

DS 8 (Centrale) (4 heures)

Optique, Mécanique

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrees.
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1-2	1	-3.3%
3-4	2	-6.7%
5-6	3	-10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Étude d'une pièce sur un plateau

Dans tout le problème, le référentiel terrestre (\mathcal{R}_0) est supposé galiléen et on le munit du repère d'espace (O, x_0, y_0, z_0) de vecteurs unitaires $(\vec{u}_{x_0}, \vec{u}_{y_0}, \vec{u}_z)$ et tel que (Oz) soit la verticale ascendante. Par rapport à ce référentiel, on considère un disque \mathcal{D} horizontal en acier, de rayon R et de centre O pouvant tourner autour de l'axe vertical (Oz) passant par son centre O . On désigne par $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ le vecteur rotation du disque dans \mathcal{R}_0 . Le disque se situe à une hauteur h du sol horizontal. On note $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ le référentiel lié au disque, associé à la base de projection $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Le mouvement de rotation du disque par rapport à (\mathcal{R}_0) est repéré par l'angle $\varphi = (\vec{u}_{x_0}, \vec{u}_x)$, orienté de \vec{u}_{x_0} vers \vec{u}_x (voir FIGURE 1). On choisit les axes x_0 et x confondus à l'instant de la mise en mouvement du disque qui sera pris comme origine des temps ($\varphi(t=0) = 0$ et $\Omega(t=0) = 0$). Le mouvement donné au disque est un **mouvement de rotation uniformément accéléré**, caractérisé par l'accélération angulaire $\dot{\varphi} = \alpha > 0$.

Le seul champ de forces externe est le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, supposée uniforme et dirigée selon la verticale descendante.

Le but du problème est l'étude du mouvement d'une pièce de monnaie posée sur le disque (posée à plat donc côté pile ou face et non pas sur la tranche). Cette pièce en cuivre est assimilée à un point matériel M , de masse m . Elle est placée sur le disque avant sa mise en mouvement en $A(a, 0, 0)$ avec $0 < a < R$. Le contact entre M et \mathcal{D} est caractérisé par un coefficient de frottement solide statique μ_s et un coefficient de frottement solide dynamique μ_d . La force de contact entre la pièce et le disque est notée $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ avec $\vec{N} = N\vec{u}_z$ la composante normale et $\vec{T} = T_x\vec{u}_x + T_y\vec{u}_y$ la composante tangentielle.

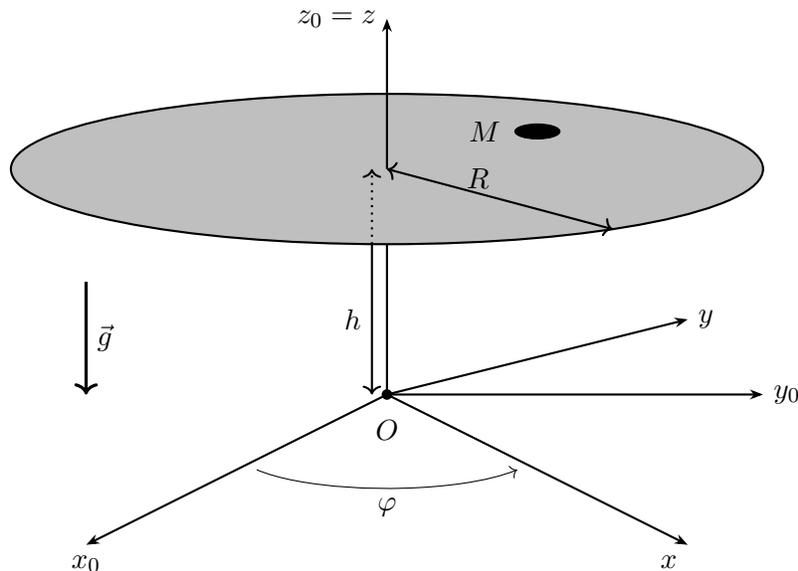


FIGURE 1 – Modélisation du disque en perspective.

Pour les applications numériques, on prendra : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $R = h = 1 \text{ m}$, $a = 0,1 \text{ m}$, $m = 0,01 \text{ kg}$, $\mu_s = 0,53$ et $\mu_d = 0,36$.

