

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_x : t \mapsto \frac{1}{t^x \sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]1, +\infty[$. On a des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 1 et de $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$ et il y a intégrabilité ssi $x > 0$ (fonctions de Riemann).

Au voisinage de 1^+ , $f_x(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$ est intégrable.

f_x étant positive, l'existence de l'intégrable équivaut à l'intégrabilité et donc

$$I = \mathbb{R}^{+*}$$

2. $x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente en $+\infty$ à e^{-x} et donc intégrable au voisinage de $+\infty$. L'intégrale proposée existe donc. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = [\arctan(e^x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

3. $u \mapsto \text{ch}(u)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée ne s'annule pas. Il est donc licite de poser $t = \text{ch}(u)$ dans l'intégrale qui définit $f(1)$. On obtient

$$f(1) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(u)}{\text{ch}(u)\sqrt{\text{ch}^2(u) - 1}} du = \int_0^\infty \frac{2du}{e^u + e^{-u}} = \frac{\pi}{2}$$

4. Le même changement de variable donne

$$f(2) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\text{ch}^2(u)} = \left[\frac{\text{sh}(u)}{\text{ch}(u)} \right]_0^{+\infty} = 1$$

On a utilisé $\text{ch}(u) \sim e^u/2 \sim \text{sh}(u)$ au voisinage de $+\infty$.

5. $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive entre deux bornes "dans le bon sens". Ainsi

$$\forall x > 0, f(x) \geq 0$$

Comme la fonction intégrée est continue, positive et non nulle, on peut même dire que

$$\forall x > 0, f(x) > 0$$

6. Si $x \leq y$ alors pour tout $t > 1$ on a $f_x(t) \geq f_y(t)$ (avec les notations utilisées en 1). On en déduit en intégrant que $f(x) \geq f(y)$. Ceci montre que f est croissante sur I . Comme ci-dessus, on pourrait même montrer une stricte monotonie.

7. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \in I, t \mapsto f_x(t)$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.
- $\forall t > 1, x \mapsto f_x(t)$ est de classe C^1 sur I de dérivée $x \mapsto -\frac{\ln(t)}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$.
- $\forall x \in I, t \mapsto -\frac{\ln(t)}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$.
- $\forall [a, b] \subset I, \forall t > 1, \left| -\frac{\ln(t)}{t^x \sqrt{t^2 - 1}} \right| \leq \frac{\ln(t)}{t^a \sqrt{t^2 - 1}}$. Le majorant est continu sur $]1, +\infty[$, équivalent au voisinage de 1^+ à $\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{2}}$ et donc prolongeable par continuité en 1 (valeur 0), équivalent à $\frac{\ln(t)}{t^{x+1}}$ au voisinage de $+\infty$ et donc négligeable devant $\frac{1}{t^{1+x/2}}$ (croissances comparées puissance-logarithme). Comme $1 + x/2 > 0$, il y a aussi intégrabilité du majorant au voisinage de $+\infty$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et indique que $f \in C^1(I)$ avec

$$\forall x > 0, f'(x) = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x \sqrt{t^2 - 1}} dt$$

La fonction intégrée ci-dessus est positive et on a donc $f'(x) \leq 0$ ce qui montre à nouveau la décroissance de f sur I .

8. $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$ et $t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}$ en est une primitive.

$t \mapsto \frac{1}{t^{x+1}}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto -\frac{(x+1)}{t^{x+2}}$.

$t \mapsto \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^{x+1}}$ est de limite nulle en 1 et en $+\infty$.

On peut donc intégrer par parties pour obtenir

$$\forall x > 0, f(x) = (x+1) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^{x+2}} dt$$

En écrivant que $\sqrt{t^2 - 1} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$ et comme toutes les intégrales existent, on a alors

$$\forall x > 0, f(x) = (x+1)(f(x) - f(x+2))$$

On en déduit que

$$f(x+2) = \frac{x}{x+1}f(x)$$

9. Montrons par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, f(2p) = \frac{4^{p-1}(p!)^2}{(2p-1)!} \text{ <----c'est (p-1)!^2}$$

- Initialisation : le résultat est vrai pour $p = 1$ car $f(2) = 1$.
- Hérédité : soit $p \geq 2$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang $p - 1$. On connaît alors $f(2p - 2)$ et la question précédente donne $f(2p)$ en fonction de $f(2p - 1)$. On obtient le résultat au rang p en combinant les résultats.

