

exercice 6

1

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

exemples

$$n=2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n=3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 1

$$1) \chi_F(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & -x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ & * \\ & 1 \end{vmatrix}$$

développement 1^{ère} colonne.

$$= -x(-x)^{n-1} + (-1)^{n+1} \quad \text{d.} \quad \boxed{\chi_F(x) = (x^n - 1)}$$

les valeurs propres de F sont: $\boxed{\text{sp}(F) = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\} \text{ \& } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}}$

2) F possède n val. propres 2 à 2 distinctes, donc par la 2^{ème} caractérisation, F est diagonalisable dans E.

comme 0 n'est pas valeur propre de F, F est inversible.

3) $G = \langle F \rangle$ donc G est monogène. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $F^n = I_n$ donc

$$G = \{I_n, F, F^2, \dots, F^{n-1}\} \quad \forall p \in \mathbb{Z} \quad F^p = F^r \text{ avec } p = nq + r \text{ (division euclidienne) d.} \quad \boxed{G \text{ cyclique}}$$

Générateur. Montrons que $(G, \times)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. ②

Le polynôme minimal de F , π_f divise $\chi_F = (X^n - 1)$ (C.H.)

D'autre part toutes les valeurs propres de F sont racines

de π_f donc $\prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k) = X^n - 1$ divise π_f . Donc π_f

et χ_F sont associés. Comme π_f est unitaire, on a

$\pi_f = X^n - 1$ d'où $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ avec $p < q$

on a $F^p \neq F^q$ sinon $F^{q-p} = I_n$ et $0 < q-p < n$ Absurde.

d'où card $G = n$.

considérons $\phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow G$ * Si $\bar{p} = \bar{q}$ alors $p - q = kn$,
 $\bar{p} \longmapsto F^p$ $k \in \mathbb{Z}$

donc $F^{p-q} = (F^n)^k = I_n$ et donc $F^p = F^q$. ϕ est donc définie.

* $\phi(\bar{p} + \bar{q}) = \phi(\overline{p+q}) = F^{p+q} = F^p \times F^q = \phi(\bar{p}) \times \phi(\bar{q})$ d'où

ϕ morphisme de groupe.

$\ker \phi = \{\bar{0}\}$

* $\phi(\bar{p}) = I_n \Leftrightarrow F^p = I_n \Leftrightarrow n$ divise $p \Leftrightarrow \bar{p} = \bar{0}$: ϕ injectif.

* Comme card $G = \text{card } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = n$, on en déduit que

$(G, \times)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Montrons que $\bar{p}$ générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Leftrightarrow F^{\bar{p}} = \phi(\bar{p})$ générateur de G ③

$\Rightarrow] \forall k \in [0, n-1] \exists q \in \mathbb{Z} \mid \bar{k} = q \cdot \bar{p}$ donc $F^k = (F^{\bar{p}})^q$

d'où $F^{\bar{p}}$ générateur de $G = \{I_n, F, \dots, F^{n-1}\}$

$\Leftarrow] \forall \bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \exists q \in \mathbb{Z} \mid F^k = (F^{\bar{p}})^q$ donc $F^{k-pq} = I_n$

donc $k-pq \equiv 0 \pmod{n}$ d'où $\bar{k} = q \cdot \bar{p}$ et $\bar{p}$ gène. de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

d. Les générateurs de (G, X) sont les matrices :
 $F^p, p \in [1, n]$ et $p \wedge n = 1$

4) Comme $\Pi_F = X^n - 1$, $\text{vect}(G) = \text{vect}(I_n, F, \dots, F^{n-1})$

$\Pi_F(I_n, F, \dots, F^{n-1})$ est liée : $\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$

$\lambda_0 I_n + \dots + \lambda_{n-1} F^{n-1} = 0$. Posons $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$

On a $P(F) = 0$ donc $\Pi_F = X^n - 1$ divise P . Comme

$\deg P \leq n-1, P=0$ d'où $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

d. $(I_n, F, \dots, F^{n-1})$ base de $\text{vect}(G)$ qui est donc de dim. n

5) Comme F diagonalisable, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \mid F = P D P^{-1}$ avec
 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $\lambda_k = \omega_k = \omega^n$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$

d'où $\forall p \in \mathbb{Z} \quad F^p = P D^p P^{-1}$ et donc $\text{Tr} F^p = \sum_{k=1}^n \lambda_k^p$

(4)

D'où $\text{Tr} F^p = \sum_{k=1}^n (\omega^k)^p = \begin{cases} n & \text{si } p \equiv 0 (n) \\ \omega^p \frac{1 - (\omega^p)^n}{1 - \omega^p} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

d $\forall M \in G, M \neq I_n : \text{Tr}(M) = 0$ et $\text{Tr}(I_n) = n$

Question 2

1.) Avec les mêmes notations que ci-dessus :

$A = P p(D) P^{-1}$ et $p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$

d'où $\text{sp}(A) = \{p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)\}$

Dans $\mathbb{R}(X)$: $p = 1 + 2X + \dots + nX^{n-1} = (1 + X + X^2 + \dots + X^n)'$
 $= \left(\frac{1 - X^{n+1}}{1 - X} \right)' = \frac{-(n+1)X^n(1-X) + 1 - X^{n+1}}{(1-X)^2}$

donc $(1-X)^2 p = -(n+1)X^n(1-X) + 1 - X^{n+1}$; cette

égalité polynomiale étant vraie sur $\mathbb{R}[X]$ et comme $\mathbb{R}$ est infini, cette égalité est vraie sur $\mathbb{C}[X]$.

(Remarque : La dérivation des fractions de $\mathbb{C}$ est H.P.)

