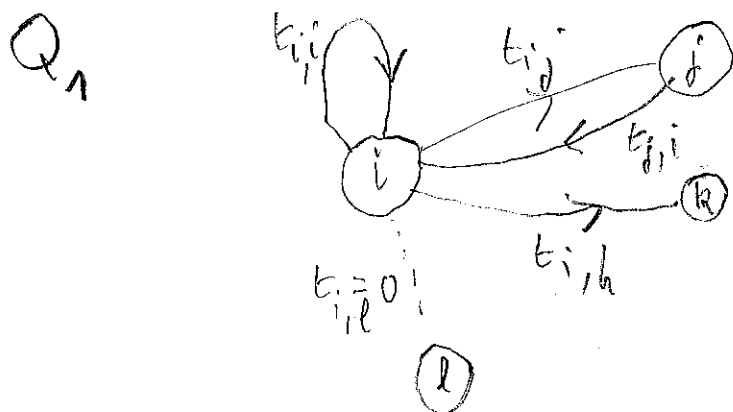




Notons $A_i^{(k)}$: "le point est sur le sommet i à l'étape k ".

$$\text{on a } p_1^{(k)} + \dots + p_n^{(k)} = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^{(k)}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^{(k)}\right)$$

Comme le point est sur le graphe et ne peut en sortir (vu le protocole), $\bigcup_{i=1}^n A_i^{(k)} = \Omega$ (univers des possibles)

d'o

$$\boxed{p_1^{(k)} + \dots + p_n^{(k)} = 1}$$

Q₂ Analyse

$$(p_1^{(k+1)} \dots p_n^{(k+1)}) = (p_1^{(k)} \dots p_n^{(k)})$$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

on pense (bien sûr) à FPT et SCF

Notons $T_{i,j}$: "le point passe de i à j ", $\mathbb{P}(T_{i,j}) = t_{ij}$

(2)

$$p_j^{(k+1)} = \mathbb{P}(A_j^{(k+1)}) \text{ notation de } Q_1$$

Or $(A_1^{(k)}, \dots, A_n^{(k)})$ est un SCE de Ω ,
($\forall i \in Q_1$)

donc par la FPT :

$$p_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{P}(A_i^{(k+1)} / A_j^{(k)})}_{\text{probabilité que le pt passe au sommet } j \text{ sachant qu'il est en } i} \underbrace{\mathbb{P}(A_j^{(k)})}_{p_j^{(k)}} \\ \text{donc } t_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i^{(k)} t_{ij}$$

on conclut avec la définition du produit matriciel :

$$\text{d'où } \boxed{P^{(k+1)} = P^{(k)} T}$$

Q3 Par récurrence si $P^{(k)} = P^{(0)} T^k$,
 $P^{(k+1)} = P^{(k)} T = P^{(0)} T^{k+1}$, comme $P^{(0)} = P^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = I_n$

$$\text{d'où } \boxed{\forall k \in \mathbb{N} : P^{(k)} = P^{(0)} T^k}$$

Q₄ Comme l'application :

(3)

$$\phi: M_{1,n}(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{1,n}(\mathbb{R})$$

$$(X, \Pi) \longmapsto X\Pi$$

est bilinéaire en dim. finie, elle est continue,

donc avec la relation de Q₂,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^{(k)} T = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(P^{(k)}, T)$$

$$= \phi(P, T) = PT$$

comme $P^{(k+1)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} P$ (suite exacte), par unicité

de la limite, d'où $\boxed{PT = P}$

Comme $P^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} P$, $\forall i \in [1, n]$: $p_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} p_i$

(suite coordonnée en dim. finie)

par TG, d'où $\boxed{p_1 + \dots + p_n = 1}$

Q₅
$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} J_4 - \frac{1}{3} I_4}$$

↗ équiprobabilité de 3 choix

Q₆ Diagonaliser J_4 , elle est diagonalisable par ⁽⁴⁾
 le th. spectral car elle est symétrique, réelle.

