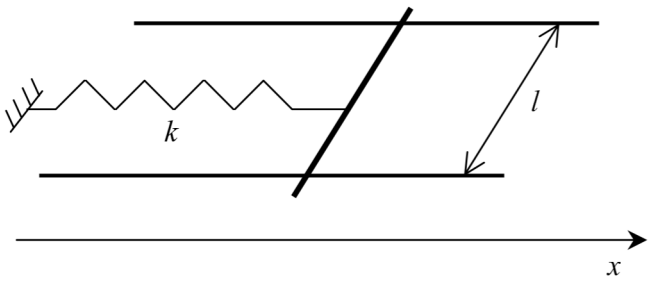
Révisions : Mécanique, Induction, Transferts thermiques

Exercice 1 : Rails de Laplace

1- Oscillations d'une barre sur des rails

A- Une barre de masse *m* peut glisser sans frottements sur deux rails parallèles. Les deux rails et la barre forment un plan horizontal. Les seuls mouvements possibles de la barre sont des translations rectilignes parallèlement à la direction des rails notée *Ox*. La barre est liée à un ressort de raideur *k*. L'origine des abscisses est choisie lorsque le ressort est au repos.

On pose $\omega_0^2 = k/m$. À l'instant initial, on lâche la barre sans vitesse initiale à l'abscisse $x = a$ avec $a > 0$.



1.1 Déterminer l'équation différentielle du mouvement par l'application du principe fondamental de la dynamique.
1.2 Déterminer l'expression de l'abscisse de la barre en fonction du temps.
1.3 Déterminer l'expression de l'énergie mécanique en fonction du temps.
1.4 Montrer, qu'en moyenne sur une période, l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle.

B- On reprend le problème précédent mais, cette fois, on suppose que la barre subit une force de frottements visqueux $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la barre et α un coefficient positif. On pose $\omega_0^2 = k/m$ et $2\lambda = \alpha/m$.

1.5 Établir l'équation différentielle du mouvement.
1.6 On suppose $\lambda \ll \omega_0$. Déterminer l'expression de l'abscisse *x* de la barre en fonction du temps *t*.
1.7 Représenter l'allure du graphe de *x* en fonction de *t*.
1.8 La condition précédente étant toujours vérifiée, montrer que l'énergie mécanique moyenne sur une pseudo-période peut se mettre sous la forme approchée :

$$E_M = \frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

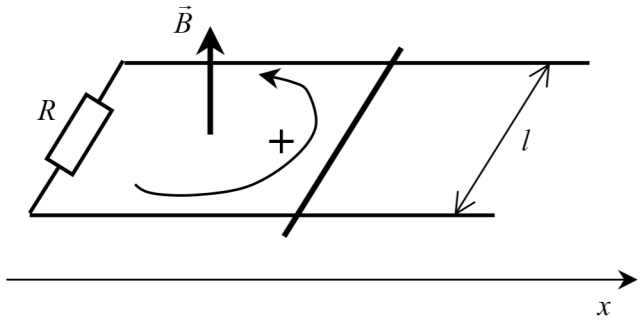
On donnera l'expression de τ.

2- Rails de Laplace

La barre de masse *m* peut glisser sans frottements sur des rails parallèles, distants de *l*, disposés comme précédemment. **Il n'y a plus de ressort**. En $x = 0$, les rails sont reliés par un conducteur. L'ensemble des rails, de la barre et du conducteur forme donc un circuit fermé. La résistance électrique de ce circuit est représentée par une résistance constante *R* localisée sur le conducteur reliant les deux rails (cf. figure) L'ensemble est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B}$. On définit un sens de circulation positive sur le circuit comme indiqué sur la figure. Si un courant parcourt le circuit, l'intensité sera comptée

positivement si et seulement si le courant circule effectivement dans le sens positif choisi. On néglige entièrement les phénomènes d'auto-induction.

A- La barre est lancée avec la vitesse initiale v_0 dans le sens des x croissants. Soit $v = \dot{x}$ la vitesse de la barre à un instant t.



2.1 En appliquant la loi de Lenz-Faraday, déterminer l'expression de la f.é.m. induite dans le circuit à un instant t quelconque en fonction de v, B et l.

2.2 Si la barre est parcourue par un courant d'intensité i, comptée algébriquement, déterminer la composante selon Ox de la force de Laplace subie par la barre.

2.3 Faire un schéma électrique équivalent et en déduire l'équation électrique du circuit.

2.4 Déterminer l'équation mécanique par application du principe fondamental de la dynamique.

2.5 En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la barre. On posera :

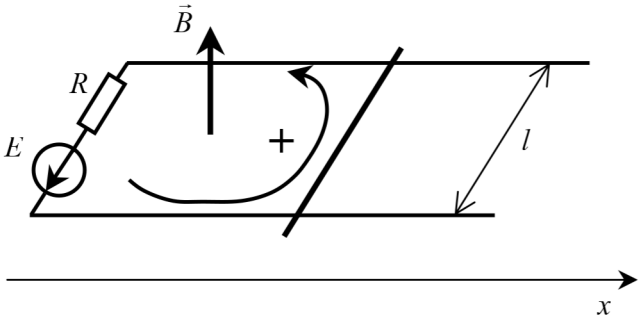
$$\tau = \frac{mR}{B^2 l^2} .$$

2.6 Résoudre complètement cette équation et tracer le graphe de v en fonction de t.

2.7 Multiplier chaque membre de l'équation électrique par i et chaque membre de l'équation mécanique par v. En déduire un bilan de puissance.