10. Soit $x > 0$. On a

$$\phi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x+2) = (x+1)f(x+1)\frac{x}{x+1}f(x) = \phi(x)$$

11. ϕ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme f . On a donc, avec la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x+1) = \phi(1) = f(1)f(2) = f(1)$$

Or, $\phi(x) \sim_{0^+} xf(x)f(1)$ et donc $xf(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0^+$ et ainsi

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi(n) = \phi(1) = \frac{\pi}{2}$ (périodicité de ϕ). Ceci s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$$

D'après la décroissance et positivité de f ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1)^2 \leq f(n)f(n+1) \leq f(n)^2$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 2, \frac{\pi}{2n} \leq f(n)^2 \leq \frac{\pi}{2(n-1)}$$

Majorant et minorant étant tous deux équivalents à $\pi/2n$ au voisinage de $+\infty$, il en est de même de $f(n)^2$. Et comme on peut élever un équivalent à une puissance constante, on a finalement

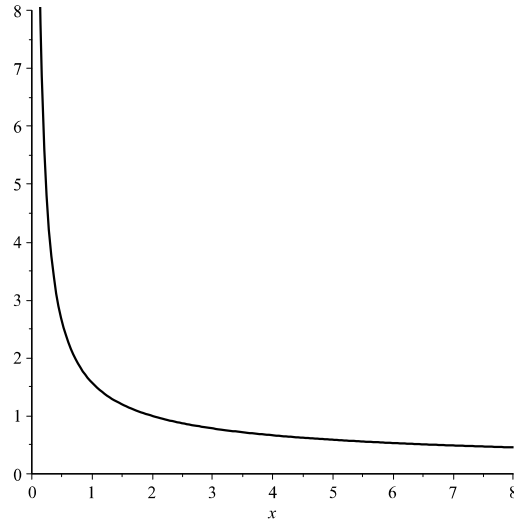
$$f(n) \underset[n \in \mathbb{N}^*]{n \rightarrow +\infty} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

13. Toujours par décroissance de f , on a $\forall x \geq 1, f(\lceil x \rceil) \leq f(x) \leq f(f(\lfloor x \rfloor))$. Comme $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ équivalent tout deux à x au voisinage de $+\infty$ (ils diffèrent de x de moins de 1 qui est négligeable devant x) la question précédente donne que le majorant et le minorant sont tous deux équivalents à $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ et donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

oubli de $\Phi(n)$

14. On a décroissance de f . La courbe aux voisinage de 0 et de $+\infty$ est proche de celle des fonctions équivalentes trouvées.



15. Avec ce qui précède, ϕ tend vers $\pi/2$ quand $x \rightarrow +\infty$. Or, pour tout x on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(x) = \phi(x + n)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall x > 0, \phi(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 4

1. (a) α étant réel,

$$|z - \alpha|^2 = (\operatorname{Re}(z) - \alpha)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \geq \operatorname{Im}(z)^2$$

ce qui donne le résultat en passant à la racine carrée.

- (b) Notons $d = \deg(P)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ les racines de P comptées avec leurs multiplicités (il y en a d puisque l'on suppose P scindé de degré d). On a alors (P étant unitaire)

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| = \left| \prod_{i=1}^d (z - \alpha_i) \right| = \prod_{i=1}^d |z - \alpha_i|$$

On utilise alors la question précédente avec les α_i et, comme on peut multiplier des inégalités entre réels positifs,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^d$$

- (c) On a immédiatement

$$P(X) = (X + 1)(X^2 - X + 1) = (X + 1)(X + j)(X + j^2) \quad \text{avec } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

On a alors immédiatement

$$0 = |P(j)| < |\operatorname{Im}(j)|^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

- (d) Si $P(z) = 0$ alors l'hypothèse faite donne $\operatorname{Im}(z) = 0$ et z est donc réel. Comme P est scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de Gauss), le fait que toute racine complexe est réelle donne le caractère scindé sur $\mathbb{R}$ de P .
 - (e) On a donc montré que P (supposé élément de $\mathbb{R}[X]$) est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^{\deg(P)}$.
2. $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. On peut donc parler de convergence dans cet espace sans préciser la norme. En particulier, on peut choisir la "norme infinie" (maximum des modules des coefficients) pour voir que la convergence correspond à la convergence coordonnée par coordonnée.
- (a) Comme polynôme caractéristique d'une matrice de taille q , P_n est unitaire et de degré q .
 - (b) On a $P_n(x) = \det(A_n - xI_q)$. Chaque coefficients de $A_n - xI_q$ converge vers le coefficient associé de $A - xI_q$. Comme le passage au déterminant est continu (par exemple par théorèmes d'opération puisque l'on ne fait que des sommes ou produits), on a $P_n(x) \rightarrow P(x) = \det(A - xI_q)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
 - (c) Chaque A_n étant trigonalisable, chaque P_n est scindé. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |P_n(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^q$$

On peut alors passer à la limite pour voir que P vérifie la même propriété et (question 1) est scindé sur $\mathbb{R}$. Ce qui indique alors que A est trigonalisable.

- (d) On vient donc de montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ est une partie fermée.
3. (a) La convergence par coordonnée donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Chaque A_n est diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1 puisqu'elle possède deux valeurs propres distinctes. En revanche, 1 est la seule valeur propres de A et comme $A \neq I_2$, A n'est pas diagonalisable.

REMARQUE : les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur la diagonale.

- (c) On en conclut que l'ensemble des matrices diagonalisable n'est pas un fermé.