rg $J_4 = 1$ et $J_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où

$$\exists Q \in O_4(\mathbb{R}) \mid J_4 = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} Q^T$$

$$\text{donc } T = P(J_4) = Q \begin{pmatrix} P(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(4) \end{pmatrix} Q^T$$

$$\text{avec } P = \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$$

$$\text{d'où } \boxed{T = \frac{1}{3} Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^T}$$

$$Q_7 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad T^k = Q \begin{pmatrix} (-1/3)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^T$$

$$\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comme $\pi \mapsto Q\pi Q^T$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(\text{dim } \mathbb{R}^n)$,

$$\underline{\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^T}$$

Notons $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Pi^2 = \Pi$, d'où, si on pose (5)

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k, \quad L^2 = \underbrace{Q \Pi^2 Q^{-1}}_{Q \Pi Q^{-1}} = Q \Pi Q^{-1} = L,$$

donc L est la matrice d'un projecteur.

Comme $L^T = Q \Pi^T Q^T = Q \Pi Q^T = L$, L est

symétrique. d'où $\boxed{L \text{ est la matrice d'un projecteur orthogonal}}$

Elts géométriques :

on cherche $\text{Ker } u$, $\text{Im } u$ avec $\text{Im } u \perp \text{Ker } u$

où u est l'endo. canoniquement associée à L .

$$\text{rg } L = \text{Tr } L = \text{Tr } \Pi = 1, \text{ donc } \dim \text{Im } u = 1.$$

On sait aussi que $\text{Im } u = \text{Inv } u$.

Comme $TU = U$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$T^k U = U, \text{ donc, lorsque } k \rightarrow \infty, \quad \underline{L U = U}$$

d'où $\boxed{u \text{ est le projecteur } \perp \text{ sur } \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Q8 d'après Q4, Q7 et TG,

(6)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} P^{(0)} T^k = P^{(0)} L = (p_1, p_2, p_3, p_4)$$

Comme $\Pi \mapsto \Pi^T$ est linéaire donc continue,

$$\left(P^{(k)} \right)^T \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} L^T P^{(0)T} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \text{ et } L^T = L$$

Si on pose $P^{(0)T} = X \in M_{4,1}(\mathbb{R})$, $LX \in \text{Im } L$, soit

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad LX = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad p_i = \lambda, \forall i$$

$$\text{or (Q4)} \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 = 4\lambda \quad ; \quad \lambda = \frac{1}{4}$$

$$\text{d'où } \forall P^{(0)}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} P^{(k)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

Q9 Dans le graphe, il n'y a que des flèches $\leftrightarrow$
donc la matrice T est symétrique.
Chaque sommet est relié à 3 autres sommets,
donc $t_{ij} = \frac{1}{3}$ (ou 0 si pas de connexion), d'où

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $TU = U$,

d'où: $(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$

Q₁₀ Si le point est en $i \in S_1$, alors à l'étape suivante, il est en $j \in \{2, 4, 5\} \subset S_2$. De même pour tout i , si $i \in S_1, j \in S_2$ et si $i \in S_2, j \in S_1$.

Q₁₁ A l'étape 0, le point est sûr d'être en position $1 \in S_1$. Il est donc sûr d'être en S_2 à l'étape 1 donc sûr d'être en S_1 à l'étape 2.