2.8 Que devient l'énergie cinétique initiale de la barre ?

B- On reprend le problème précédent mais on rajoute sur le conducteur reliant les deux rails, un générateur idéal de tension de f.é.m. constante E (cf. figure). La barre est cette fois initialement immobile.



2.9 Écrire l'équation électrique du circuit et l'équation mécanique.

2.10 En déduire l'expression de la vitesse de la barre en fonction du temps. On pourra utiliser dans les expressions la constante τ définie au 2.5.

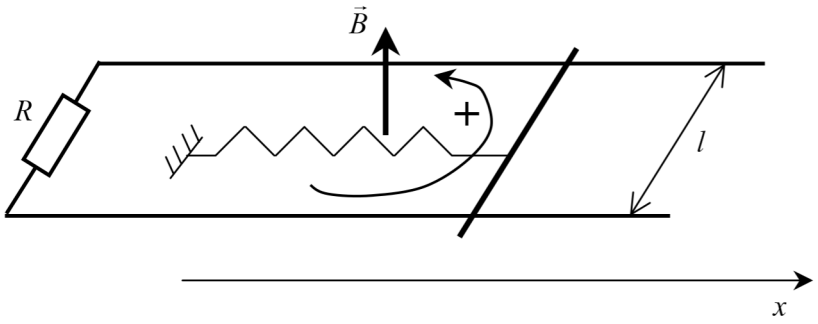
2.11 Tracer l'allure du graphe de v en fonction de t

2.12 Déterminer l'intensité i dans le circuit en fonction de t et tracer le graphe correspondant.

2.13 Faire un bilan de puissance comme au 2.7. À quoi est utilisée la puissance fournie par le générateur ?

3- Oscillations d'une barre plongée dans un champ magnétique

On reprend le dispositif du **2-A** mais maintenant la barre est reliée à un ressort de raideur k. L'origine des abscisses est prise lorsque le ressort est au repos. À l'instant initial, l'abscisse de la barre est égale à a (avec $a > 0$) et la barre est lâchée sans vitesse initiale. La barre peut glisser sans frottement sur les rails.



3.1 Écrire l'équation électrique et l'équation mécanique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x de la barre. On posera :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \tau = \frac{mR}{B^2 l^2}.$$

3.2 Résoudre complètement cette équation si $\omega_0 \tau \gg 1$.

3.3 Tracer l'allure du graphe de x en fonction du temps t.

3.4 Faire un bilan de puissance. Justifier l'égalité suivante :

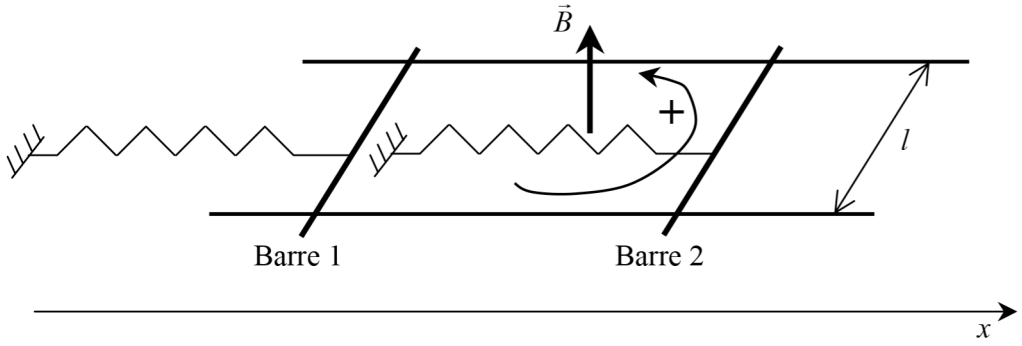
$$\int_{t=0}^{+\infty} Ri^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} k a^2 .$$

4- Oscillations de deux barres plongées dans un champ magnétique

Deux barres parallèles et identiques, de même masse m, peuvent glisser sans frottement sur deux rails, parallèles, distants de l. L'ensemble des rails et des barres est dans un même plan horizontal. Les seuls mouvements possibles des barres sont des translations rectilignes parallèles à la direction Ox des rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B}$. Les deux barres et les tronçons de rails situés entre les barres forment un circuit fermé. Ce circuit fermé possède une résistance électrique R (non représentée sur le schéma ci-dessous) qui sera supposée constante quelle que soit la position des barres. On définit un sens de circulation positive sur ce circuit comme indiqué sur le schéma.

