

DS 7 (4 heures)
Optique, Mécanique

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1-2	1	-3.3%
3-4	2	-6.7%
5-6	3	-10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles

L'annonce de la découverte des ondes gravitationnelles le 11 février 2016, 100 ans après la prédiction de leur existence par Albert Einstein, fut un événement scientifique majeur de la décennie. Leur détection non seulement valide une prédiction importante de la théorie de la Relativité Générale énoncée en 1916, mais aussi couronne des décennies de prouesses technologiques pour construire des détecteurs capables d'enregistrer leur passage, et ouvre l'ère de l'astronomie gravitationnelle.

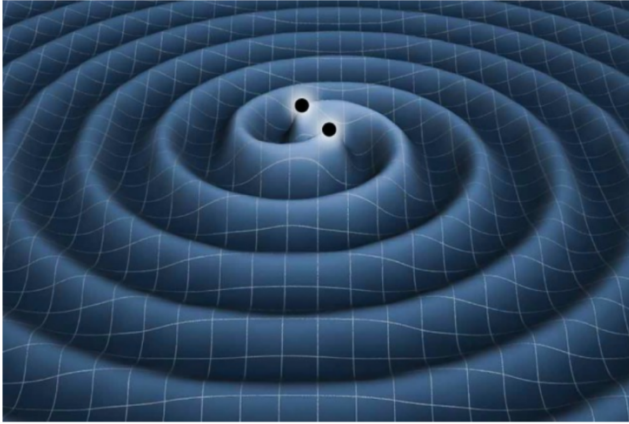


FIGURE 1 – Gauche : illustration représentant les ondes gravitationnelles générées par deux trous noirs orbitant l'un autour de l'autre et se propageant dans l'espace. Droite : détecteur interférométrique européen Virgo situé près de Pise en Italie.

La détection a été réalisée à l'aide d'un détecteur dit interférométrique. Celui-ci est fondé sur la notion d'interférence lumineuse. La lumière étant une onde, elle peut interférer avec elle-même tout comme les ondes mécaniques ou acoustiques. Suivant le déphasage entre deux ondes lumineuses, les interférences peuvent être constructives (renforcement de l'intensité lumineuse) ou destructives (intensité lumineuse nulle). Pour réaliser des interférences lumineuses de manière à détecter le passage d'une onde gravitationnelle, le dispositif expérimental doit satisfaire à de nombreuses contraintes technologiques.

I – Effet des ondes gravitationnelles sur la matière

Les ondes gravitationnelles $h(t)$ représentent des déformations de l'espace-temps qui se propagent librement dans l'espace, suivant une équation de d'Alembert. En outre, elles possèdent deux polarisations (h_+ et h_\times) transversales à leur direction de propagation. On admet :

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_+(t) & h_\times(t) & 0 \\ h_\times(t) & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

pour une onde se propageant selon l'axe z . Depuis la source potentielle, l'amplitude de l'onde attendue est d'environ 10^{-21} . On considère tout d'abord une assemblée de particules initialement au repos, et on cherche à exprimer le déplacement relatif des particules dû au passage d'une onde gravitationnelle. Pour ce faire, on se place dans le référentiel galiléen local de l'une des particules, positionnée à l'origine d'un repère cartésien, et on étudie le déplacement relatif d'une autre particule, nommée particule test, initialement positionnée en $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Posons $\delta x(t) = x(t) - x_0$, $\delta y(t) = y(t) - y_0$, et $\delta z(t) = z(t) - z_0$ les déplacements de la particule test selon les trois axes du plan cartésien. On notera $\vec{\xi} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ le vecteur déplacement et on considérera ces déplacements petits devant les longueurs typiques en jeu dans ce problème. L'étude des équations de la

Relativité Générale montre que l'onde gravitationnelle $h(t)$ déforme l'espace-temps de sorte que la particule test est déplacée d'un vecteur $\vec{\xi}$ tel que :

$$\vec{\xi} = \frac{1}{2}h \cdot \vec{r}_0 \quad (2)$$

Q.1 Montrer que :

$$\delta x = \frac{1}{2}h_+x_0 + \frac{1}{2}h_\times y_0, \quad \delta y = -\frac{1}{2}h_+y_0 + \frac{1}{2}h_\times x_0, \quad \delta z = 0 \quad (3)$$

et justifier que les modifications de distance dues au passage d'une onde gravitationnelle sont imperceptibles dans la vie quotidienne.

La FIGURE 2 représente l'effet du passage d'une onde gravitationnelle de polarisation purement h_\times ($h_+ = 0$) sur une assemblée de particules tests disposées en cercle, tel que prédit par les équations 3.