Plus généralement, le point est sûr d'être sur un point de S_1 aux étapes $2k$ et sur un point de S_2 aux étapes $2k+1$. ⑧

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P^{(2k)} = (*, 0, *, 0, 0, *, 0, *)$$


 il n'a aucune chance d'être en
 2, 4, 5 ou 7

$$P^{(2k+1)} = (0, *, 0, *, *, 0, *, 0)$$

On en déduit que si $(P^{(k)})$ convergerait, ses suites coordonnées convergeraient aussi et donc, elle devrait converger vers $P = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ce qui est absurde avec Q_4 car $0+0+0+0+0+0+0 \neq 1$

d'où $(P^{(k)})$ diverge (en oscillant)

Q12 Si on note $\Pi = (m_{i,j})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\forall i,j$ $m_{i,j} \geq 0$ (9)

$$\Pi U = \begin{pmatrix} m_{1,1} + \dots + m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,1} + \dots + m_{n,n} \end{pmatrix} = U \Leftrightarrow \forall i: \underbrace{m_{i,1} + \dots + m_{i,n}}_{i\text{-eme distribution de proba}} = 1$$

$$\Pi \text{ stochastique} \Leftrightarrow \Pi \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q13 * $T = (p_{i,j})$, on a $\forall i,j$ $p_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{j=1}^n p_{i,j} = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_{i,j}) \quad \text{où } A_{i,j}: \text{"le point passe de } i \text{ à } j"$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_{i,j}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad \text{car selon}$$

le protocole le point se déplace aléatoirement sur les sommets.

$$d_1^0: \boxed{T \text{ matrice stochastique}}$$

* $P^{(k)}$ a ses coefficients positifs car ce sont des probas, et on conclut avec Q1:

$$d_2^0: \boxed{p^{(k)} \text{ distribution de probabilité}}$$

$$Q_{14} \quad X\pi = \left(\sum_{i=1}^n x_i m_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^n x_i m_{i,n} \right)$$

(10)

donc des coeff. sont positifs.

$$\sum_{j=1}^n (X\pi)_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i m_{i,j}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{i,j} \right) x_i = \sum_{i=1}^n 1 x_i = 1$$

= 1 car π sto

x distribution

d' X π distribution de proba.

Q₁₅ on utilise Q₁₂ : $\pi N U = \pi U = U$, comme les coefficients de πN sont positifs $(\sum_{i=1}^n m_{i,\alpha} \pi_{\alpha,j})$,

d' πN stochastique

$$Q_{16} \quad * \quad \forall i, j \quad \alpha m_{i,j} + (1-\alpha) \pi_{i,j} \geq 0 + 0 \geq 0$$

$$* \quad (\alpha \pi + (1-\alpha) N) U = \alpha U + (1-\alpha) U = U$$

d' $\alpha \pi + (1-\alpha) N$ stochastique

Q17 $\Pi u = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} m_{1,1}u_1 + \dots + m_{1,n}u_n = \lambda u_1 \\ \vdots \\ m_{n,1}u_1 + \dots + m_{n,n}u_n = \lambda u_n \end{cases}$

(11)

donc la h -ième ligne donne :

$$\begin{aligned} |(\lambda - m_{h,h})u_h| &= \left| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^n m_{h,j} u_j \right| \\ &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^n m_{h,j} \times |u_h| \end{aligned} \quad m_{i,j} \geq 0$$

Comme u est un vecteur propre, il est non nul et $|u_h| > 0$, on peut donc simplifier :

d₁
$$|\lambda - m_{h,h}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^n m_{h,j} = 1 - m_{h,h}$$

Grâce à l'inégalité triangulaire inversée,

$$|\lambda| - m_{h,h} \leq |\lambda - m_{h,h}| \leq |\lambda| - m_{h,h} \leq 1 - m_{h,h}$$

d₂
$$|\lambda| \leq 1$$

Q18 Passons par $m_{h,h}$:

(12)

$$|\lambda - \delta| = |\lambda - m_{h,h} + m_{h,h} - \delta|$$

$$\leq |\lambda - m_{h,h}| + |m_{h,h} - \delta|$$

$$\leq 1 - \cancel{m_{h,h}} + \cancel{m_{h,h}} - \delta \quad \text{car } \delta \leq m_{h,h}$$

$$\leq 1 - \delta$$

$$\mathcal{C}_h' \quad \boxed{|\lambda - \delta| \leq 1 - \delta} \quad (E)$$

Posons $\lambda = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $|\lambda|^2 = a^2 + b^2 = 1$