Chacune des barres est liée à un ressort de raideur k. La position de la barre 1 est repérée par son abscisse x_1, comptée à partir de la position pour laquelle le ressort auquel elle est liée est au repos. De même, la position de la barre 2 est repérée par son abscisse x_2, comptée à partir de la position pour laquelle le ressort auquel elle est liée est au repos. On se reportera à la figure ci-dessous.

À l'instant initial, les deux barres sont lâchées sans vitesse initiale aux positions $x_1(0) = a$, avec $a > 0$, et $x_2(0) = 0$.



4.1 Écrire l'équation électrique du circuit.

4.2 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacune des barres et en déduire deux équations mécaniques.

4.3 Déduire de ce qui précède le système d'équations différentielles vérifié par x_1 et x_2. On posera $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $\tau = \dfrac{mR}{B^2 l^2}$.

4.4 On pose $X = x_1 + x_2$ et $Y = x_1 - x_2$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par X et l'équation différentielle vérifiée par Y.

4.5 Quelle est la limite de Y quand $t \to \infty$? En déduire au bout d'un temps *très long* :

- les expressions de x_1 et x_2 en fonction de t et la nature du mouvement des deux barres ;
- l'intensité i.

Exercice 2 : Phénomène de diffusion thermique

Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 \simeq 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$
Nombre d'Avogadro	$N_\mathrm{A} \simeq 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Constante des gaz parfaits	$\mathrm{R} \simeq 8{,}31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$
Constante de Boltzmann	$k_\mathrm{B} \simeq 1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$

I – Préliminaires

1 – Décrire le moteur microscopique commun à tous les phénomènes de diffusion.

Dans toute la composition, on nomme *équation de diffusion* une équation de type :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D\Delta a,$$

où $a(M,t)$ peut représenter un champ scalaire ou vectoriel réel représentant une grandeur physique et D est une grandeur réelle caractérisant le processus diffusif étudié, appelé coefficient de diffusion.

2 – Donner la dimension de D.

3 – Déterminer au moins deux propriétés de l'équation de diffusion et préciser leurs conséquences sur l'étude des phénomènes diffusifs.

4 – On note τ un temps caractéristique d'évolution et L^* une distance caractéristique d'évolution de $a(M,t)$. En faisant une analyse dimensionnelle, relier ces deux grandeurs. Commenter.

5 – Définir la notion de régime stationnaire. Dans le cas du régime stationnaire, donner la forme que prend l'équation de diffusion. Commenter.

En régime quelconque, l'équation de diffusion peut être analysée comme une équation de propagation puisqu'elle relie des dérivées partielles spatiales à des dérivées partielles temporelles du champ $a(M,t)$. On s'intéresse à la propagation dans la direction (Oz) et le sens croissant, d'une onde de pulsation ω, caractérisée par une amplitude complexe : $\underline{a}(M,t) = \underline{A}\mathrm{e}^{j(\omega t - \underline{k}z)}$, telle que $a(M,t) = \mathrm{Re}(\underline{a}(M,t))$ et où $\underline{k}\vec{u}_z$ est un vecteur d'onde complexe.

6 – Déterminer la relation de dispersion reliant $\underline{k}$ et ω. Indiquer si la propagation s'accompagne d'un phénomène de dispersion et/ou d'atténuation. Définir dans ce cas l'épaisseur de peau δ.

II – Diffusion de la chaleur

II.1 – La loi de Fourier

Soit $T(M,t)$ la température en un point M de l'espace à l'instant t. La loi de Fourier est une loi phénoménologique qui relie le champ de température $T(M,t)$ au vecteur densité de courant thermique : $\vec{j}_{\text{th}}(M,t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$.

7 – Définir la notion de loi phénoménologique. Citer deux conditions de validité de la loi de Fourier.

8 – Donner quelques informations historiques sur le scientifique J. Fourier (dates, travaux).

9 – Nommer le coefficient λ et donner son unité. Citer des paramètres physiques dont peut dépendre le coefficient λ.

Dans la suite de la composition on considère le coefficient λ comme constant et indépendant du point M.

10 – Donner l'ordre de grandeur de ce coefficient pour un métal, l'eau et l'air à température ambiante.

Une expérience qualitative de cours classique consiste à poser au même instant deux glaçons identiques sur deux matériaux différents (par exemple un récipient en bois et une poêle) et à observer la fonte des glaçons.

FIGURE 1 – Deux glaçons identiques sur une poêle et un récipient en bambou, 5 minutes après qu'ils ont été posés sur leur support respectif. D.R.

11 – La photographie de la figure 1 a été prise cinq minutes après le début de l'expérience. Analyser la situation physique et proposer une explication à cette expérience qualitative.

On s'intéresse maintenant à la diffusion de la chaleur dans un matériau immobile de volume constant, de masse volumique μ uniforme et de capacité thermique massique à volume

constant c_v uniforme. On suppose qu'il n'y a ni production, ni absorption de la chaleur au sein du matériau.

12 – À partir du premier principe de la thermodynamique, déterminer l'équation de la diffusion satisfaite par le champ de température $T(M,t)$ dans le matériau. Indiquer à chaque étape du raisonnement s'il est nécessaire de faire des hypothèses. Donner l'expression du coefficient de diffusion D_{th} associé à la diffusion de la chaleur (ce coefficient est également appelé diffusivité thermique).