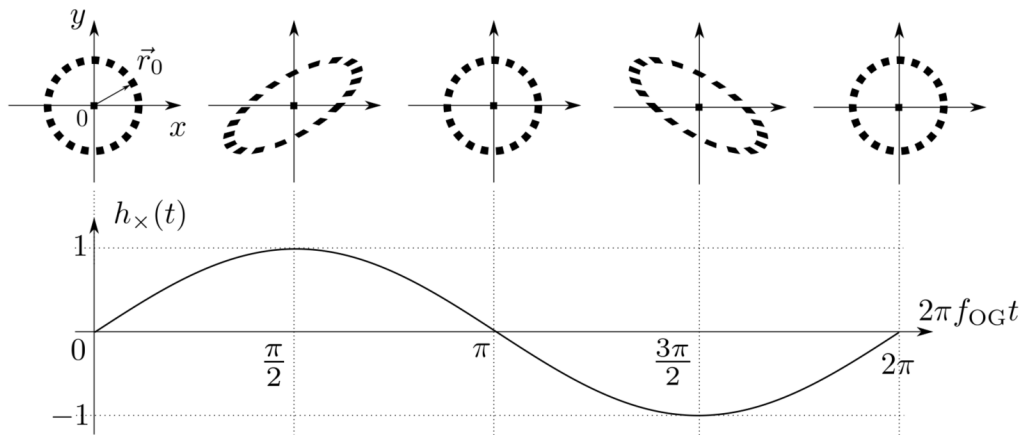


FIGURE 2 – Effet d'une onde gravitationnelle polarisée h_\times uniquement sur une assemblée de particules ponctuelles disposées en cercle au cours du temps, tel que prédit les équations 3, dans le référentiel galiléen d'une particule positionnée à l'origine du repère cartésien. Les distances sont altérées et le cercle est déformé par le passage de l'onde. La fonction $h_\times(t)$ est ici normalisée à 1.

Q.2 Pour un ensemble de particules tests placées en cercle tel que sur la FIGURE 2 en $t = 0$, représenter de la même manière l'effet d'une onde de polarisation purement h_+ ($h_\times = 0$) et commenter.

La lumière se propageant à la vitesse c dans tous les référentiels (principe de la relativité restreinte), le temps de parcours des photons entre deux points est modifié par le passage d'une onde gravitationnelle car celle-ci va allonger ou rétrécir la distance entre ces deux points. On considère maintenant deux miroirs sur l'axe x séparés par une distance L_0 en l'absence d'onde gravitationnelle. Pour toute la suite du problème, on suppose $h_\times = 0$.

Q.3 On aimerait supposer que l'on peut négliger le déplacement des miroirs dû au passage de l'onde gravitationnelle pendant que la lumière réalise un aller-retour entre ceux-ci. Donner une condition sur L_0 pour que cette affirmation soit vraie si on suppose que la fréquence de l'onde gravitationnelle est $f_{OG} \approx 50$ Hz. Commenter la faisabilité d'un détecteur à miroirs fondé sur la mesure d'un temps d'aller-retour de la lumière installé sur Terre ou dans l'espace.

Q.4 Exprimer le temps de parcours infinitésimal $d\tau_x$ que prend la lumière pour parcourir une distance initialement dx lorsqu'elle est modifiée par le passage d'une onde gravitationnelle. On note n l'indice du milieu. Puis, si on suppose que le temps d'aller-retour est petit devant l'inverse de la fréquence de l'onde, calculer le temps d'aller-retour total τ_x entre deux miroirs initialement séparés d'une distance L_1^0 et alignés selon l'axe x .

Q.5 Répéter le calcul pour une distance dy et deux miroirs alignés selon l'axe y et séparés d'une distance L_2^0 . Montrer que la différence de temps d'aller-retour est :

$$\tau_x - \tau_y = \frac{nh_+(t)(L_2^0 + L_1^0)}{c} + \frac{2n(L_1^0 - L_2^0)}{c} \quad (4)$$

II – Dispositif de Michelson

La géométrie du système de détection suit celle d'un interféromètre de Michelson. Les résultats du premier interféromètre de ce type, créé en 1881, ont ouvert la voie à la théorie de la Relativité Restreinte d'Einstein, et il est notable que le même dispositif, largement amélioré, a permis de confirmer une prédiction de la Relativité Générale.

Une unique source laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1064 \text{ nm}$ est dirigée vers une lame séparatrice semi-réfléchissante inclinée à 45° qui distribue la moitié de la puissance dans deux directions \vec{u}_x et \vec{u}_y . On appelle *bras* les parties du montage correspondantes de longueur respective L_1 et L_2 (voir FIGURE 3). Chacun des bras est terminé par un miroir plan de très haute réflectivité qui renvoie la lumière vers la lame séparatrice. Un détecteur en sortie permet d'observer la combinaison des ondes lumineuses provenant des deux bras de l'interféromètre. La différence de parcours de la lumière dans chacun des deux bras est à l'origine des interférences lumineuses observées au niveau du détecteur. En effet les deux ondes débouchent du système avec des phases différentes dues à la différence de distance parcourue ce qui est de nature à provoquer des interférences.