L'inégalité (E) donne en élevant au carré (tout positif) :

$$(a - \delta)^2 + b^2 \leq 1 - 2\delta + \delta^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + \delta^2 - 2a\delta}_{1 + \delta^2 - 2\delta} \leq 1 + \delta^2 - 2\delta$$

$$\Rightarrow -2a\delta \leq -2\delta \Rightarrow \delta(1-a) \leq 0$$

Si les coefficients diagonaux sont strictement positif,
 $\delta > 0$ donc $1-a \leq 0$ soit $a \geq 1$.

$$\text{On } a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 \leq 1 \Rightarrow a \leq |a| \leq 1$$

$$\text{donc } a = 1 \text{ et donc } b = 0 \quad \mathcal{C}' \quad \boxed{\lambda = 1}$$

Q₁₉ * Comme $\Pi U = U$, $\dim \text{Ker}(\Pi - I_n) \geq 1$ (13)

* On reprend le système du début de Q₁₇: $\Pi u = u$.

notons $u_k = \min_{1 \leq i \leq n} (u_i)$

L'idée: "voir" les barycentres : car Π stoch.

$$\forall i \quad m_{k,1} u_1 + \dots + m_{k,n} u_n = u_k = \sum_{j=1}^n m_{k,j} u_j$$

$$\Rightarrow \underbrace{m_{k,1}}_{>0} (\underbrace{u_1}_{\geq 0} - u_k) + \dots + \underbrace{m_{k,n}}_{>0} (\underbrace{u_n}_{\geq 0} - u_k) = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = u_k, \dots, u_n = u_k$$

donc $u \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

d'où $\dim \text{Ker}(\Pi - I_n) = 1$

Q₂₀ $X\Pi = X \Leftrightarrow \Pi^T X = X^T \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(\Pi^T - I_n)$

On $\text{rg}(\Pi^T - I_n) = \text{rg}((\Pi - I_n)^T) = \text{rg}(\Pi - I_n) = n-1$,

par la th du rg, $\dim \text{Ker}(\Pi^T - I_n) = 1$.

Notons $\text{Ker}(\Pi^T - I_n) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)$.

Si $X\Pi = X$, $X^T \in \text{Ker}(\Pi^T - I_n)$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$X^T = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ soit } X = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

(14)

Comme X est une distribution de proba.,

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$$

Si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, il n'y a aucune distribution X

Si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, λ est unique ($= \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$)

d'où il existe au plus une distrib. vérifiant $X\Pi = X$

Q21 On a $m_{ij}^{(k+1)} = \sum_{k=1}^n m_{ik} m_{kj}^{(k)}$ tout est positif

$$\lambda_j \sum_{k=1}^n m_{ik} \alpha_j^{(k)} = \alpha_j^{(k+1)}$$

minimant des $m_{ij}^{(k+1)}$

q3 $\alpha_j^{(k+1)} \geq \alpha_j^{(k)}$, on fait pareil avec $\beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$.

Comme on a $\min \leq \max$,

$$\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$$

Q22 analyse

$$\text{on veut } \alpha_j^{(k+1)} \geq m_{i_0, j_0} \beta_j^{(k)} + \underbrace{(1 - m_{i_0, j_0})}_{\geq 0} \alpha_j^{(k)} \\ = \sum_{k \neq j_0} m_{i_0, k} \alpha_j^{(k)}$$

$$\text{soit } i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \alpha_j^{(k+1)} = m_{i_0, j}^{(k+1)} = \sum_{k=1}^n m_{i_0, k} m_{k, j}^{(k)}$$

on va montrer par $\alpha_j^{(h)}$ sur

$\forall n$: celui correspondant à $\beta_j^{(h)}$

synthèse: $\exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \alpha_j^{(k+1)} = m_{i_0, j}^{(k+1)}$