Il existe différents dispositifs expérimentaux permettant de mesurer la conductivité thermique ou le coefficient de diffusivité thermique d'un matériau : des méthodes de mesures en régime stationnaire, des méthodes en régime quasi-établi et des méthodes en régime variable...Les mesures d'une conductivité thermique avec une bonne précision sont des opérations très délicates qui se font en général dans des laboratoires spécialisés. Le principe de mesure est différent suivant le type de matériau que l'on souhaite étudier (plus ou moins conducteur de chaleur, solide ou fluide...).

Dans la suite, on se propose d'étudier deux principes de mesures en régime stationnaire de la conductivité thermique d'un matériau : le premier matériau sera solide, le suivant sera un fluide.

II.2 – Dispositif de la plaque chaude gardée

Cette méthode est assez bien adaptée à la mesure de la conductivité thermique λ de matériaux isolants solides, dont la forme est une plaque de surface Σ et d'épaisseur e. On considère que la surface Σ dans l'expérience présentée ici est de 610×610 mm^2 ; l'épaisseur e est variable suivant les échantillons, entre 20 mm et 100 mm.

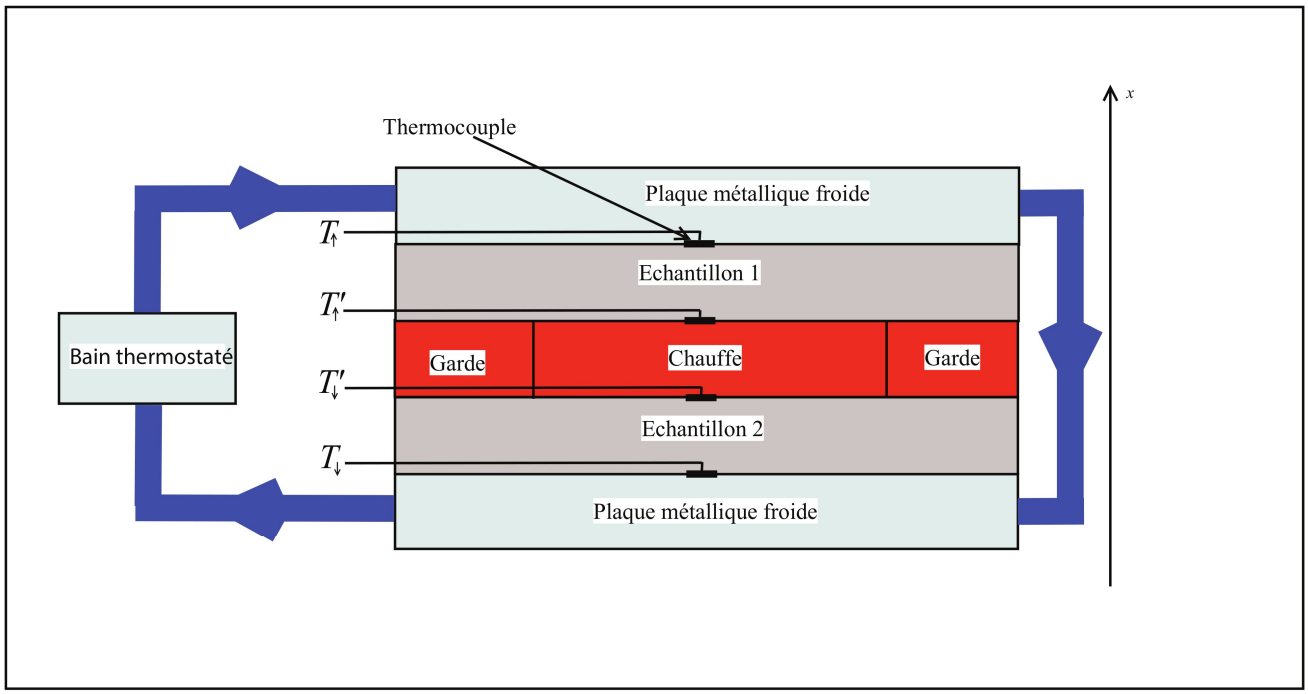


FIGURE 2 – Dispositif expérimental de la méthode de la plaque chaude gardée.

La figure 2 indique le schéma de principe de l'expérience. Les plaques, placées à la base et au sommet du dispositif expérimental, sont constituées d'un matériau très conducteur (cuivre ou aluminium) et sont maintenues à une température constante grâce à l'utilisation d'une circulation d'eau issue d'un bain thermostaté.

Une plaque chauffante délivre par effet Joule une puissance totale de chauffe ϕ uniforme et constante. Cette puissance de chauffe est transmise aux deux échantillons quasi-identiques constitués du même matériau dont on veut mesurer la conductivité thermique. On supposera ici que la puissance totale de chauffe générée par l'élément chauffant se répartit dans chacun des échantillons, et on note $\varphi_S = \frac{\phi}{2S}$ la densité moyenne de flux thermique (en W·m^{-2}) émise par la plaque chauffante de surface S et traversant les échantillons.

