R}'$ en direction de la Terre avec une vitesse relative initiale $\vec{v_0} = -v_0\vec{u_x}$. Intégrer les équations de la question précédente et montrer que la trajectoire suivie dans $\mathcal{R}'$ est une ellipse (préciser le demi-grand axe, le demi-petit axe et la période de parcours).