I – Mouvement sur le disque

On s'intéresse dans cette partie au mouvement de M dans \mathcal{R} , c'est-à-dire, au mouvement de la pièce par rapport au disque. On note $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. Le mouvement se décompose en deux parties : la mise en mouvement de la pièce pendant laquelle elle est fixe par rapport au disque puis le glissement de la pièce sur le disque.

I.A Mise en mouvement du disque

Phase précédent le glissement de la pièce : on suppose dans cette partie que M est immobile dans \mathcal{R} .

- Q.1** Exprimer $\varphi(t)$, $\Omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\Omega}{dt}$ en fonction de α .
- Q.2** Définir la notion de point coïncident. En utilisant les propriétés de ce point, déterminer l'accélération d'entraînement du point M dans \mathcal{R} . On prendra garde au fait que la rotation du disque n'est pas uniforme.
- Q.3** Donner alors l'expression de la force d'inertie d'entraînement centrifuge et de la force d'inertie d'entraînement tangentielle dans \mathcal{R} . Les exprimer en fonction de m , a , α et t . Justifier que la force d'inertie de Coriolis est nulle.
- Q.4** Appliquer vectoriellement le principe fondamental de la dynamique à la pièce M placée en A dans le référentiel \mathcal{R} et en déduire trois équations.
- Q.5** Déterminer l'expression de $\|\vec{T}\|$ au cours du temps.
- Q.6** Rappeler les lois de Coulomb sur le frottement entre deux solides. En déduire la condition pour que M soit en équilibre dans \mathcal{R} au point A .
- Q.7** On souhaite qu'au démarrage du disque (à $t = 0^+$), le point M reste immobile. Exprimer l'accélération maximale α_m du disque pour que cette condition soit réalisée. Réaliser l'application numérique.
- Q.8** On suppose dans cette question $\alpha < \alpha_m$.
- Exprimer, en fonction de α et du rapport $\beta = \frac{\alpha_m}{\alpha}$, le temps t_0 au bout duquel le point M se met en mouvement.
 - Exprimer, en fonction de α et β , la vitesse angulaire de rotation Ω_0 atteinte par le disque lorsque le point M se met en mouvement.
- Q.9** Calculer de même, l'accélération maximale α_1 pour que le point M reste immobile pendant au moins une rotation du disque. Effectuer l'application numérique de α_1 et calculer $\beta_1 = \alpha_m/\alpha_1$.

On suppose désormais, et pour toute la suite que $\alpha \leq \alpha_1$ de sorte que la pièce ne commence à glisser qu'après le premier tour.

- Q.10** Montrer qu'alors β^2 peut être considéré comme grand devant 1.
- Q.11** En déduire une expression approchée de Ω_0 et de t_0 puis faire les applications numériques pour $\alpha = \alpha_1$.
- Q.12** On étudie la réaction tangentielle à la fin de cette première phase c'est-à-dire en $t = t_0^-$. Exprimer T_x et T_y à cet instant. Comparer les deux composantes en exprimant $\left| \frac{T_x}{T_y} \right|$. Effectuer l'application numérique.

I.B Analyse du mouvement de glissement

Dès que le point M se met à glisser, la vitesse de rotation du disque est maintenue constante à la valeur Ω_0 qu'elle avait à ce moment là. Le point M , immobile jusqu'à présent dans \mathcal{R} se trouve toujours en A .

Q.13 Donner l'expression des forces d'inertie dans \mathcal{R} (force d'inertie d'entraînement centrifuge et force d'inertie de Coriolis). Donner leur expression dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de $m, \Omega_0, x, y, \dot{x}$ et \dot{y} .

Q.14 Montrer que dans le cas étudié, la composante tangentielle \vec{T} de la réaction du disque s'écrit sous la forme $\vec{T} = Kmg \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ avec \vec{v} la vitesse de M dans \mathcal{R} . Préciser la constante K .

Q.15 Écrire les équations différentielles du mouvement de M vérifiées par x et y .

Q.16 En $t = t_0^+$, c'est-à-dire au début de cette phase de mouvement, l'accélération est suivant \vec{u}_x . Déduire des équations précédentes, l'expression de l'accélération initiale. Donner son expression en fonction de $\varepsilon = \mu_s - \mu_d$ et de g . On remarquera que $\Omega_0 \approx \sqrt{\alpha_m}$.