Afin de s'assurer que le transfert thermique est unidirectionnel dans la zone centrale, on entoure la plaque chauffante d'un anneau de garde carré, à la même température que cette dernière.

On place des thermocouples sur chaque face des échantillons (voir figure 2). On note $T_\uparrow$ et $T'_\uparrow$ les températures mesurées respectivement sur la face froide et la face chaude de l'échantillon 1. De même, on note $T_\downarrow$ et $T'_\downarrow$ les températures mesurées respectivement sur la face froide et la face chaude de l'échantillon 2. On note enfin les écarts positifs de température $\Delta T_\uparrow = T'_\uparrow - T_\uparrow$ et $\Delta T_\downarrow = T'_\downarrow - T_\downarrow$.

13 – On se place dans le cadre d'un modèle unidimensionnel, où le champ de température dans les échantillons ne dépend que de la coordonnée x : $T(x,t)$. Discuter l'hypothèse permettant de supposer un modèle unidimensionnel. Expliquer qualitativement le fonctionnement de l'anneau de garde.

14 – À partir de l'équation de diffusion thermique, déterminer la forme générale que prend la fonction $T(x)$ en régime stationnaire dans les échantillons.

15 – Définir la notion de résistance thermique d'une plaque échantillon de surface s et d'épaisseur e et déterminer son expression.

16 – Trouver le ou les intérêts dans l'utilisation d'un dispositif expérimental « symétrique », utilisant deux échantillons quasi-identiques de part et d'autre de la plaque chauffante au lieu d'un.

17 – Déterminer l'expression de la conductivité thermique λ du matériau constituant les échantillons en fonction des épaisseurs respectives $e_\uparrow$ et $e_\downarrow$ des échantillons 1 et 2, des écarts de température $\Delta T_\uparrow$ et $\Delta T_\downarrow$ et de la densité moyenne de flux thermique φ_S. Indiquer les hypothèses nécessaires à la détermination expérimentale de cette conductivité thermique. En donnant quelques exemples pratiques, préciser les conditions expérimentales qui permettraient au mieux de respecter ces hypothèses. Expliquer pourquoi ce dispositif fonctionne essentiellement pour des matériaux isolants.

Avec un dispositif similaire à celui qui est décrit dans ce sujet (figure 2), un laboratoire a mesuré la conductivité thermique de deux échantillons d'un isolant de laine de coton (ECOPEG Ouate 39 75 mm) fabriqué à partir de produits recyclés et disponible en magasin de bricolage. Les deux plaques échantillons avaient la même épaisseur e =75,0 mm. Pour une densité moyenne de flux thermique φ_S égale à 7,56 W·m^{-2}, les mesures qui ont été effectuées sont données dans la table 1.

	Température face chaude (°C)	Température face froide (°C)
Echantillon 1	17,4	2,5
Echantillon 2	17,5	2,5

Table 1 – Données expérimentales. Mesures sur isolant ECOPEG Ouate 39 75 mm.

18 – Déterminer la conductivité thermique du matériau étudié. Commenter la valeur trouvée.

19 – La capacité thermique massique de l'isolant précédent est de l'ordre de $c_v = 1{,}5 \times 10^3 \text{J·kg}^{-1}\text{·K}^{-1}$ et sa masse volumique $\mu = 1{,}8 \times 10^1 \text{kg·m}^{-3}$. Déterminer l'ordre de grandeur de la durée d'établissement du régime stationnaire dans les plaques échantillons précédentes. Commenter.

II.3 – Dispositif des cylindres coaxiaux

Pour mesurer la conductivité d'un fluide, il est nécessaire d'envisager un autre type de dispositif expérimental.

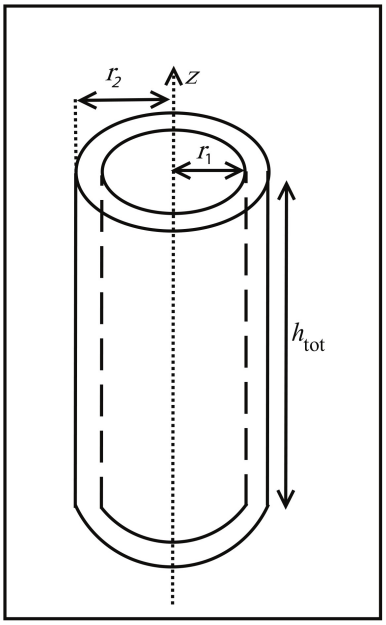


Figure 3 – Dispositif des cylindres coaxiaux.

On considère dans cette partie un dispositif constitué de deux cylindres coaxiaux sans anneaux de garde (figure 3). Il s'agit à nouveau d'une méthode de mesure en régime stationnaire mais dans une géométrie différente : on place un fluide entre deux surfaces cylindriques de rayons r_1 et r_2, de hauteur h_{tot}, de même axe (Oz) et séparées par un faible intervalle. Un élément chauffant est placé dans le cylindre intérieur. On mesure la différence de température entre les deux cylindres à l'aide de thermocouples. Afin de minimiser les transferts thermiques par rayonnement, on choisit des matériaux de faible émissivité pour fabriquer les cylindres (l'argent, qui a une grande conductivité thermique, peut être un bon candidat).