$$\exists j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \beta_j^{(k)} = m_{j_0, j}^{(k)}, \text{ donc :}$$

$$\alpha_j^{(k+1)} = m_{i_0, j_0} m_{j_0, j}^{(k)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_0}}^n m_{i_0, k} m_{k, j}^{(k)}$$

$$\geq m_{i_0, j_0} \beta_j^{(k)} + \sum_{k \neq j_0} \underbrace{m_{i_0, k}}_{\geq 0} \times \alpha_j^{(k)}$$

$$\geq m_{i_0, j_0} \beta_j^{(k)} + (1 - m_{i_0, j_0}) \alpha_j^{(k)}$$

$\uparrow$ Π stochastique

d'où

$$\boxed{\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geq m_{i,j} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})}$$

(16)

Q23 On fait la même chose avec $\beta_j^{(k+1)}$:

$$\exists i_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \beta_j^{(k+1)} = m_{i_1, j}^{(k+1)} = \sum_{k=1}^n m_{i_1, k} m_{k, j}^{(k)}$$

$$\exists j_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \alpha_j^{(k)} = m_{j_1, j}^{(k)}, \text{ donc}$$

$$\beta_j^{(k+1)} = m_{i_1, j_1} m_{j_1, j}^{(k)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_1}}^n m_{i_1, k} m_{k, j}^{(k)}$$

$$\geq m_{i_1, j_1} \alpha_j^{(k)} + \sum_{\substack{k \neq j_1 \\ \frac{m_{i_1, k}}{1 - m_{i_1, j_1}} \geq 0}} m_{i_1, k} \beta_j^{(k)}$$

$$1 - m_{i_1, j_1}$$

d'où

$$\boxed{\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geq m_{i_1, j_1} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})}$$

Q24 Sommons les 2 inégalités (Q22 + Q23) :

$$\alpha_j^{(k+1)} - \beta_j^{(k+1)} + \beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)} \geq (m_{i,j} + m_{i_1, j_1}) (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$$

$$\boxed{\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leq (1 - 2\varepsilon) (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})}$$

$\geq 2\varepsilon$

≥ 0

$Q_{25} \neq Q_{24}$ montre avec une récurrence : (17)

$$0 \leq \beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)} \leq q^k \left(\underbrace{\beta_j^{(0)}}_1 - \underbrace{\alpha_j^{(0)}}_0 \right) \quad (\Pi^0 = I_n)$$

$\downarrow k \rightarrow \infty$
 $\searrow \quad \swarrow$
 $0 \quad \leftarrow \quad TE$

Car $q < 1$ et $q > 1 - 2\alpha$
 soit $|q| < 1$

$(\forall i, j \quad m_{i,j} < 1)$
 $(\text{Si } m_{i,j} = 1, m_{i,k} = 0 \text{ pour } k \neq j)$

* Avec Q_{21} , les suites $(\alpha_j^{(k)})$ et $(\beta_j^{(k)})$ sont adjacentes, donc convergentes.

Notons $b_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_j^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_j^{(k)}$

$\forall (i, j) \in [1, n]^2$
 $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_j^{(k)} \leq m_{i,j}^{(k)} \leq \beta_j^{(k)}$$

$\downarrow$
 $\searrow \quad \swarrow$
 $b_j \quad \leftarrow \quad T.E.$

cgs

$$\Pi^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} m_{i,j}^{(k)} \right) = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & & b_n \end{pmatrix}$$

$$\exists \text{ fin } b_1 + \dots + b_n \stackrel{TG}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (m_{1,1}^{(k)} + \dots + m_{1,n}^{(k)}) = 1 \quad (18)$$

car π^k est stochastique
par récurrence et Q_{15}

alors B est stochastique

Q26 $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \geq 1 :$

$$\alpha_j^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} m_{i,j} \geq \varepsilon > 0$$

$$0 < \alpha_j^{(1)} \leq \alpha_j^{(k)} \leq b_j \quad (\alpha_j^{(k)} \nearrow b_j)$$

donc $b_j > 0$

alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad b_i > 0$

Q27 Par TG (idem I.A), $(P^{(k)})$ converge vers $P^{(0)}B$.