On envisage désormais l'existence d'une rainure sur le disque selon l'axe x . Une pièce au centre de la pièce coulisse dans cette rainure. La pièce est désormais guidée selon l'axe x . On suppose que ce guidage se fait sans frottement supplémentaire dans le sens du mouvement. Le terme de réaction supplémentaire dû au guidage est $\vec{R}' = R'\vec{u}_y$. La réaction due au disque se fait toujours avec frottement, elle s'écrit désormais $\vec{R} = N\vec{e}_z + T\vec{u}_x$ puisque le glissement est selon \vec{u}_x . Le point M est toujours initialement immobile en A et on prend l'origine des temps au démarrage du mouvement de M c'est-à-dire en t_0 .

Q.17 Appliquer vectoriellement le principe fondamental de la dynamique du point à la pièce M dans le référentiel \mathcal{R} et en déduire trois équations.

Q.18 Déterminer $x(t)$ et l'exprimer en fonction de a, Ω_0, t et $\delta = a \frac{\mu_d}{\mu_s}$.

Q.19 À quel instant t_1 la pièce arrive-t-elle au bord du disque ? Faire l'application numérique avec $\Omega_0 = \sqrt{\alpha_m}$.

Q.20 Déterminer la vitesse v_1 de la pièce lorsqu'elle arrive au bord du disque puis faire l'application numérique.

II – Sortie du disque

On étudie la suite du mouvement dans le cadre du mouvement guidé décrit ci-dessus : pièce guidée selon l'axe x , vitesse de rotation $\Omega = \Omega_0$ du disque constante.

Q.21 Déterminer la vitesse initiale \vec{V}_1 de M par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ au début de la chute, c'est-à-dire en $t = t_1$. En déduire sa norme et faire l'application numérique.

Q.22 Exprimer la durée de chute t_c ainsi que la distance D parcourue depuis le bord du disque puis faire les applications numériques.

Exercice 2 : Interféromètre de Michelson et spectrométrie

Cet exercice s'intéresse à la description puis à l'utilisation d'un interféromètre de Michelson pour l'étude des sources lumineuses.

Données :

On rappelle que la vitesse de la lumière dans le vide est $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On donne également la formule de trigonométrie :

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

I – Généralités sur les interféromètres

- Q.1** Donner un exemple de dispositif à division du front d'onde. Donner un exemple de dispositif à division d'amplitude.
- Q.2** Préciser pour quel type de source et d'interféromètre il peut y avoir localisation des interférences en lumière monochromatique. Quel avantage y voyez-vous ? Quel inconvénient ?
- Q.3** Qu'appelle-t-on longueur de cohérence ? Quel est son rôle dans les conditions d'observation des interférences ?
- Q.4** Comment peut-on sélectionner une raie quasi-monochromatique d'une source polychromatique ?

II – Description de l'interféromètre de Michelson idéal

Le schéma de principe d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air est donné ci-contre et reproduit en annexe FIGURE A. On note Ox et Oy deux axes perpendiculaires définissant les directions des deux bras de l'interféromètre. S est une source lumineuse ponctuelle située sur Ox . M_1 et M_2 sont deux miroirs plans parfaitement réfléchissants, disposés perpendiculairement à Ox en H_1 et respectivement à Oy en H_2 .

Le trait incliné à 45° , noté L_s , schématise un groupe de deux lames à faces parallèles permettant de séparer le faisceau en deux. Ce groupe est supposé n'introduire aucune différence de marche sur les trajets lumineux. L_p désigne une lentille mince convergente placée à la sortie de l'interféromètre de manière à ce que son axe optique soit confondu avec l'axe Oy . Un écran E est placé dans le plan focal image de L_p . On note C le foyer image de L_p . On a choisi ici $SO = OH_1 = 2OH_2$.