20 – Comparer les différents modes de transferts thermiques dans un fluide et un solide. On prendra soin de bien définir ces différents modes.

21 – Pour comparer le transport diffusif de la chaleur avec le transport convectif de la chaleur dans un fluide, on peut introduire un nombre sans dimension appelé nombre de Péclet thermique faisant intervenir, la vitesse caractéristique V du transport convectif, la diffusivité thermique D_{th} ainsi que la distance caractéristique de variation de l'écoulement l. Donner l'expression du nombre de Péclet, en le définissant comme le rapport du flux thermique convectif sur le flux thermique diffusif.

22 – Expliquer l'intérêt d'utiliser un faible espacement annulaire entre les deux cylindres dans lequel on place le fluide. En pratique, cet espacement annulaire $r_2 - r_1$ est typiquement compris entre 0,2 et 0,3 mm.

Dans la suite, on utilise les coordonnées cylindriques associées à l'axe de révolution (Oz) des cylindres.

23 – En supposant le régime stationnaire, les effets de bord négligeables et en invoquant des propriétés de symétrie, déterminer les paramètres dont dépend le champ scalaire de température $T(M)$.

24 – La température de la surface cylindrique intérieure (en $r = r_1$) est notée T_1 et celle de la température de la surface extérieure (en $r = r_2$) est notée T_2. Il n'y a pas de production de chaleur entre les deux cylindres et on suppose le régime stationnaire établi. Établir une propriété sur le flux radial de chaleur $\Phi(r)$ traversant une surface cylindrique quelconque d'axe (Oz) et de rayon r ($r_1 < r < r_2$). En déduire la forme générale du champ des températures entre les deux cylindres (si nécessaire, on introduira des constantes).

25 – On suppose la température continue en $r = r_1$ et $r = r_2$. En déduire la relation existant entre le flux de chaleur radial $\Phi(r)$ et la différence de température $\Delta T = T_1 - T_2$. Définir la notion de résistance thermique dans cette géométrie et déterminer son expression.

Dans le dispositif expérimental utilisé : $r_1 = 18{,}5\ \text{mm}$ et $r_2 = 18{,}8\ \text{mm}$. On détermine le flux de chaleur radial $\Phi(r)$, produit par effet Joule dans le cylindre interne, en connaissant la résistance chauffante d'une valeur de $R_{\text{chauf}} = 53{,}5\ \Omega$ et la tension à laquelle elle est soumise $U_{\text{chauf}} = 40{,}0\ \text{V}$. On veut étudier la conductivité thermique d'une huile de moteur (SAE 40) avec le dispositif décrit ici. On mesure $T_1 = 32{,}9°\text{C}$ et $T_2 = 28{,}2°\text{C}$. La surface effective de chauffe sur le cylindre interne est de $S_{\text{eff}} = 2\pi r_1 h_{\text{tot}} = 1{,}33 \times 10^{-2}\ \text{m}^2$.

26 – Déterminer littéralement puis numériquement la conductivité thermique de l'huile étudiée.

27 – En supposant que les incertitudes prédominantes sont celles sur la tension de chauffe ($\Delta U_{\text{chauf}} = 0{,}5\ \text{V}$) et celle sur la mesure de température ($\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0{,}2°\text{C}$), déterminer l'incertitude relative sur la conductivité thermique précédente (toutes les incertitudes considérées ici sont des incertitudes élargies à 95 %) puis présenter le résultat de la mesure et son incertitude élargies à 95 % associée.

Avec ce dispositif, une grande variété de fluides peut être étudiée. En particulier ce dispositif a été utilisé pour étudier la conductivité thermique de l'eau et dans ce dernier cas, de grandes plages de température et de pression ont été explorées.

II.4 – La méthode Flash

Dans cette partie, le principe d'une méthode de mesure de diffusivité thermique d'un solide en régime dépendant du temps, introduite en 1960, va être présentée [1].

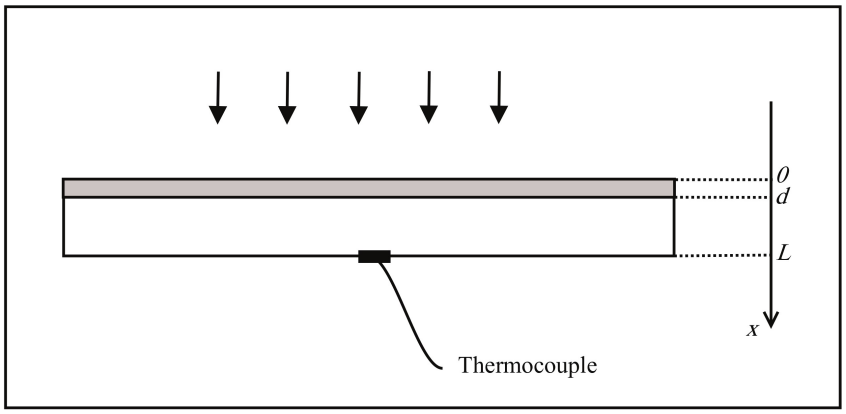


FIGURE 4 – Principe de la méthode flash.