⑤

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$: $(1-\lambda_k)^2 p(\lambda_k) = -(n+1)\lambda_k^n(1-\lambda_k) + 1-\lambda_k^{n+1}$

donc $(1-\lambda_k)^2 p(\lambda_k) = -(n+1)(1-\lambda_k) + 1-\lambda_k = (1-\lambda_k)(-n)$

Comme $\lambda_k \neq 1$, $p(\lambda_k) = \frac{n}{\lambda_k - 1}$

Pour λ_n : $P(\lambda_n) = P(1) = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

d $\boxed{\text{Sp}(A) = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{n}{\lambda_k - 1}, k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}}$

2) $\det A = \frac{n(n+1)}{2} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\lambda_k - 1}$ car A scindé donc $\det A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda$

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-1} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - 1)}$$

Or $\prod_{k=1}^{n-1} (X - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k) = \frac{X^n - 1}{X - 1} = 1 + X + \dots + X^{n-1}$

donc $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \lambda_k) = 1 + 1 + \dots + 1 = n$ et donc $\prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - 1) = (-1)^{n-1} n$

d $\boxed{\det A = (-1)^{n-1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}}$

Question 3

⑥

1.) Grâce à Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$.

Notons $\chi_A = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n$, on a $\alpha_0 = \det A \neq 0$ $\begin{matrix} \text{P}_2: \mathbb{Z} \\ \downarrow \end{matrix}$

donc $\alpha_0 I_n = A(-\alpha_1 I_n - \alpha_2 A - \dots - \alpha_n A^{n-1})$

d'où $A^{-1} = \frac{-\alpha_1}{\alpha_0} I_n - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} A - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} A^{n-1} \in \text{vect}(A^k, k \in \mathbb{I}_0, n-1])$

2.) Notons $G_1 = \text{vect}(F^p, p \in \mathbb{I}_0, n-1]) = \text{vect}(G)$

$G_2 = \text{vect}(A^p, p \in \mathbb{I}_0, n-1])$

On a $\forall k \in \mathbb{I}_0, n-1] A^k = p(F)^k \in \text{vect}(G) = G_1$

Donc $G_2 \subset G_1$, donc $A^{-1} \in G_2 \subset G_1$

d. $\exists (u_0, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \setminus A^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k$

3.) On reprend l'égalité de la question 2, 1°);

$(1-x)^2 p = -(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}$ que l'on évalue en

$F : (I_n - F)^2 p(F) = -(n+1)F^n(I_n - F) + I_n - F^{n+1}$

donc $(F - I_n)^2 A = -(n+1)I_n(I_n - F) + I_n - F = -n(I_n - F)$

d. $(F - I_n)^2 A = n(F - I_n)$

4°) Multiplions la relation ci-dessus (3') par A^{-1} ;

(7)

$$(F - I_n)^2 = n(F - I_n)A^{-1} = n(F - I_n) \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k \right)$$

$$F^2 - 2F + I_n = n \sum_{k=0}^{n-1} u_k F^{k+1} - n \sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k$$

$$F^2 - 2F + I_n = n \sum_{k=1}^n u_{k-1} F^k - n \sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k$$

comme $(I_n, F, \dots, F^{n-1})$ est libre et que $F^n = I_n$,

on identifie en supposant $n \geq 3$ (trivial par $n=1$ ou 2)

$$\begin{cases} k=0 & : 1 = -n u_{n-1} - n u_0 \\ k=1 & : -2 = n u_0 - n u_1 \\ k=2 & : 1 = n u_1 - n u_2 \\ n-1 \geq k \geq 3 & : 0 = n u_{k-1} - n u_k \end{cases}$$

La 4-ième condition donne $0 = u_2 - u_3 = u_3 - u_4 = \dots = u_{n-2} - u_{n-1}$

donc $u_2 = u_3 = u_4 = \dots = u_{n-1}$

La 2^{ème} condition donne $u_0 - u_1 = \frac{-2}{n}$ (1) et la 3^{ème} donne

$u_1 - u_2 = \frac{1}{n}$ (2), (1)+(2) donne $u_0 - u_2 = \frac{-1}{n}$

d

$$\begin{cases} u_2 = \dots = u_{n-1} \\ u_2 - u_0 = u_1 - u_2 = \frac{1}{n} \end{cases}$$

5) Avec la question 4.5) : $T_2(A^{-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k T_2(F^k)$ (8)

$$= u_0 T_2(I_n) = n u_0$$

D'autre part comme A^{-1} est scalaire, on a :

$$T_2(A^{-1}) = \sum_{\lambda \in \text{sp}(A^{-1})} \lambda = \frac{2}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{k-1}}{n} \quad \text{avec Q2-19}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k - \frac{n-1}{n} \quad \text{or } \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0 \text{ donc}$$

$$T_2(A^{-1}) = \frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n}(-1) - \frac{n-1}{n} = \frac{1-2n-n^2}{n(n+1)}$$

d'où
$$u_0 = \frac{2-n-n^2}{n^2(n+1)}$$

6) On en déduit que $u_1 = u_0 + \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2(n+1)}$

et $u_1 = u_1 + \frac{1}{n} = \frac{2+n+n^2}{n^2(n+1)}$

d
$$A^{-1} = \frac{1}{n^2(n+1)} \left((2-n-n^2)I_n + (2+n+n^2)F + 2F^2 + \dots + 2F^{n-1} \right)$$

remarque : $F^p = \begin{pmatrix} 0 & 0^1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2 \\ & 2 & \beta \\ \beta & & 2 \end{pmatrix}$

avec $\Delta = n^2(n+1)$, $\alpha = 2-n-n^2$ et $\beta = 2+n+n^2$