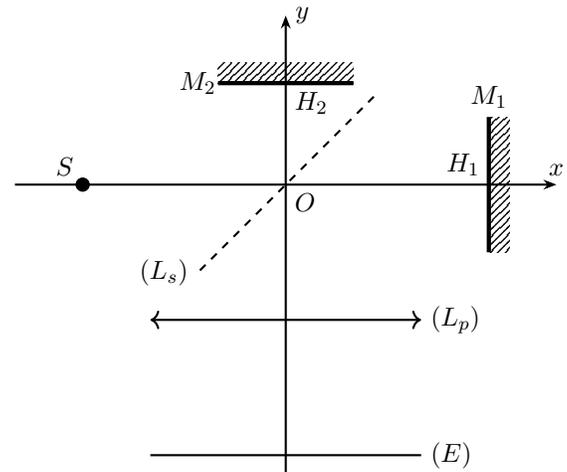


FIGURE 2 – Schéma simplifié d'un interféromètre de Michelson

- Q.5** Nommer les deux lames qui composent L_s . Qu'est-ce qui les distingue ? Expliquer soigneusement la nécessité pratique d'utiliser deux lames.
- Q.6** Un rayon lumineux, noté (r) , émis par S , a été représenté. Compléter le schéma en annexe FIGURE A (à rendre avec la copie) en faisant un tracé soigné des deux rayons (r_1) et (r_2) qui émergent de l'interféromètre après division de (r) (ce qui se passe après la lentille sera vu plus tard). On laissera apparent tout élément de construction (traits, prolongements de rayons, points remarquables, etc.) justifiant d'un tracé précis sans utilisation d'aucun rapporteur d'angle. Tout élément explicatif (noms, positions des points, constructions réalisées...) sera également mentionné.

- Q.7** Sur ce même schéma, positionner le miroir fictif M'_1 justifiant de la dénomination *lame d'air* et ajouter le rayon fictif (r'_1) correspondant.
- Q.8** Terminer le tracé des rayons (r_1) et (r_2) après la lentille L_p jusqu'à l'écran E . On demande, comme ci-dessus, un tracé précis (laisser les éléments de construction).
- Q.9** Indiquer quelle est la forme des franges d'interférences observées sur l'écran (aucune justification n'est demandée). Comment nomme-t-on ces franges ?
- Q.10** En appelant e l'épaisseur de la lame d'air et en prenant l'indice optique de l'air égal à 1, exprimer la différence de marche δ au centre C de l'écran.
- Q.11** Quelle est la condition d'interférences constructives ? Destructives ?

III – Résolution interférométrique d'un doublet spectral

Michelson et Morley mentionnèrent dans une publication l'observation de la raie H_α de l'hydrogène comme un doublet de nombre d'onde moyen $\sigma_m = 15\,237,40\text{ cm}^{-1}$ et d'écart spectral $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = 0,360\text{ cm}^{-1}$ (valeurs expérimentales de 1887). On rappelle que le nombre d'onde σ d'une radiation est l'inverse de sa longueur d'onde.

- Q.12** De quelle couleur est ce doublet ? Calculer son écart relatif en nombre d'onde $\Delta\sigma/\sigma_m$. Comparer cet écart relatif à celui du doublet jaune du sodium ($\lambda_1 = 589,0\text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6\text{ nm}$) et commenter.
- Q.13** On étudie le cas où la source de lumière utilisée présente un doublet spectral de nombres d'ondes σ_1 et σ_2 . Donner l'expression des ordres d'interférence p_1 et p_2 en C pour chaque radiation du doublet en fonction de δ , σ_1 et σ_2 .
- Q.14** Pour quelles valeurs de la différence $p_1 - p_2$ y-a-t-il brouillage en C ? En déduire, en fonction de l'écart spectral $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, la variation D_δ de la différence de marche entre deux situations consécutives de brouillage. Comment nomme-t-on ces situations ?
- Q.15** Dans le cas du doublet H_α , exprimer puis calculer la variation D_e de l'épaisseur de la lame d'air pour passer d'une situation de brouillage à la situation de brouillage directement consécutive.

À l'entrée de leur interféromètre historique de 1887, Michelson et Morley ont utilisé un dispositif à prismes muni d'une fente pour sélectionner la raie H_α présente dans le spectre solaire. Ils ont observé des brouillages périodiques lors de la translation du miroir mobile de leur interféromètre. Partant du contact optique (bras de longueurs rigoureusement égales à L_0), ils ont compté un total de 6 brouillages de part et d'autre du contact optique (3 de chaque côté) pour un déplacement du miroir égal à $1/160^e$ de la longueur L_0 .