Le schéma de principe de la méthode Flash est décrit sur la figure 4. Cette méthode consiste à soumettre la face avant d'un échantillon à faces parallèles à une impulsion de chaleur de courte durée, à l'aide de lampes forte puissance (lampes flash) ou de lasers et à observer l'évolution temporelle de la température en un point de la face arrière à l'aide par exemple d'un thermocouple ou d'un détecteur de rayonnement (photodiode infrarouge). Cette méthode, assez simple, s'est répandue dans les laboratoires de métrologie mais elle nécessite un certain nombre de précautions expérimentales pour atteindre une bonne précision.

On suppose qu'à $t = 0$, l'excitation flash est infiniment brève dans le temps et uniforme sur la face avant. On va ensuite supposer que la chaleur se propage dans l'échantillon dans la direction (Ox) uniquement, et que les pertes thermiques sont négligeables (expérience adiabatique). On suppose l'échantillon homogène. On note L l'épaisseur totale de l'échantillon et d l'épaisseur de la couche de l'échantillon chauffée par l'impulsion lumineuse à l'instant initial.

À l'instant initial, on fait l'hypothèse que dans la fine couche d'épaisseur d de l'échantillon du côté de la face chauffée, la température subit une élévation instantanée ΔT_0, tandis que dans le reste de l'échantillon, la température ne subit aucune modification, elle est uniforme et égale à la température T_i. Ainsi les conditions initiales peuvent s'écrire :

$T(x,t=0) = \Delta T_0 + T_\text{i}$ pour $0 < x < d$ et $T(x,t=0) = T_\text{i}$ pour $d < x < L$.

En ce qui concerne les conditions aux limites, on va supposer qu'aucune perte de chaleur ne se produit sur les faces avant et arrière de l'échantillon, supposées isolées thermiquement.

28 – On cherche à connaître le champ de température $T(x,t)$ au sein de l'échantillon. Ecrire l'équation vérifiée par $T(x,t)$ puis chercher une solution de cette équation sous la forme : $T(x,t) = T_\text{i} + f(x)g(t)$. Déterminer la forme générale des fonctions $f(x)$ et $g(t)$ dans laquelle figurent des constantes qu'il reste à déterminer.

1. Parker, W.J., Jenkins, R.J., Butler, C.P. & Abbott, G.L. 1961, "Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity", Journal of Applied Physics, vol. 32, no. 9, pp. 1679-1684.

29 – Ecrire les conditions aux limites que doit vérifier le flux thermique en $x = 0$ et $x = L$ et en déduire des informations sur la solution générale précédente $T(x,t)$.

30 – On cherche maintenant à trouver une solution de l'équation de diffusion qui vérifie non seulement les conditions aux limites mais également la condition initiale. Déterminer la forme générale du champ de température $T(x,t)$ répondant à la question posée.

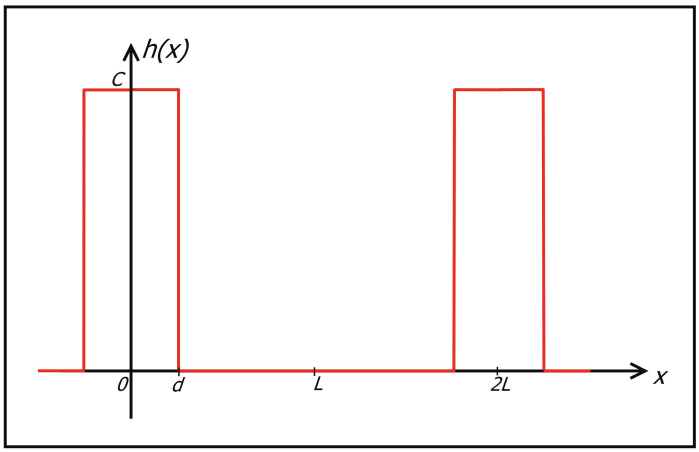


FIGURE 5 – Représentation graphique de la fonction $h(x)$.

On pourra utiliser la décomposition en série de Fourier de la fonction paire $2L$ périodique $h(x)$ représentée sur la figure 5 :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

avec

$$D_0 = \frac{d}{L}C \tag{2}$$

et

$$D_n = 2D_0 \frac{\sin(\frac{n\pi}{L}d)}{\frac{n\pi}{L}d}. \tag{3}$$

31 – Pour des temps infiniment longs, déterminer la température d'équilibre T_{eq} de l'échantillon. Commenter.