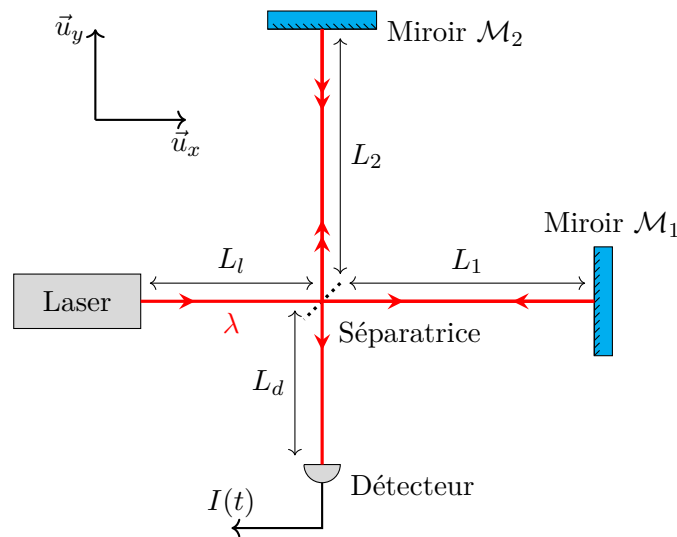


FIGURE 3 – Interféromètre de Michelson.

Une version simple de l'interféromètre de Michelson est présentée FIGURE 3 avec ses notations. On décrit la source laser par une onde électromagnétique plane progressive harmonique de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - n\vec{k}\cdot\vec{r})}$ en notation complexe, avec n l'indice du milieu traversé et $\|\vec{k}\| = \omega/c$. Le vecteur d'onde \vec{k} est dirigé selon \vec{u}_x en sortie du laser et dans le bras de longueur L_1 , et selon \vec{u}_y dans le bras de longueur L_2 et à l'arrivée sur le détecteur. Pour une onde électromagnétique, on définit les coefficients *complexes* de réflexion r et de transmission t par :

$$\vec{E}_r = r \vec{E}_i \quad \text{et} \quad \vec{E}_t = t \vec{E}_i$$

Pour la séparatrice, on note r_s (resp. t_s) le coefficient de réflexion (resp. transmission). Les coefficients de réflexion des miroirs M_1 et M_2 sont $r_1 = r_2 = -1$.

Q.6 Écrire l'expression du champ électromagnétique \vec{E}_1 reçu au niveau du détecteur pour la partie du faisceau ayant réalisé un aller-retour dans le bras de longueur L_1 depuis la source laser. Faire de même pour la

seconde partie du faisceau (champ \vec{E}_2). Comme sur le schéma, on notera L_l et L_d les distances respectives du laser et du détecteur au centre de la séparatrice et on suppose que $\vec{r} = \vec{0}$ au niveau du laser. Montrer que la différence de phase entre les champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 est :

$$\Delta\phi = 2nk(L_1 - L_2)$$

Q.7 Schématisons ce qui se passe au niveau du détecteur de lumière. Sur un schéma, représenter deux ondes de longueur d'onde λ déphasées de $\Delta\phi = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, puis leur somme. Faire de même pour deux ondes déphasées de $\Delta\phi = (2p + 1)\pi$. Indiquer dans quels cas on a des interférences constructives ou destructives.

Q.8 L'intensité optique mesurée sur le détecteur est $I = \langle \|\vec{E}_{tot}\|^2 \rangle_\tau$ où les chevrons $\langle \cdot \rangle_\tau$ représentent la moyenne temporelle sur un temps $\tau \gg 1/\omega$. Sachant que $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, montrer que :

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = I_0 \cos^2(nk(L_1 - L_2)) \quad (5)$$

avec I_0 que l'on déterminera.

En l'absence d'onde gravitationnelle, on note respectivement L_1^0 et L_2^0 les longueurs des bras de l'interféromètre alignés selon les axes x et y . Suite au passage d'une onde gravitationnelle $h_+(t)$, les longueurs des bras sont modifiées respectivement de $\delta L_1(t)$ et $\delta L_2(t)$ de telle sorte que

$$L_1(t) = L_1^0 + \delta L_1(t) \quad \text{et} \quad L_2(t) = L_2^0 + \delta L_2(t)$$

La longueur des bras de l'instrument est asservie de façon à ce que $nk(L_1^0 - L_2^0) = \phi_0/2$ avec ϕ_0 une phase dont on déterminera la valeur optimale dans une question ultérieure.

