e_3a ΠΡ 2017

$\boxed{\text{exercice } 2}$

1) a) Par définition de A, $A = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{c} u(e_j) \\ a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$

donc $\forall j \in [\![1, n]\!] \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$

d'où $(u(e_j)|e_i) = a_{i,j} \times 1 + \sum 0$ d' $\boxed{a_{i,j} = (u(e_j)|e_i)}$

b) $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad a_{i,j} = (u(e_j)|e_i) = -(e_j | u(e_i))$
$= -(u(e_i) | e_j) = -a_{j,i}$

donc $({}^tA)_{i,j} = a_{j,i} = -a_{i,j} = -(A)_{i,j}$

d' $\boxed{A^T = -A}$

2) $\det A^T = \det A = \det(-A) = (-1)^n \det A$

comme u est bijectif, $\det A \neq 0$ et donc $(-1)^n = 1$ ce qui donne d' $\boxed{n \text{ pair}}$

3) $\forall (x, y) \in E^2 : \ (v(x)|y) = (u \circ u(x)|y) = -(u(x)|u(y))$
$= +(x|v(y))$

d' $\boxed{v \text{ symétrique et par th. spectral, on a le résultat}}$

de + : $\det v = (\det u)^2 \neq 0$, donc $\underline{v \text{ automorphisme}}$

4) Soit $x \in E \setminus x \neq 0$ et $v(x) = \lambda x$ (2)

$$(v(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2$$
$$= (u \circ u(x)|x) = -(u(x)|u(x)) = -\|u(x)\|^2$$

Comme $x \neq 0$, $\|x\| \neq 0$ et $u(x) \neq 0$ car u bijectif, donc $\|u(x)\|^2 \neq 0$ d'où $\lambda = -\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} < 0$ d'où $\boxed{\lambda < 0}$

5a) $F = \text{vect}(x, u(x))$ est un SEV de dimension ≤ 2.
Montrons que $(x, u(x))$ libre ; soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$\alpha x + \beta u(x) = 0$

si $\beta \neq 0$ alors $u(x) = -\dfrac{\alpha}{\beta} x$

donc $u^2(x) = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 x$

d'où $v(x) = \lambda x = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 x$

Comme $x \neq 0$ (par définition d'1 vect propre) :

$\lambda = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 \geq 0$: absurde, donc $\beta = 0$ d'où $\alpha = 0$

d'où $\boxed{\dim F = 2}$

b) $u(F) = \text{vect}(u(x), u^2(x)) = \text{vect}(u(x), \lambda x)$
$= \text{vect}(x, u(x))$ car $\lambda \neq 0$

d'où : $\boxed{F \text{ stable par } u}$

$\forall x \in F^\perp$, montrons que $u(x) \in F^\perp$:

$\forall y \in F$, $(u(x) | y) = -(x | u(y))$

comme $u(y) \in F$, $(x | u(y)) = 0$ donc $u(x) \in F^\perp$

d'où $\boxed{F^\perp \text{ stable par } u}$

c) <u>Analyse</u> : $B' = (e'_1, e'_2)$ OTN)

$u(e'_1) = a e'_2$ et $u(e'_2) = -a e'_1$

donc $u^2(e'_1) = v(e'_1) = -a^2 e'_1$, donc e'_1 doit

être un $\vec{v}p$ de v associé à λ et la relation

$u(e'_1) = a e'_2$ donne $e'_2 = \frac{1}{a} u(e'_1)$

<u>Synthèse</u> : posons $e'_1 = \frac{x}{\|x\|}$ et $e'_2 = \frac{1}{a\|x\|} u(x)$

On a $\|e'_1\| = 1$, $u(e'_1) = \frac{1}{\|x\|} u(x) = a e'_2$

$u(e'_2) = \frac{1}{a\|x\|} v(x) = \frac{\lambda x}{a\|x\|} = \frac{-a^2 x}{a\|x\|} = -a e'_1$

le 4) a montré que $\lambda = -\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2}$ donc $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sqrt{-\lambda} = a$

donc $\|e'_2\| = 1$

enfin $(u(x)|x) = -(x|u(x))$ donc $u(x) \perp x$

d'où $e'_1 \perp e'_2$ donc (e'_1, e'_2) libre donc base de F

d'où $\boxed{\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2) \text{ base OTN de } F \text{ et } M_{\mathcal{B}'}(u_F) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}}$

d) On sait que $u_{F^\perp} \in \mathcal{L}(F^\perp)$, si $x \in F^\perp$, $u_{F^\perp}(x) = 0$

donc $u(x) = 0$ d'où $x = 0$ et $u_{F^\perp}$ automorphisme.

Enfin si la relation est vraie pour tout $(x,y) \in E^2$,

elle est vraie si $(x,y) \in (F^\perp)^2$ (QPLPPLM !)

d'où $\boxed{u_F \text{ automorphisme et vérifie } (1)}$

6) Avec le 5) il existe (e'_1, e'_2) base OTN qui vérifie le 5c), on considère $v_{F^\perp} = u_{F^\perp} \circ u_{F^\perp}$ qui admet un $\vec{v}p$ y associé à une vp μ et si $b = \sqrt{-\mu}$

on a, toujours avec le 5c), une base (e'_3, e'_4) OTN de $F^\perp$, $M_{(e'_3, e'_4)}(u_{F^\perp}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

d'où $\boxed{\mathcal{B}'' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) \text{ base de } F \oplus F^\perp = E \text{ et } M_{\mathcal{B}''}(u) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right)}$

7) On raisonne par réc. et on fait comme au 6) :
↳ sur la dimension de E

$\exists \mathcal{B}''$ OTN de E $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (\mathbb{R}^*)^p$ |

$$\boxed{M_{\mathcal{B}''}(u) = \begin{pmatrix} S_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{\alpha_p} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad S_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}}$$