Notons L cette limite, $L = P^{(0)}B$ et notons $P^{(0)} = (p_1, \dots, p_n)$

$$L = P^{(0)}B \Leftrightarrow \begin{cases} \ell_1 = b_1(p_1 + \dots + p_n) = b_1 \\ \vdots \\ \ell_n = b_n(p_1 + \dots + p_n) = b_n \end{cases}$$

donc $L = P^{(0)}$

Q₂₈ Comme pour Q₄, $p^{(k+1)} = p^{(k)} \Pi^k \Pi$ donne (19)

longue $k \rightarrow \infty$, $p^{(\infty)} = p^{(\infty)} \Pi$, avec Q₂₀,

Q' $p^{(\infty)}$ unique distribution de $\Pi = P$

Q₂₉ * $a_{i,i}$ c'est le 2^{ème} pt du protocole

* si $i \not\rightarrow j$, il n'a aucune chance d'aller
en j , donc $a_{i,j} = 0$

si $i \rightarrow j$, le 1^{er} pt du protocole assure
que $a_{i,j} = P(X=j)$ où $X \sim \mathcal{U}(\lambda_i)$ donc

$$\underline{a_{i,j} = \frac{1}{\lambda_i}}$$

Q₃₀ * $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$, $b_{i,j} = (1-\alpha) a_{i,j} + \frac{\alpha}{n}$
 $\geq (1-\alpha) \times 0 + 0 \geq 0$

si $b_{i,j} = 0$, alors $(1-\alpha) a_{i,j} = \frac{\alpha}{n} = 0$: absurde car

$\alpha \in]0,1[$ donc $b_{i,j} > 0$

* $\frac{1}{n} \mathbf{1}_n$ est sta., A aussi d'après Q₁₃.

q3 d'après Q_{16} / B aussi

(20)

U" B matrice sto, $\bar{\alpha}$ coeff. st > 0

Q31 c'est la proba correspondant à $a_{i,i} = 1$,

d'où cette proba p vaut $p = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{n}$

Q32 La convergence de $(Q^{(k)})$ est acquise par Q_{27}

Notons $Q^\infty = (\mu_1, \dots, \mu_n)$

La question Q_{27} donne la relation $Q^\infty B = Q^\infty$, donc

$$\forall j \in [1, n] \quad \mu_j = \sum_{i=1}^n \mu_i \left((1-\alpha) a_{i,j} + \frac{\alpha}{n} \right)$$

$$= \mu_j \left((1-\alpha) a_{j,j} + \frac{\alpha}{n} \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \mu_i \left(\frac{1-\alpha}{n} + \frac{\alpha}{n} \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \mu_i \left(\frac{\alpha}{n} \right)$$

$$\text{donc } \mu_j = \frac{1}{1 - (1-\alpha) a_{j,j} - \frac{\alpha}{n}} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \mu_i \left(\frac{1-\alpha}{n} + \frac{\alpha}{n} \right) + \frac{\alpha}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \mu_i \right)$$

cgs $\mu_j = f(\mu_{i_0}) = a\mu_{i_0} + b$ pour $i \rightarrow j$

(21)

avec $a = \frac{1}{\underbrace{1 - (1-\alpha)a_{jj} - \frac{\alpha}{n}}_{a'}} \times \frac{1-\alpha}{\lambda_{i_0}}$ et b: toute l'expression du bas de la pge 20 sauf le terme $a\mu_{i_0}$.

vérifier que $a' = \frac{1}{a'} \times \frac{1-\alpha}{\lambda_{i_0}} \geq 0$.