Q.9 On pose $x = L_1 - L_2$ et $\delta x = \delta L_1 - \delta L_2$. Montrer que l'intensité en sortie de l'interféromètre est :

$$I = I_0 \cos^2\left(nk\delta x + \frac{\phi_0}{2}\right) \quad (6)$$

Q.10 Linéariser cette expression en supposant que $\delta x \ll \lambda$ et montrer que la variation d'intensité δI due au passage de l'onde gravitationnelle s'écrit :

$$\delta I = -I_0 nk \delta x \sin \phi_0 \quad (7)$$

Pour quelles valeurs de ϕ_0 cette variation d'intensité est-elle maximale? À la lumière de vos réponses à la question **Q.7**, comment est donc réglé l'interféromètre au repos?

Q.11 Relier la différence de phase $\Delta\phi$ à la différence de temps de parcours $\tau_x - \tau_y$ des photons empruntant les deux bras de l'interféromètre alignés selon les axes x et y . On pose $L_0 = (L_1^0 + L_2^0)/2$. À l'aide des questions **Q.5** et **Q.9**, donner δx en fonction de $h_+(t)$ et L_0 .

Q.12 Pour le détecteur Virgo, les bras mesurent 3 km au repos. Pourquoi utiliser un interféromètre si grand? Donner un ordre de grandeur de δx et de $\Delta\phi - \phi_0$. Vérifier l'approximation $\delta x \ll \lambda$ et comparer δx à des ordres de grandeurs usuels.

III – Cavité Fabry-Pérot

D'après les résultats précédents sur l'interféromètre de Michelson simple, la sensibilité de détection des ondes gravitationnelles est limitée par la taille des bras de l'instrument. Or construire des bras de longueur bien supérieure à 3 km représente un défi technologique, géographique et financier bien trop important, à moins d'aller dans l'espace. Pour contourner ce problème, les scientifiques ont eu l'idée d'ajouter au dispositif deux cavités Fabry-Pérot symbolisées sur la FIGURE 4 par deux paires de miroirs. Dans ces cavités la lumière réalise plusieurs aller-retours ce qui augmente artificiellement la longueur des bras.

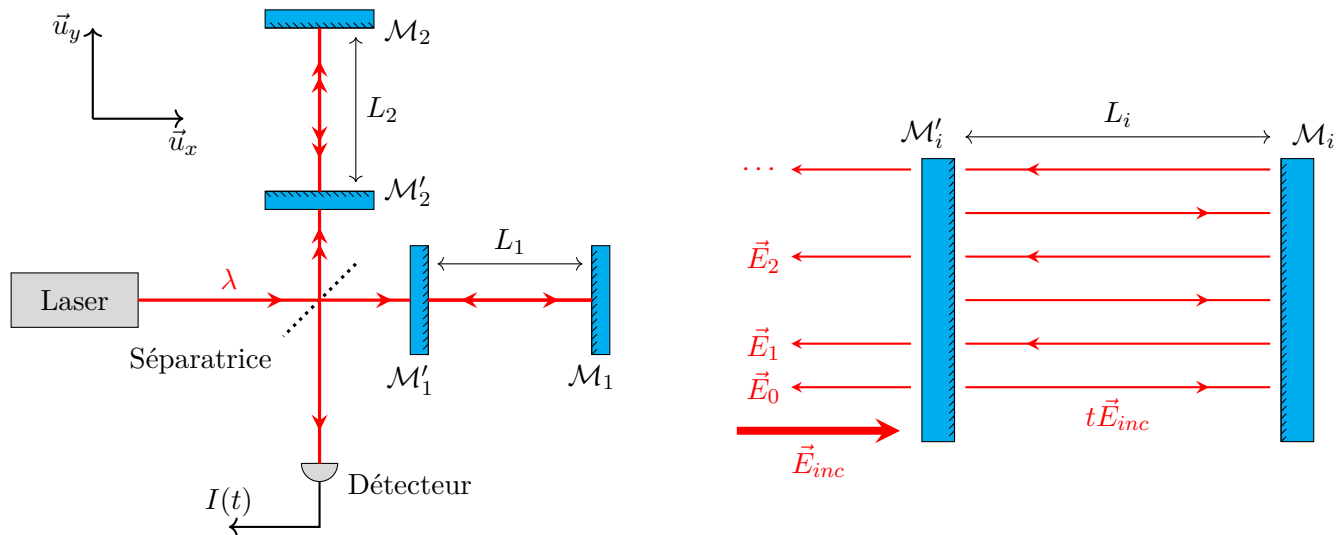


FIGURE 4 – Gauche : interféromètre de Michelson avec cavités Fabry-Pérot. Droite : cavité Fabry-Pérot seule.

Dans les questions suivantes, nous allons donc étudier une cavité Fabry-Pérot comme décrite sur la partie droite de la FIGURE 4. Un miroir \mathcal{M}'_i semi-réfléchissant de coefficients de réflexion r'_i et de transmission t'_i est placé en vis-à-vis du miroir \mathcal{M}_i de réflectivité supposée parfaite ($r_i = -1, t_i = 0$), à une distance L_i . On admettra que pour une onde venant de la gauche, au niveau de \mathcal{M}'_i , on a $r'_i > 0$ réel et pour une onde venant de la droite le coefficient de réflexion vaut $-r'_i$.