- Q.16** Calculer la valeur de L_0 pour l'interféromètre de Michelson de 1887.

L'interféromètre, construit dans un sous-sol du campus de l'Université de Cleveland aux Etats-Unis, était monté sur une table en granite rectangulaire posée sur un cylindre de bois flottant dans du mercure. La table faisait environ $130\text{ cm} \times 110\text{ cm}$ de cotés. La longueur L_0 des bras de l'interféromètre était synthétisée grâce à deux groupes de miroirs permettant plusieurs allers-retours du faisceau sur chaque voie, comme représenté sur la FIGURE 3.

- Q.17** À partir de la FIGURE 3, donner, en expliquant votre calcul, une estimation grossière de la longueur d'un bras de l'interféromètre. L'ordre de grandeur obtenu est-il en accord avec la valeur L_0 trouvée à la question précédente ?

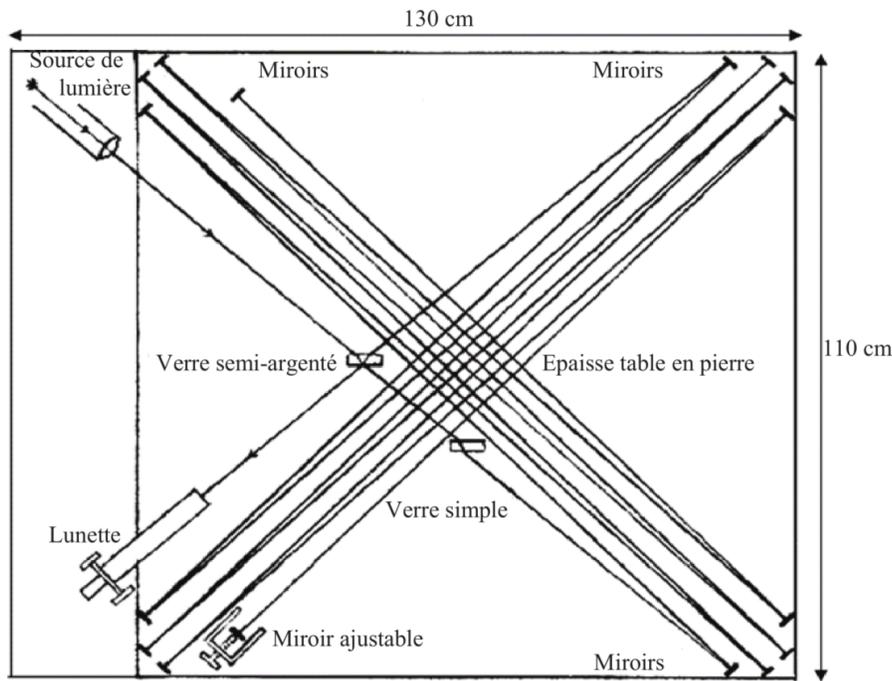


FIGURE 3 – Schéma des trajets lumineux dans l'interféromètre de Michelson et Morley de 1887

IV – Mesure interférométrique de la durée d'un train d'onde

La transition radiative d'un atome conduit à l'émission d'un train d'onde de durée finie τ_0 . La raie spectrale correspondante n'est donc pas strictement monochromatique. On obtient alors une raie spectrale centrée sur $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, de largeur caractéristique à mi-hauteur $\Delta\nu = 1/\tau_0 \ll \nu_0$. L'intensité émise au niveau de la source appartenant au domaine spectral $[\nu; \nu + d\nu]$ s'écrit alors $dI_0 = I_\nu(\nu)d\nu$ où $I_\nu(\nu)$ est la densité spectrale en fréquence, fonction qui caractérise le spectre fréquentiel d'émission.