32 – Si on suppose que l'épaisseur d est suffisamment petite pour faire des calculs à l'ordre le plus bas non nul en $\frac{d}{L}$, montrer que la température sur la face arrière de l'échantillon peut s'exprimer de la manière suivante :

$$T(L,t) \approx T_{\text{i}} + (T_{\text{eq}} - T_i)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \exp\left(-D_{\text{th}}t\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\right)\right]. \tag{4}$$

33 – Simplifier au maximum l'expression précédente pour les temps longs. À l'aide de l'expression obtenue, déterminer le temps $t_{1/2}$ pour lequel la variation de la température sur la face arrière $T(L,t) - T_\text{i}$ atteint la moitié de sa valeur maximale à l'équilibre $T_\text{eq} - T_\text{i}$.

Sur la figure 6 est représentée une courbe expérimentale obtenue avec la méthode flash. L'échantillon étudié, à base d'oxyde d'aluminium (pureté 99,8 %), a pour épaisseur $L = 2{,}0$ mm. L'expérience a été réalisée à une température moyenne de 200°C. En ordonnée, figure le signal du capteur, délivrant une tension qui est une fonction affine de la température (en °C). Le pic situé entre 0 < t < 0,1 s correspond à l'instant où le flash est envoyé.

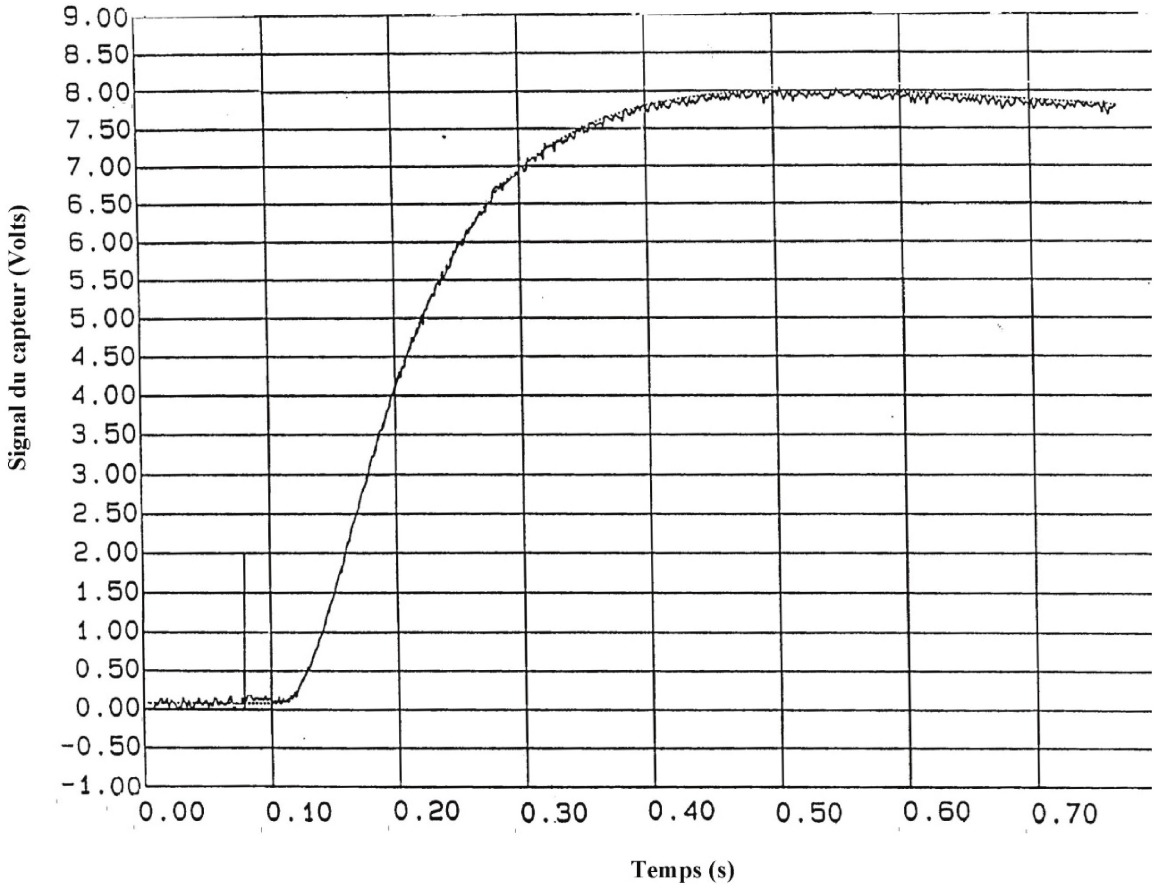


FIGURE 6 – Tracé expérimental de $T(L,t)$ pour de l'oxyde d'aluminium.

34 – Commenter la forme de la courbe expérimentale de la figure 6 et en particulier en la comparant à celle attendue théoriquement (il sera intéressant de se demander si une ou plusieurs hypothèses formulées dans le modèle ne sont pas remises en question au vue de la courbe).

35 – Déterminer la diffusivité thermique de l'échantillon.

36 – Citer des sources d'erreurs majeures responsables des incertitudes de la méthode de mesure de diffusivité thermique décrite dans cette partie. Citer également des avantages