Le champ électrique incident est une onde plane monochromatique progressive notée \vec{E}_{inc} avec les mêmes conventions que précédemment. On notera \vec{E}_p le p -ième champ électrique émergent du dispositif, déphasé par rapport au champ incident après p allers-retours à l'intérieur de la cavité. L'indice optique dans la cavité vaut n . Dans les questions suivantes, on s'intéresse à la cavité Fabry-Pérot situé dans le bras $i = 1$.

Q.13 Écrire le champ électrique \vec{E}_0 en fonction de \vec{E}_{inc} , puis le champ \vec{E}_1 en fonction du champ \vec{E}_{inc} , de la longueur L_1 de la cavité sur le bras 1 et des coefficients de réflexion et transmission. Déterminer le champ \vec{E}_p en fonction du champ \vec{E}_{p-1} pour $p > 2$. En déduire l'expression de \vec{E}_p en fonction de \vec{E}_{inc} pour $p > 1$.

Q.14 Le champ électrique total émergent de la cavité 1 est $\vec{E}'_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \vec{E}_p$. Montrer que :

$$\vec{E}'_1 = \left(\frac{r'_1 - e^{-2jnkL_1}}{1 - r'_1 e^{-2jnkL_1}} \right) \vec{E}_{inc} \quad (8)$$

On admettra que $(t'_1)^2 + (r'_1)^2 = 1$.

Q.15 On pose R_1 tel que $\vec{E}'_1 = R_1 \vec{E}_{inc}$. Montrer que $|R_1|^2 = 1$ pour toute longueur L_1 . Qu'est-ce que cela signifie physiquement ?

Q.16 On dit que la cavité Fabry-Pérot est accordée lorsque $nkL_1^0 = p_1\pi$ avec $p_1 \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour une cavité accordée :

$$R_1 \approx -\frac{1 - r'_1 - 2jnk \delta L_1}{1 - r'_1 + 2jnk r'_1 \delta L_1} \quad (9)$$

avec $\delta L_1 \ll \lambda$. On rappelle qu'on a défini précédemment $L_1 = L_1^0 + \delta L_1$ avec δL_1 la variation de longueur due au passage d'une onde gravitationnelle.

Q.17 Calculer $\phi'_1 = \text{Arg}(R_1)$ et montrer que la différence de phase au niveau du détecteur $\Delta\phi' = \phi'_1 - \phi'_2 + \phi_0$ vaut :

$$\Delta\phi' = -\frac{1 + r'_1}{1 - r'_1} 2nk \delta x + \phi_0 \quad (10)$$

avec ϕ'_2 le résultat obtenu pour ϕ'_1 mais transposé à la cavité 2 de longueur L_2 (avec $r'_1 = r'_2$).

Q.18 Pour l'interféromètre Virgo, $r'_1 = 0,98$. Donner un ordre de grandeur de $\Delta\phi' - \phi_0$. L'interféromètre de Michelson muni de deux cavités Fabry-Pérot se comporte comme un interféromètre simple mais avec une longueur de bras bien supérieure. Évaluer la longueur effective de ces bras.

IV – Nécessité de l'ultra-vide

Jusqu'à présent nous avons étudié la propagation de la lumière dans l'interféromètre dans un milieu d'indice n de nature non précisée. Dans cette partie nous allons voir que la détection des ondes gravitationnelles est fortement compromise par d'éventuelles fluctuations d'indice de ce milieu et comment passer outre.

Q.19 Le milieu de propagation le moins coûteux que l'on puisse envisager est simplement l'air. Citer quelques causes pouvant engendrer des perturbations localisées de l'indice du milieu le long des bras de l'interféromètre.

Q.20 Considérons une perturbation de l'indice optique $n + \delta n$. Linéariser à l'ordre un l'équation 5 en considérant deux perturbations $\delta x \ll L_2^0, L_1^0$ et $\delta n \ll 1$, et montrer que :

$$\delta I \approx -I_0 \sin(\phi_0)(kx\delta n + nk\delta x) \quad (11)$$

On rappelle les notations utilisées précédemment : $x = L_1 - L_2$, $\delta x = \delta L_1 - \delta L_2$ et $nk(L_1^0 - L_2^0) = \phi_0/2$.

Q.21 Donner une condition sur δn pour que les variations d'intensité dues à l'indice optique soient négligeables devant le signal recherché. Donner l'ordre de grandeur des variations d'indice optique maximum permises.

Au premier ordre, l'écart de l'indice optique par rapport à l'indice du vide est proportionnel à la densité : $n = 1 + \alpha\rho$ avec α une constante et ρ la densité du gaz. Pour l'air ambiant $\alpha\rho_0 \approx 10^{-4}$ dans les conditions normales de température et de pression (dans la suite les quantités physiques sont exprimées avec un indice 0 dans ces conditions).