On modélise la densité spectrale $I_\nu(\nu)$ de la raie verte du mercure par un profil rectangulaire comme sur la FIGURE 4. Dans notre modèle de raie rectangulaire, l'intensité totale de la source est donc donnée par :

$$I_0 = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} I_\nu(\nu)d\nu = I_{\nu,m}\Delta\nu$$

On éclaire l'interféromètre de Michelson présenté en FIGURE 2 et toujours réglé en lame d'air avec une lampe à vapeur de mercure dont on a isolé la raie verte de fréquence centrale $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ avec $\lambda_0 = 500$ nm. On observe les interférences au moyen d'un détecteur ponctuel que l'on place au foyer image C de la lentille de projection (L_p).

Q.18 Déterminer l'intensité $dI(C)$ donnée sur l'écran par une petite bande du spectre de largeur spectrale $d\nu$ en fonction, entre autre, de $\tau(C) = \frac{\delta(C)}{c}$. À quoi correspond physiquement $\tau(C)$? Exprimer $p(C, \nu)$, l'ordre d'interférence en C pour une radiation de fréquence ν en fonction de $\tau(C)$.

Q.19 Calculer alors l'intensité totale $I = I(C)$ donnée sur l'écran par la totalité du spectre de la source de lumière. Mettre le résultat sous la forme :

$$I = I_{moy} \left[1 + \Gamma(\tau(C)) \cos(2\pi\nu_0\tau(C)) \right]$$

où I_{moy} est une constante à exprimer et $\Gamma(\tau(C))$ une fonction de $\tau(C)$ à déterminer.

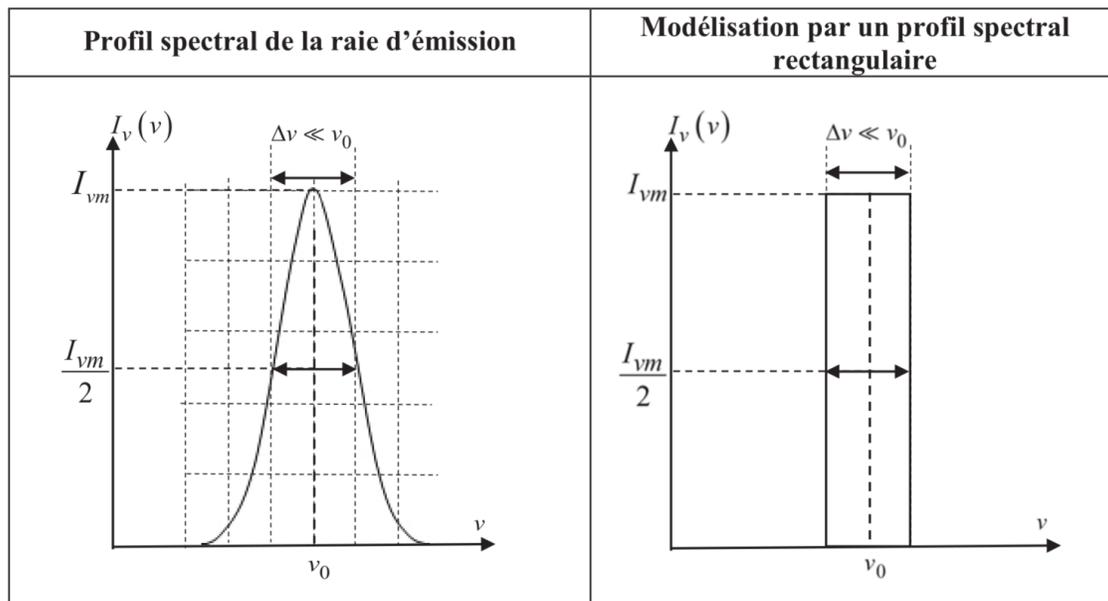


FIGURE 4 – Profil spectral réel et sa modélisation

Q.20 Quel rôle joue la fonction Γ ici ? Tracer le graphe de l'intensité en fonction de $\tau(C)$. Quelle est la valeur de $\tau(C)$ correspondant à la première annulation de Γ ? Comparer avec la durée du train d'onde et commenter.

Un moteur permet de translater le miroir mobile M_2 à la vitesse constante V_0 à partir de la position du contact optique.

Q.21 On arrête la translation de M_2 lorsque la première annulation de contraste est observée à l'écran. Le miroir s'est alors déplacé de 15,00 mm (à partir du contact optique). Déterminer la valeur expérimentale $\Delta\nu_{exp}$ de $\Delta\nu$. Conclure sur la durée du train d'onde.