$1-\alpha > 0, \lambda_{i_0} > 0$, puis

$$a' = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{n} & \text{si } a_{jj} = 0 \\ 1 - (1-\alpha) - \frac{\alpha}{n} = \alpha - \frac{\alpha}{n} & \text{si } a_{jj} = 1 \end{cases}$$

donc $a' \geq 0$, d'où f est croissante, soit

$\mu_{i_0} \mapsto \mu_j$ est croissante

de $\hat{m}$ $\mu_j = g(\lambda_{i_0}) = \frac{c}{\lambda_{i_0}} + d$ avec $c \geq 0$, donc

g décroissante (sur $\mathbb{R}^{+*}$), soit

$\lambda_{i_0} \mapsto \mu_j$ décroissante

Q33 et Q34 : voir la feuille (24)

(22)

Q35 Notons c_k le nombre d'appels de np. dot dans la fonction puissance 1 (qui est le m dans tous les cas)

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_k = 1 + c_{k-1} \\ \forall k \geq 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad c_k = k$$

Notons $\hat{c}_k$ (resp. $\tilde{c}_k$) le nb d'appels dans le cas pire (resp. meilleur) des cas pour puissance 2.

Le pire : le nb d'appels est maximal lorsque on va toujours de la branche la impaire ;

$$\begin{cases} k = 2k_1 + 1 \\ k_1 = 2k_2 + 1 \\ \vdots \\ k_i = 2k_{i+1} + 1 \text{ et } k_{i+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } k &= 2k_1 + 1 = 2^2 k_2 + 2 + 1 = 2^3 k_3 + 2^2 + 2 + 1 = \dots \\ &= \underbrace{2^{i+1} k_{i+1} + 2^i + 2^{i-1} + \dots + 2 + 1} \end{aligned}$$

Cgs: Si $k = 2^i + 2^{i-1} + \dots + 2 + 1$,

$$\hat{c}_k = \hat{c}_{k_1} + \underbrace{2}_{2 \text{ multiplications } B \times (B \times B)^{\frac{k-1}{2}}}$$

$$= \hat{c}_{k_2} + 2 \times 2$$

$$= \hat{c}_{k_i} + 2 \times i = \hat{c}_1 + 2i = \underline{2i + 2}$$

Si $k \in [2^p, 2^{p+1}[$, le plus des cas sera

pour $k = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 2 + 1 = \underline{2^{p+1} - 1}$

et $\boxed{\hat{c}_k = 2p + 2}$

le meilleur

$$k = 2k_1$$

$$k_i = 2k_{i+1} \text{ et } k_{i+1} = 1$$

d'où $k = 2^{i+1}$ et de ce cas $\tilde{c}_k = \tilde{c}_{k_1} + 1$

Cgs pour $k \in [2^p, 2^{p+1}[$, le meilleur des

cas sera pour $\boxed{k = 2^p \text{ et } \tilde{c}_k = p + 2}$

$$\begin{aligned} &= \tilde{c}_{k_i} + 1 \\ &= \tilde{c}_1 + i = 2 + i \end{aligned}$$

```

import numpy as np

B=np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])

def identite(n):
    return np.identity(n)

def puissance1(B,k):
    global ck
    n=B.shape[0] # n est la taille de la matrice carée B

    if k==0:
        return identite(n)
    else:
        ck=ck+1
        return np.dot(B,puissance1(B,k-1))

def puissance2(B,k):
    global dk
    n=B.shape[0] # n est la taille de la matrice carée B

    if k==0:
        return identite(n)
    elif k%2==0:
        dk=dk+1
        return puissance2(np.dot(B,B),k//2)
    else:
        dk=dk+2
        return np.dot(B,puissance2(np.dot(B,B),(k-1)//2))

def nbmul(B,k):
    global dk
    dk=0
    puissance2(B,k)
    return dk

def tranche(p):
    L=[]
    for k in range(2**p,2**(p+1)):
        L.append(nbmul(B,k))
    return [min(L),max(L)]

#donne
#>>> tranche(7)
#[9, 16]

```