Q.22 En supposant le gaz parfait soumis à la pression ambiante P_0 , traduisez la condition sur δn précédemment obtenue en condition sur les variations δT_0 de la température ambiante T_0 du gaz. Commenter et conclure sur les chances de détecter le passage d'une onde gravitationnelle.

Q.23 Expliquer qualitativement en quoi faire circuler les faisceaux lasers dans des tubes à ultra-vide permet de rendre négligeable le bruit lié aux fluctuations d'indice de l'air.

Q.24 Reprenons le calcul précédent en supposant le gaz soumis à une pression $P \ll P_0$ dite d'ultra-vide. Exprimer l'indice n de l'air en fonction de P , P_0 , T , T_0 et n_0 l'indice de l'air dans les conditions ambiantes.

Q.25 À partir du résultat précédent, relier la perturbation δn d'indice optique à une perturbation δT de température dans les conditions de l'ultra-vide autour de $T = T_0$. Donner une condition sur P pour obtenir des fluctuations de signal dues aux fluctuations d'indice négligeables devant le signal. Calculer un ordre de grandeur de P en supposant un contrôle en température $\delta T \approx 1$ mK. Dans les tubes à vide de Virgo, la pression est de 10^{-7} Pa. Commenter.

V – Bruit de grenaille et caractérisation du laser

On s'intéresse maintenant aux sources de bruit liées à la puissance optique totale reçue par le détecteur I_0 . Outre les variations d'intensité dues aux alimentations électriques, il existe un "bruit de grenaille" lié au comportement corpusculaire de la lumière. Ce bruit suit la statistique de Poisson : il en résulte que lorsque le détecteur mesure une intensité moyenne I , il existe des fluctuations d'intensité δI telles que $\delta I \propto \sqrt{I}$. Le rapport entre l'amplitude du signal et l'amplitude du bruit est dans ce cas proportionnel à \sqrt{I} et augmente avec la puissance du laser.

Q.26 Considérons une perturbation de l'intensité optique totale $I_0 + \delta I_0$. Linéariser à l'ordre un l'équation 5 en considérant deux perturbations $\delta I_0 \ll I_0$ et $\delta x \ll L_1^0, L_2^0$.

Q.27 Donner une condition sur δI_0 en fonction de $n, k, \delta x, \phi_0$ et I_0 pour que le bruit dû aux fluctuations d'intensité soit négligeable devant le signal gravitationnel. Autour de quel déphasage ϕ_0 a-t-on intérêt de se placer pour détecter un signal ?

On peut relier le bruit de grenaille du laser à une fluctuation δN du nombre de photons détectés tel que $\delta N = \sqrt{N}$ où N est le nombre de photons reçus par le détecteur. On rappelle que le détecteur intègre l'intensité lumineuse pendant un intervalle de temps moyen τ .

Q.28 Exprimer la puissance lumineuse moyenne $\mathcal{P}_0 \propto I_0$ du laser en fonction de N, τ, h et ν la fréquence du laser. Calculer le rapport $\delta \mathcal{P}_0 / \mathcal{P}_0$ en fonction de τ, ν, h et \mathcal{P}_0 , où la fluctuation de puissance $\delta \mathcal{P}_0$ est due à une fluctuation δN de type Poissonien du nombre de photons.

Q.29 Relier la réponse précédente à la condition établie question **Q.27**. Quelle doit être la puissance du laser pour espérer détecter le passage d'une onde gravitationnelle ? On prendra $\phi_0 = \pi/2$ ou $\phi_0 = \pi$ et $\tau = 1$ ms et on admettra que pour le dispositif Virgo on a $\delta x \approx 100 h_+ L_0$. Le laser construit pour Virgo, de longueur d'onde 1064 nm, possède une puissance de 20 W, amplifiée à 700 W par une troisième cavité résonante. Commenter.

Données numériques

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de la gravitation	$G_N = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Indice de l'air dans les conditions normales	$n_0 \approx 1,0003$

Exercice 2 : Chute d'une tartine

Préoccupé dès le petit-déjeuner par un problème résistant à sa sagacité, un physicien pose distraitemment sa tartine beurrée en déséquilibre au bord de la table, côté beurré vers le haut (FIGURE 1). La tartine tombe et atterrit sur le côté beurré, ce qui ne manque pas d'attirer l'attention du physicien. Il répète l'expérience avec méthode et circonspection et observe la répétitivité du phénomène avant de le modéliser.

Ce problème propose une étude simplifiée de la chute d'une tartine beurrée posée sur le bord d'une table afin de déterminer la face qui rencontre le sol. Pourquoi est-ce toujours la face beurrée ?