••• FIN •••

Annexe du DS 8 (Centrale)
(À détacher et à rendre avec la copie)

Q.6 ; Q.7 et Q.8

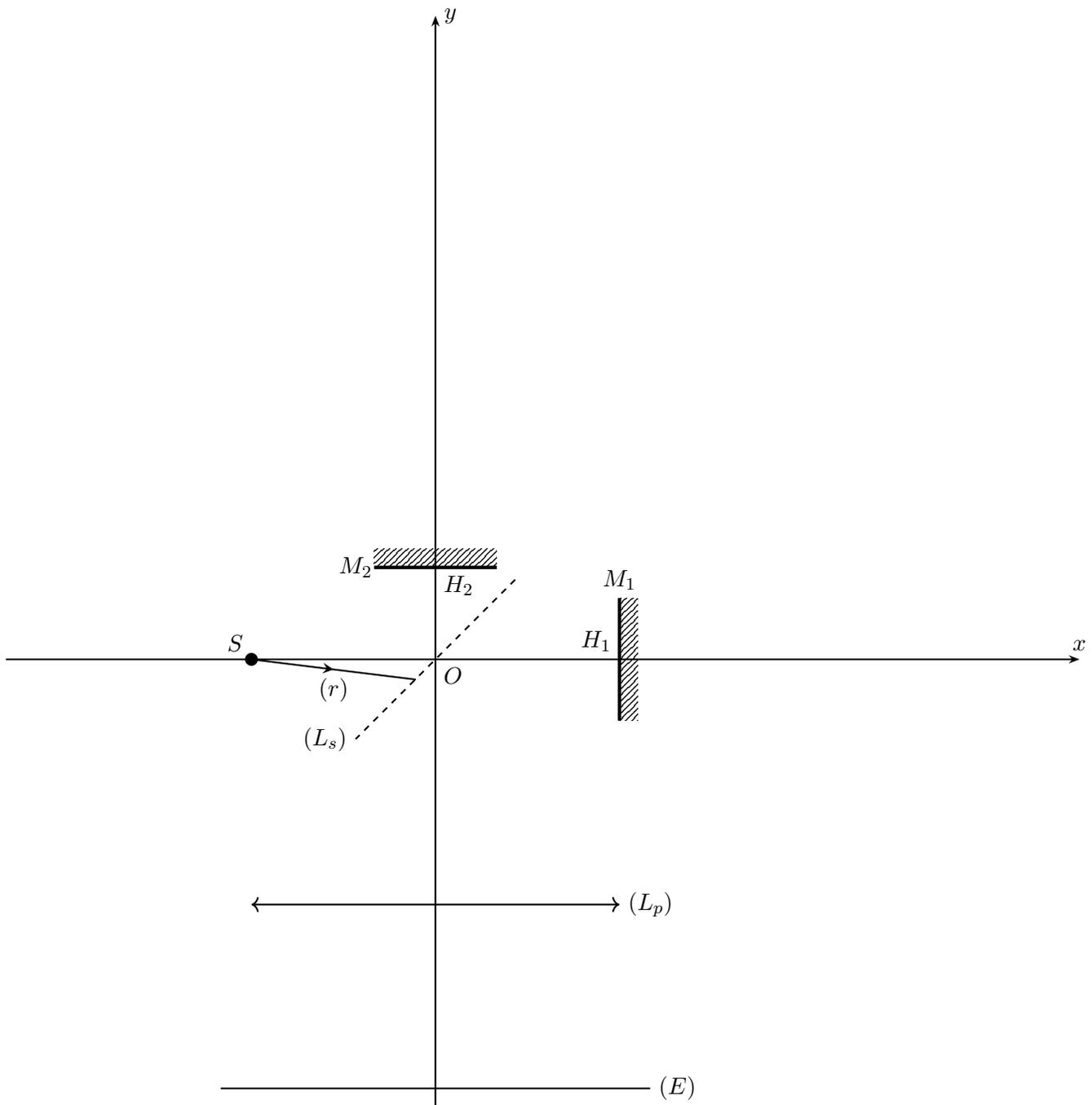


FIGURE A – Schéma simplifié d'un interféromètre de Michelson