Une tartine, modélisée par un parallélépipède rectangle, homogène, de longueur $2a$, largeur $2b$, épaisseur $2e$, de centre d'inertie G , de masse m , est posée sur le bord d'une table :

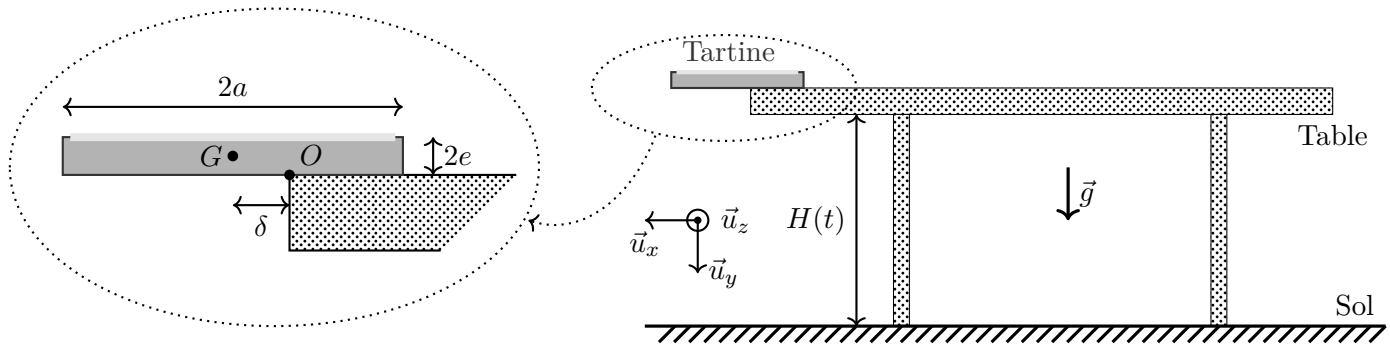


FIGURE 1 – Tartine posée sur le bord d'une table juste avant sa chute.

Le mouvement est décrit dans le repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ direct et supposé galiléen : O est sur le bord de la table, l'axe (Ox) est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table ; l'axe (Oz) est porté par le rebord de la table et l'axe (Oy) , vertical, est dirigé vers le bas. Les petits côtés de la tartine sont parallèles à (Oz) .

Le mouvement est découpé en deux phases : une première phase lors de laquelle la tartine amorce sa rotation en restant en contact avec la table puis une phase de chute libre.

I – Étude de la première phase

En $t = 0$, la tartine est horizontale, sa vitesse est nulle et le point G se trouve dans le plan (xOy) décalé de δ selon l'axe (Ox) par rapport à l'origine O . La tartine amorce une rotation **sans glissement** autour de l'arête (Oz) du bord de la table. On attache les axes \vec{u}_r et \vec{u}_θ à la tartine, de sorte à repérer sa position à un instant t quelconque par l'angle θ entre les axes \vec{u}_x et \vec{u}_r (voir FIGURE 2).

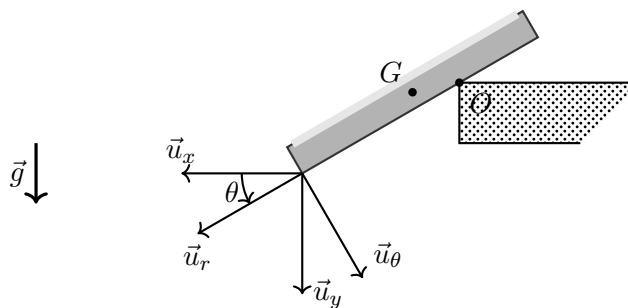


FIGURE 2 – Tartine amorçant sa rotation.

On note $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse de rotation. Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe (Gz) , parallèle à (Oz) et passant par G vaut $J_G = \frac{1}{3}m(a^2 + e^2)$. Celui par rapport à l'axe (Oz) vaut $J_O = J_G + m(e^2 + \delta^2)$.

I.A Cinématique

- Q.1** Exprimer le vecteur rotation $\vec{\omega}$ de la tartine en fonction de $\frac{d\theta}{dt}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
- Q.2** Exprimer les coordonnées de G dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
- Q.3** Exprimer la vitesse \vec{v}_G de G dans cette base en fonction de e , δ et ω . Que devient cette vitesse dans le cas $\delta = 0$?
- Q.4** Exprimer l'accélération \vec{a}_G de G dans cette même base. Que devient cette accélération dans le cas $\delta = 0$?

I.B Dynamique

La réaction de la table en O est notée $\vec{R} = T\vec{u}_r + N\vec{u}_\theta$ avec T la réaction tangentielle et N la réaction normale.

- Q.5** Écrire, en utilisant les notations définies plus haut, les deux relations issues du théorème du mouvement du centre de masse dans le repère galiléen $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, en projection sur la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
- Q.6** Écrire, en utilisant les notations définies plus haut, la relation issue du théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.
- Q.7** En déduire l'expression de $\omega^2(t)$ en fonction de $\theta(t)$, J_O et des autres constantes figurant dans l'énoncé.

I.C Energétique

- Q.8** Retrouver l'expression de ω^2 par une étude énergétique. Justifier avec précision l'utilisation du théorème utilisé et expliquer le calcul avec soin.

I.D Approximation du léger déséquilibre

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, on tient compte du fait que la chute de la tartine a été causée par un très léger déséquilibre. La valeur de δ/a est faible : dans les circonstances courantes, ce coefficient de surplomb ne dépasse guère 0,02. On suppose donc pour simplifier $\delta \approx 0$. On pose $\eta = e/a$.

- Q.9** Montrer que l'on a $\omega^2 = \omega_0^2(1 - \cos \theta)$ et donner l'expression de ω_0^2 en fonction de η , g et a .

I.E Vérification des hypothèses pour la première phase

- Q.10** Montrer que : $\frac{T}{mg} = -\frac{1 + \eta^2}{1 + 4\eta^2} \sin \theta$ et $\frac{N}{mg} = \frac{6\eta^2}{1 + 4\eta^2} - \frac{1 + 10\eta^2}{1 + 4\eta^2} \cos \theta$.

- Q.11** Quel est le signe de $\frac{N}{mg}$ pour $\theta = 0$? Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$? Commenter la signification physique.

- Q.12** Étudier le signe de $\frac{T}{mg}$ puis commenter.

On note f le coefficient de frottement (statique et dynamique) entre la table et la tartine.

- Q.13** Donner l'allure, sur un même graphique, des courbes représentant $\left| \frac{T}{mg} \right|$ et $f \left| \frac{N}{mg} \right|$ en fonction de θ . La tartine peut-elle quitter le coin de la table sans glisser ? Justifier avec précision.

I.F Transition vers la deuxième phase du mouvement

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, l'épaisseur de la tartine étant petite, la valeur de $\eta = e/a$ est faible : on travaille donc pour simplifier au premier ordre en η (on néglige les termes du deuxième ordre). La tartine commence à glisser pour $\theta_0 = \pi/4$.

Q.14 Déterminer le coefficient de frottement f entre la table et la tartine.

II – Étude de la seconde phase

On s'intéresse maintenant à la chute de la tartine. À partir du moment où elle commence à glisser, la tartine perd très vite le contact avec la table. On considère donc que la tartine est en chute libre dès $\theta_0 = \pi/4$. On prend la nouvelle origine des temps au début de cette chute libre. À ce moment là, la tartine est inclinée de θ_0 et sa vitesse de rotation vaut $\omega_0\sqrt{1-\cos\theta_0}$. On néglige les frottements de l'air sur la tartine et on suppose, bien entendu, qu'il n'y a pas de contact ultérieur de la tartine avec la table. On rappelle que $\delta \approx 0$.

II.A La chute

Q.15 Écrire le principe fondamental de la dynamique au point G ainsi que le théorème du moment cinétique.

Q.16 Écrire la conservation de l'énergie mécanique totale. Pourquoi se conserve-t-elle ?

Q.17 Quelle est la loi d'évolution de l'angle θ ? Donner alors l'expression de θ en fonction de t , θ_0 et ω_0 .

Q.18 Écrire les équations littérales du mouvement de G en fonction de g , t , θ_0 , ω_0 et e .

II.B L'arrivée au sol

On considère que, lorsque la tartine atteint le sol, à l'instant τ , elle ne subit pas de rebond et que toute son énergie cinétique devient négligeable.

Q.19 Quels sont les angles limites θ_1 et θ_2 (avec $\theta_2 > \theta_1$) tels que la tartine atterrisse côté pain, en admettant qu'elle fasse moins d'un tour avant de toucher le sol ? Faire un schéma représentant 5 ou 6 des positions de la tartine (dont les positions initiale et finale) dans le plan xOy pour cette chute dans le cas limite θ_2 , en indiquant clairement la face beurrée.

Q.20 En négligeant toutes les dimensions de la tartine devant h (hauteur de la table), évaluer la durée de la chute τ en fonction de h et g . Évaluer également l'angle θ_f dont a tourné la tartine depuis sa position d'équilibre initiale.

Q.21 Applications numériques : calculer τ et θ_f en degrés pour $h = 75$ cm, $g = 9,8$ m \cdot s $^{-2}$, $a = 4$ cm et $e = 4$ mm. Conclusion ?

Q.22 Comment les considérations précédentes seraient-elles modifiées sur la planète Mars, où le champ de pesanteur vaut $g_M = 3,7$ m \cdot s $^{-2}$?

Q.23 Il est raisonnable de penser que la taille d'un éventuel organisme humanoïde marchant sur deux jambes est conditionnée par la valeur du champ de pesanteur de la planète où il vit. Quelle serait l'ordre de grandeur de la taille d'un martien ? Vérifierait-il lui aussi, sous les mêmes hypothèses, que sa tartine beurrée tombe presque toujours sur le côté tartiné ?

• • • **FIN** • • •